VILNIAUS UNIVERSITETAS

Matematikos ir informatikos fakultetas
Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas

MIFODIJUS SAPAGOVAS

KRAŠTINIAI UŽDAVINIAI SU NELOKALIOSIOMIS SĄLYGOMIS: SKAITINIAI METODAI, PROBLEMOS, PERSPEKTYVOS (APŽVALGA)

Vilnius, 2020

1. Įvadas

1963 m. moksliniame žurnale "*Quartely of Applied Mathematics*" pasirodė nedidelės apimties J. R. Cannon straipsnis [1] apie naujo tipo kraštinio uždavinio formulavimą šilumos laidumo lygčiai. Šiame straipsnyje buvo suformuluotas ir pradėtas nagrinėti toks uždavinys. Srityje $\{0 < x < 1,\ 0 < t \le T\}$ reikia rasti sprendinį $u(x,t)$, tenkinantį gana paprastą diferencialinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

pradinę ir kraštinę sąlygas

$$u(x,0) = \varphi(x),\quad 0 < x < 1, \tag{1.2}$$

$$u(1,t) = \psi(t),\quad 0 \le t \le T \tag{1.3}$$

ir dar vieną (neįprastą iki šiol) sąlygą

$$E(x) = \int_0^{x(t)} u(x,t)dx,\quad 0 < x(t) \le 1; \tag{1.4}$$

čia $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $E(x)$ ir $x(t)$- duotos žinomos funkcijos. Paprastai, klasikinėje kraštinių uždavinių diferencialinėms lygtims teorijoje vietoje (1.4) sąlygos yra formuojama dar viena kraštinė sąlyga taške $x = 0$, analogiška (1.3) sąlygai, pavyzdžiui,

$$u(0,t) = \mu(t),\quad 0 \le t \le T. \tag{1.5}$$

Gana paprastai galima paaiškinti (1.4) sąlygos fizikinę prasmę. Pavyzdžiui, jei (1.1) lygtis yra šilumos laidumo lygtis, tada $u(x,t)$ yra temperatūra taške x laiko momentu t, o $E(x)$ yra vidinė energija srityje $0 < x < x(t)$ laiko momentu t. Analogiškai, jeigu $u(x,t)$ yra cheminio produkto koncentracija difuzijos procese, tai $E(x)$ yra to cheminio produkto masė srityje $0 < x < x(t)$ laiko momentu t. (1.4) sąlyga yra neklasikinė, anksčiau diferencialinėms lygtims tokio tipo sąlygos nebuvo būdingos. Kiek vėliau tokio tipo sąlygos pavadintos nelokaliosiomis sąlygomis. Pastarasis pavadinimas gana tiksliai atitinka tokių sąlygų prasmę. Klasikinėmis sąlygomis (1.2), (1.3) ar (1.5) apibrėžiamos (užduodamos) ieškomo sprendinio (ar jo išvestinių) reikšmės viename konkrečiame taške. Tuo tarpu, į nelokaliąją salygą ieškomo sprendinio reikšmės įeina daugiau negu viename taške – į (1.4) salygą sprendinio reikšmės įeina visuose intervalo $(0, x(t))$ taškuose. Bene pirmą kartą nelokaliųjų sąlygų sąvoka pavartota straipsnyje [2].

Nors ir ne iš karto, straipsnis [1] mokslo pasaulyje sulaukė didžiulio dėmesio. Dabar, praėjus beveik 60 metų nuo šio straipsnio pasirodymo, galima tvirtinti, kad J. R. Cannon straipsnis buvo naujos, gana svarbios matematinių tyrimų krypties pradžia. Ši kryptis - kraštiniai uždaviniai diferencialinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis: teorija, skaitiniai metodai ir taikymai. Trumpiau, šios krypties uždaviniai dar vadinami tiesiog nelokaliaisiais uždaviniais.

Įdomu pastebėti, kad beveik tuo pat metu, nepriklausomai viens nuo kito buvo paskelbti dar keli straipsniai panašia tematika [2,3,4,5], kuriuose buvo nagrinėjamos diferencialinės lygtys su integralinėmis sąlygomis. Dar anksčiau, grynai matematiniu aspektu buvo nagrinėjamos apibendrintos kraštinės sąlygos paprastosioms diferencialinėms lygtims [6,7,8]. Tačiau taip jau atsitiko, kad, būtent, J. R. Cannon straipsnis [1] susilaukė didžiausio kitų matematikų dėmesio. Viena iš priežasčių buvo ta, kad šio straipsnio autorius aktyviai plėtojo nelokaliųjų uždavinių teoriją bei skaitinius sprendimo metodus [9,10,11]. Be to, svarbu buvo ir tai, kad straipsnyje [1] nelokalioji sąlyga turėjo aiškią taikomąją prasmę

1. Nelokaliųjų uždavinių taikymai ir nelokaliųjų sąlygų įvairovė.

Per paskutinius du-tris praeito amžiaus dešimtmečius matematinėje literatūroje pasirodė gana daug naujų nelokaliųjų sąlygų formulavimų, tiek susiejant jas su realiais taikomaisiais uždaviniais, tiek pateikiant jas kaip vidinių matematikos poreikių paskatintus apibendrinimus.

Pateiksime vieną tokių galimų kraštinių uždavinių apibendrinimą elipsinėms lygtims [12]. Imkime n-matę sritį $x \in G$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ su pakankamai glodžiu kontūru ∂G. Padalinkime ∂G į dvi dalis: σ ir $\partial G / \sigma$. Apibrėžkime tolydų paviršiaus σ atvaizdį į paviršių $T\sigma$, esantį srities G viduje. Dabar elipsinei lygčiai

$$Lu = 0, \ x \in G \tag{2.1}$$

suformuluokime tokias kraštines sąlygas (antroji kraštinė sąlyga yra nelokalioji)

$$u(x) = \varphi(x), \ \ x \in \partial G / \sigma, \tag{2.2}$$

$$u(x) = \gamma u(Tx), \ x \in \sigma, \tag{2.3}$$

γ - duotas skaičius. Gana paprastai šis (2.1)-(2.3) nelokalusis uždavinys formuluojamas vienamačiu ir dvimačiu atvejais. Būtent, kai $n = 1$, (2.1)-(2.3) uždavinys tampa tokiu (atskiras atvejis):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \ x \in (a,b)$$

$$u(a) = \alpha, \ u(b) = \gamma u(\xi), \ \ a < \xi < 1,$$

γ - realusis skaičius (parametras). Kai $n = 2$, (2.1)-(2.3) kraštinis uždavinys vienu iš paprasčiausių atvejų gali būti toks:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \ 0 < x, y < 1, \tag{2.4}$$

$$u(1,y) = \mu_1(y), \ 0 \le y \le 1,$$

$$u(x,0) = \mu_2(x), \ u(x,1) = \mu_3(x), \ \ 0 \le x \le 1,$$

$$u(0,y) = \gamma u(\xi, y), \ \ 0 < \xi < 1, \ 0 \le y \le 1. \tag{2.5}$$

(2.3) nelokalioji sąlyga užrašyta ne iš taikomųjų poreikių, o kaip teorinis klasikinių sąlygų apibendrinimas. Be komentarų nurodyta [12], kad tokios sąlygos gali turėti prasmę, aprašant kai kuriuos procesus plazmoje. Dabar (2.3) nelokalioji sąlyga paprastai yra vadinam Bicadzės-Samarskio sąlyga. Yra nemažai straipsnių, kuriuose ir nagrinėjami (2.1)-(2.3) uždavinio atskiri atvejai ar nežymūs apibendrinimai [13,14,15].

Dar vienas nelokaliųjų sąlygų variantas suformuluotas straipsniuose [16, 17], kuriuose sprendžiamas toks uždavinys:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x\in(0,1),\ t\ge 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}, \tag{2.7}$$

$$u(0,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x). \tag{2.8}$$

Įrodyta, kad (2.7) sąlyga (2.6) lygčiai yra ekvivalenti sąlygai

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0 \tag{2.9}$$

(palygink su (1.4) sąlyga). Nurodyta, kad tokio tipo sąlygos sutinkamos difuzijos procese turbulentinėje plazmoje. Straipsnyje [18] suformuluotas ir išnagrinėtas kraštinis uždavinys dvimatei parabolinei lygčiai su (2.7) pavidalo nelokaliąja sąlyga.

(1.4) integralinė nelokalioji sąlyga iki šiol yra viena dažniausiai sutinkamų nelokaliųjų sąlygų įvairaus tipo diferencialinėms lygtims (parabolinėms, elipsinėms, hiperbolinėms). Kita dažnai naudojama nelokalioji sąlyga suformuluota straipsniuose [19, 20].

Straipsnyje [19] nagrinėjamas kvazistatinis šilumos tamprumo teorijos uždavinys. Homogeninė izotropinė juosta $0\le x\le 1$ juda taip, kad slinkties vektorius yra lygiagretus Dekarto koordinačių sistemos absicių ašiai. Tada entropija tūrio vienete $u(x,t)$ tenkina diferencialinę lygtį

$$(1+\sigma^2)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.10}$$

su pradine sąlyga ir dviem nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis:

$$u(0,t)=k\int_0^1 u(x,t)dx,\ 0<t\le T \tag{2.11}$$

$$u(1,t)=k\int_0^1 u(x,t)dx,\ 0<t\le T; \tag{2.12}$$

čia pažymėta

$$k=-\delta,\quad \delta=(3\lambda+2\gamma)\left(\frac{\theta_0}{(\lambda+2\gamma)c}\right)^{1/2}\cdot B,$$

λ ir γ yra tamprumo moduliai, θ_0 - pradinė temperatūra, c - savitoji šiluma, B - šiluminio plėtimosi koeficientas.

Straipsnyje [20] išnagrinėtas dar vienas kvazistatinis šiluminio tamprumo teorijos uždavinys. Tai vienetinio ilgio termotampraus strypo kvazistatinio lenkimo modelis. Šiuo atveju entropija $u(x,t)$ tenkina tą pačią (2.10) lygtį su pradine sąlyga ir štai tokiomis nelokaliosiomis sąlygomis:

$$u(0,t)=\int_0^1 k_1(x)u(x,t)dx\,,\ 0<t\le T\,,\tag{2.13}$$

$$u(1,t)=\int_0^1 k_2(x)u(x,t)dx\,,\ 0<t\le T\,;\tag{2.14}$$

čia

$$k_1(x)=2\delta^2(2-3x)\,,$$

$$k_2(x)=2\delta^2(1-3x)\,,$$

$$\delta^2=\frac{\theta_0 B^2}{cA}\,;$$

A - strypo liekamasis standis; B - šiluminių ir mechaninių efektų sąveikos matas; θ_0 ir c kaip ir anksčiau, pradinė temperatūra ir savitoji šiluma.

Dabar pateiksime tris kitokio tipo nelakaliųjų sąlygų pavyzdžius, kai nelokalioji sąlyga atsiranda tada, kai diferencialinio uždavinio formulavime be ieškomo sprendinio dar yra nežinomas parametras ar nežinoma funkcija. Dėl šių nežinomųjų papildomai formuluojama perteklinė sąlyga, kaip taisyklė, nelokalioji.

Pirmasis pavyzdys – elektros kontaktų iš skysto metalo (gyvsidabrio) konstravimas. Skysčio lašo (gyvsidabrio), esančio ant horizontaliosios plokštumos, laisvo paviršiaus radimo matematinis modelis gali būti aprašytas kaip kraštinis uždavinys su integraline sąlyga [21]:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{\sqrt{1+\left(\frac{du}{dr}\right)^2}}\frac{du}{dr}\right)-Ku+\lambda=0\tag{2.15}$$

$$\frac{du(0)}{dr}=0\,,\ u(a)=0\,,\tag{2.16}$$

$$\frac{du(a)}{dr}=\cos\gamma\,,\tag{2.17}$$

$$2\pi\int_0^a rudr=V\,.\tag{2.18}$$

Čia $K=\dfrac{g\rho}{\sigma}$, g - gravitacinė konstanta, ρ - skysčio tankis, σ - paviršiaus įtampos koeficientas, γ - drėkinimo kampas (priklauso nuo lašo ir plokštumos medžiagų savybių), V - lašo tūris. Parametrai a ir λ nėra žinomi, todėl antros eilės diferencialinei lygčiai formuluojamos ne dvi, o keturios sąlygos. Viena jų, (2.18) sąlyga yra nelokalioji. Įvairūs šio uždavinio variantai ir aspektai aprašyti straipsniuose [22, 23, 24, 25]. Kai skysčio lašas interpretuojamas kaip elektros kontaktas, patogiau dirbtinai fiksuoti radiusą a. Tuo tikslu plokštumoje specialiai sudrėkinama skritulio formos sritis, prie kurios lašas „prilimpa". Tada uždavinio formulavime iškrenta (2.17) sąlyga [24].

Kitas perteklinių nelokaliųjų sąlygų pavyzdys susijęs su temperatūros pasiskirstymo valdymu priklausomai nuo šilumos šaltinio. Straipsniuose [26, 27] išnagrinėtas štai toks uždavinys parabolinei lygčiai:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t)u + F(x,t),\ x \in (0,L),\ t \in (0,T],$$
$$u(x,0) = u_0(x),$$
$$u(0,t) = g_0(t),$$
$$u(L,t) = g_1(x)$$

su nelokaliąja sąlyga

$$\int_0^{S(t)} u(x,t)dx = E(t),\ 0 < S(t) \le L. \tag{2.19}$$

Uždavinio specifika yra ta, kad šaltinio funkcija $p(t)$ yra nežinoma. Ją reikia parinkti taip, kad energija (šilumos kiekis) tenkintų (2.19) sąlygą.

Trečias atvirkštinis nelokaliųjų sąlygų pavyzdys susijęs su dvimačiu difuzijos uždaviniu. Straipsnyje [11] pateiktas matematinis modelis tokio difuzijos proceso, kuriame yra nežinoma medžiagos koncentracija srities paviršiaus dalyje. Supaprastinus kai kurias prielaidas, parabolinei lygčiai

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ 0 < x, y < 1,\ 0 < t \le T \tag{2.20}$$

formuluojamos tokios pradinės ir kraštinės sąlygos:

$$u(x,y,0) = f(x,y),\ 0 < x, y < 1,$$
$$u(0,y,t) = g_0(y,t),\ u(1,y,t) = g_1(y,t),\ 0 < y < 1,\ 0 < t \le T, \tag{2.21}$$
$$u(x,1,t) = h_1(x,t),\ u(x,0,t) = \mu(t)h_0(x),\ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T.$$

Paskutinėje iš kraštinių sąlygų funkcija $\mu(t)$ yra nežinoma, todėl (2.20)-(2.21) uždavinio formulavime įeina dar viena (nelokalioji) sąlyga:

$$\int_0^1 \int_0^{S(x)} u(x,y,t)dydx = m(t),\ 0 < t \le T, \tag{2.22}$$

čia $0 < S(x) \le 1$, $m(t)$ - žinoma funkcija. Integralas (2.22) sąlygoje apibrėžia medžiagos masę srityje $\{0 < x < 1,\ 0 < y < S(x)\}$.

Įdomi detalė. Šio straipsnio autoriai įžangoje rašo, kad straipsnyje pirmą kartą nagrinėjama ne vienamatė difuzijos lygtis su sąlyga, nusakančia masę (subject to specification of mass). Tačiau Lietuvos matematikai beveik prieš dešimtmetį buvo paskelbę mokslinius rezultatus apie dvimačių ir trimačių parabolinių lygčių su integraline sąlyga skaitinį sprendimą [28, 29, 30]. Straipsniuose [29, 30] nagrinėjamas priemaišų difuzijos matematinis modelis tuo atveju, kai difuzijos procesas vyksta po jonų implantacijos proceso. Jonų implantacijos rezultate puslaidininkės medžiagos mažame paviršiaus sluoksnyje sukoncentruojamas tam tikras skverbiančiosios medžiagos (pavyzdžiui, fosforo) kiekis m. Po to vykstantis termodifuzijos procesas supaprastintu vienamačiu atveju aprašomas tokiu diferencialiniu uždaviniu:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_0 u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \sigma>0,\ 0<x<1,$$

$$u(x,0)=0,\ u(l,t)=0,$$

$$\int_0^{x_1} u(x,t)dx=m.$$

Knygoje [31] pateikta keletas idealizuotų bioreaktorių matematinių modelių su nelokaliosiomis sąlygomis. Vienas jų yra toks:

$$\frac{1}{B}\frac{d^2X}{dz^2}-\frac{dX}{dz}+DX=0,$$

$$X(0)=\frac{1}{1+\gamma}+\frac{\gamma}{1+\gamma}X(1)+\frac{1}{B}X'(0), \tag{2.23}$$

$$X'(1)=0;$$

čia $X(z)$ yra bedimensinė ląstelių koncentracija, B, D ir γ - duotos fizikinės konstantos. (2.23) nelokalioji sąlyga sutinkama ir kituose difuzijos uždaviniuose.

Knygoje [32] galimas rasti keletą matematinių modelių biologijoje su nelokaliosiomis sąlygomis.

Straipsnyje [33] difuzijos lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+w(x)\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t,u),\ 0<x<l,\ t>0$$

nagrinėjama su bendresnėmis nelokaliosiomis sąlygomis, lyginant jas su (2.13), (2.14) sąlygomis

$$u(0,t)-\alpha_0\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\int_0^l K_0(x)u(x,t)dx+g_0(t), \tag{2.24}$$

$$u(l,t)-\alpha_1\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\int_0^l K_1(x)u(x,t)dx+g_1(t). \tag{2.25}$$

(2.24), (2.25) nelokaliosios sąlygos sutinkamos ir jonų koncentracijos uždaviniuose [34, 35]. Tokio tipo nelokaliosios sąlygos dažnai vadinamos Robin tipo nelokaliosiomis sąlygomis.

Vienas iš naujausių nelokaliųjų sąlygų matematinių modelių yra aprašytas straipsnyje [36]. Jis susijęs su valdymu bioreaktoriuje. Sprendžiama dviejų netiesinių parabolinių lygčių sistema

$$\frac{\partial s}{\partial t}=D_S\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{V_{\max}S}{K_M+S},$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=D_P\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{V_{\max}S}{K_M+S}, \tag{2.26}$$

srityje $(x,y)\in D=\left\{0<x<\alpha,\ 0<t\le T\right\}$, su pradine sąlyga

$$S(x,0)=\begin{cases}0, & 0\le x<d,\\ S_0, & x=d,\end{cases}$$

$$P(x,0)=0,\ 0\le x\le d\ ,$$

trimis klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis

$$P(0,t)=0\,,\ \frac{\partial P(d,t)}{\partial x}=0\,,\ \frac{\partial S(0,t)}{\partial x}=0$$

ir viena nelokaliąja sąlyga

$$S(d,t)=K_i\int_0^t e(\tau)d\tau\ ;$$

čia

$$e(\tau)=Q(t)-\frac{2D_P}{m^2-n^2}\int_n^m P(x,t)dx,\ 0<n<m<d \qquad (2.27)$$

(2.26) lygčių sistema paprastai aprašomi procesai biojutikliuose ir bioreaktoriuose. Ieškomos funkcijos $S(x,t)$ ir $P(x,t)$ paprastai traktuojamos kaip substrato ir produkto koncentracija. Pagrindinis (2.27) nelokaliosios sąlygos ypatumas yra tas, kad substrato koncentracija galutiniame taške yra susiejama ne tik su integralu nuo funkcijos $P(x,t)$ t.y. produkto koncentracijos vidinio intervalo $[n,m]$ taškuose, bet ir visame intervale $(0,t)$ (priešistorija). Artimas uždavinys tik su kitomis sąlygomis aprašytas straipsnyje [37].

Čia verta pastebėti, kad nelokaliosios sąlygos gali būti ne tik pradinės, formuluojamos vietoje visų ar dalies kraštinių sąlygų, bet taip pat ir pradinės, formuluojamos vietoje įprastinės pradinės sąlygos. Pastarosios sąlygos šioje apžvalgoje nenagrinėjamos. Skaitytojui galima rekomenduoti straipsnius [38, 39].

Vienamatėms ir dvimatėms hiperbolinėms lygtims dažnai formuluojamos nelokaliosios integralinės sąlygos tokio pat tipo, kaip ir parabolinėms lygtims [40, 41, 42].

Straipsnyje [43] hiperbolinei lygčiai suformuluotos nelokaliosios sąlygos, kurių fizikinė prasmė susijusi su momentų (nulinio ir pirmojo) sąvoka ir kurios paprastai vadinamos grynai integralinėmis sąlygomis (purely integral conditions). Srityje $Q=\Omega\times(0,T],\ \Omega=\{0<x,y<1\}$ nagrinėjama integro-diferencialinė hiperbolinė lygtis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y,t)+\int_0^t a(S,t)u(x,y,S)dS$$

su įprastomis pradinėmis sąlygomis ir grynai integralinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned}&\int_0^1 u(x,y,t)dx=0, \quad \int_0^1 xu(x,y,t)dx=0,\\ &\int_0^1 u(x,y,t)dy=0, \quad \int_0^1 yu(x,y,t)dy=0.\end{aligned} \qquad (2.28)$$

(2.28) nelokaliosios sąlygos naudojamos ir su kito tipo diferencialinėmis lygtimis, pavyzdžiui, pseudoparabolinėmis [44].

Yra nemažai straipsnių, kuriuose nagrinėjami matematiniai modeliai, su dar kito tipo nelokaliosiomis sąlygomis, aprašantys realius fizikinius procesus ar reiškinius [45, 46, 47, 48, 49, 50]. Daugeliu atvejų šių modelių taikymų sritys trumpai nurodytos staipsnių pavadinimuose. Deja, daugeliu atvejų, išskyrus gal būt [48, 49], šie modeliai nesusilaukė didesnio dėmesio.

2. Nelokaliosios sąlygos. Tikrinių reikšmių uždavinys

Nauji matematiniai modeliai su nelokaliosiomis sąlygomis, aprašantys realius fizikinius procesus, skatino mokslinius tyrimus diferencialinių lygčių teorijoje ir šių lygčių skaitinių metodų modifikavimą bei naujų sprendimo metodų kūrimą. Taikant skaitinius metodus nelokaliųjų uždavinių sprendimui, gana greitai paaiškėjo, kad diferencialiniai operatoriai su nelokaliosiomis sąlygomis pasižymi daugeliu naujų savybių, nebūdingų diferencialiniams operatoriams su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis (Dirichle ar Neimano). Skyrium imant, diferencialinis operatorius netgi su gana paprastomis nelokaliosiomis sąlygomis (išskyrus keletą trivialių atvejų, pvz, periodines nelokaliąsias sąlygas) yra nesavijungis. Diferencialinių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis spektras (tikrinių reikšmių visuma) yra žymiai sudėtingesnis ir turiningesnis, negu klasikinių kraštinių sąlygų atveju. Spektro struktūra priklauso ne tik nuo nelokaliosios sąlygos pavidalo, bet ir nuo parametrų ar funkcijų nelokaliosiose sąlygose reikšmių. Tas pats galioja ir skirtuminiams operatoriams (matricoms), gaunamiems sprendžiant nelokaliuosius diferencialinius uždavinius baigtinių skirtumų metodu.

O spektro struktūra turi didelę įtaką, dažnai lemiamą, teoriškai tiriant skirtuminių schemų stabilumą bei iteracinių metodų skirtuminėms lygtims konvergavimą.

Todėl neatsitiktinai greta kraštinių uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis formulavimu ir tyrimu, prasidėjo, nors ir su tam tikru vėlavimu, diferencialinių ir skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis tikrinių reikšmių uždavinių nagrinėjimas.

Vienas pirmųjų šios krypties rezultatų paskelbtas straipsnyje [16]. Šiame straipsnyje, sprendžiant (2.6)-(2.8) kraštinį uždavinį, išnagrinėtas štai toks tikrinių reikšmių uždavinys

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0,\ 0<x<1, \tag{3.1}$$

$$u(0)=0, \tag{3.2}$$

$$\frac{du(0)}{dx}=\frac{du(1)}{dx}. \tag{3.3}$$

Šio uždavinio tikrinės reikšmės yra

$$\lambda_k=\left(2\pi k\right)^2,\ k=0,1,2,\dots, \tag{3.4}$$

o tikrinės funkcijos apibrėžiamos formulėmis

$$u_0(x)=x,\ u_k(x)=\sin(2\pi kx),\ k=1,2,\dots \tag{3.5}$$

Tikrinė funkcija $u_k(x)$, $k \geq 1$ nėra ortogonali tikrinei funkcijai $u_0(x)$, o tikrinių funkcijų visuma nėra pilna erdvėje L_2. Tikrinių funkcijų visuma nesudaro erdvės L_2 bazės. Tokią bazę galima sudaryti iš (3.5) tikrinių funkcijų ir prijungtinių funkcijų

$$\tilde{u}_k(x) = x \cdot \cos(2\pi kx),\ k = 1, 2, \ldots, \qquad (3.6)$$

kadangi kiekviena tikrinė reikšmė λ_k, $k \geq 1$ yra kartotinė, o jai atitinka tik viena tikrinė funkcija.

Straipsnyje [51] išnagrinėtas skirtuminis tikrinių reikšmių uždavinys

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (3.7)$$

$$\frac{1}{2h}\left(\gamma \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{u_N - u_{N-1}}{h}\right) + \lambda u_N = 0, \qquad (3.8)$$

$$u_0 = 0, \qquad (3.9)$$

gautas sprendžiant kraštinį uždavinį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < 1, \qquad (3.10)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad (3.11)$$

$$u(0,t) = 0,\ \gamma \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} \qquad (3.12)$$

baigtinių skirtumų metodu; čia $\gamma \in (0,1]$- duotas parametras, $h = \dfrac{1}{N}$. (3.7)-(3.8) skirtuminio uždavinio matrica yra N-osios eilės. Straipsnyje įrodyta, kad esant sąlygai $\gamma \in (0,1)$ skirtuminio uždavinio tikrinės reikšmės apibrėžiamos formulėmis

$$\lambda_{2k-1} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\left(\pi k - 0.5\varphi\right)h\right),\ k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \frac{N-1}{2}, & N - \text{nelyginis} \\ 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}, & N - \text{lyginis} \end{cases}$$

$$\lambda_{2k} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\left(\pi k + 0.5\varphi\right)h\right),\ k = \begin{cases} 0, 1, 2, \ldots, \frac{N-1}{2}, & N - \text{nelyginis} \\ 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1, & N - \text{lyginis}; \end{cases}$$

čia $\varphi = \arccos\gamma$, $0 < \varphi < \pi$.

Tuo būdu, kai $0 < \gamma < 1$, visos tikrinės reikšmės yra teigiamos ir skirtingos, o tikriniai vektoriai

$$u_{2k-1}(x_i) = \{\sin(2\pi k - \varphi)x_i\},\ i = 1, 2, \ldots, N$$

$$u_{2k}(x_i) = \{\sin(2\pi k + \varphi)x_i\},\ i = 1, 2, \ldots, N$$

yra tiesiškai nepriklausomi.

Kai $\gamma = 1$ (šiuo atveju $\varphi = 0$), skirtuminio operatoriaus spektro struktūra iš esmės skiriasi nuo atvejo $0 < \gamma < 1$. Būtent,

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2(\pi kh),\ k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \frac{N-1}{2}, & N - \text{nelyginis} \\ 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}, & N - \text{lyginis}, \end{cases}$$

be to, λ_0 ir $\lambda_{\frac{N}{2}}$ yra paprastosios (nekartotinės) tikrinės reikšmės, o kitos λ_k yra kartotinės. Kiekvienai kartotinei tikrinei reikšmei atitinka tik vienas tikrinis vektorius ir dar vienas prijungtinis vektorius. Tikrinių ir prijungtinių vektorių visuma sudaro N-matės vektorinės erdvės bazę.

Nurodysime keletą (3.7)-(3.9) skirtuminio tikrinių reikšmių uždavinio savybių, kurios būdingos daugeliui (žinoma, ne visiems) tikrinių reikšmių uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis:

1. Skirtuminio operatoriaus su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūra gali kokybiškai skirtis priklausomai nuo nelokaliųjų sąlygų parametro reikšmių.
2. Tuo atveju, kai priklausomai nuo parametro reikšmės egzistuoja kartotinės tikrinės reikšmės, paprastai, kartotinei tikrinei reikšmei atitinka tik vienas tikrinis vektorius.
3. Priklausomai nuo parametro nelokalioje sąlygoje reikšmių skirtuminių lygčių sistemos matrica gali turėti savybę: ji nesimetrinė, bet visos tikrinės reikšmės yra teigiamos ir skirtingos, o tikriniai vektoriai sudaro erdvės bazę (yra tiesiškai nepriklausomi, bet neortogonalūs).

Kiek anksčiau straipsnyje [13] buvo išnagrinėta diferencialinio uždavinio su gana paprasta Bicadzės-Samarskio nelokaliąja sąlyga

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0\,,\ 0 < x < 1, \qquad (3.13)$$

$$u(0) = 0\,,\ u(1) = \gamma u(\xi)\,,\ 0 < \xi < 1 \qquad (3.14)$$

ir atitinkamo skirtuminio uždavinio

$$\frac{u_{i-1} - 2u_1 + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (3.15)$$

$$u_0 = 0\,,\ u_N = \gamma u_m\,, \qquad (3.16)$$

spektro sruktūra; čia $h = \frac{1}{N}$, $\xi = mh$, γ ir ξ - realieji skaičiai.

(3.13)-(3.14) diferencialiniam uždaviniui įrodyta, kad lygybė

$$\gamma = \frac{1}{\xi} \qquad (3.17)$$

yra būtinoji ir pakankamoji sąlyga tam, kad egzistuotų paprastoji (nekartotinė) tikrinė reikšmė $\lambda = 0$. Analogiškai, nelygybė

$$\gamma > \frac{1}{\xi} \qquad (3.18)$$

yra vienintelės neigiamos tikrinės reikšmės būtinoji ir pakankamoji egzistavimo sąlyga. Būtent,

$$\lambda = -\beta_0^{\,2}\,,$$

čia $\beta_0 > 0$ yra vienintelė teigiama lygties

$$\frac{\sinh(\beta)}{\sinh(\beta\xi)} = \gamma$$

šaknis. Toliau, jei $\gamma < \frac{1}{\xi}$, tai visos realiosios tikrinės reikšmės yra teigiamos. Jei $|\gamma| \le 1$, tai nėra kompleksinių tikrinių reikšmių. Tačiau jei $|\gamma| > 1$, kompleksinės tikrinės reikšmės gali egzistuoti. Pateiktas pavyzdys: jei $\xi = \frac{1}{4}$, tai esant sąlygai

$$|\gamma| > \gamma_1 = \frac{4\sqrt{6}}{9} \approx 1.088$$

visuomet egzistuoja bent viena pora jungtinių kompleksinių tikrinių reikšmių. Galima nusakyti sąlygas, kada egzistuoja kartotinės tikrinės reikšmės [14].

(3.15)-(3.16) skirtuminiam uždaviniui teisingi analogiški, beveik taip pat formuluojami tvirtinimai, kaip ir (3.7)-(3.9) uždaviniui.

Iš straipsnių [13, 51] rezultatų seka ta pati išvada: diferencialinio ir skirtuminio operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūra yra gana sudėtinga ir turininga.

Straipsnyje [52] ir knygoje [14] pateikta daug papildomos informacijos apie (3.15), (3.16) uždavinio spektro struktūrą, kai $\xi = \frac{1}{2}$. Be to, straipsnyje [52] nagrinėtas ir dvimatis uždavinys.

Straipsnyje [53] išnagrinėtas skirtuminis tikrinių reikšmių uždavinys

$$\frac{u_{i-1} - 2u_1 + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{3.19}$$

$$u_0 = \gamma_1 h \left(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i \right), \tag{3.20}$$

$$u_0 = \gamma_1 h \left(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i \right), \tag{3.21}$$

$h = \frac{1}{N}$. Kai $h \ne \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, šis uždavinys gali būti užrašytas ekvivalenčiu matriciniu pavidalu

$$Au = \lambda u, \tag{3.22}$$

kuriame A yra (N-1)-osios eilės matrica, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})^{\mathrm{T}}$. Pagrindinis įrodytas rezultatas:

Jei $h \ne \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, tai visos tikrinės reikšmės yra realios. Be to [53, 54]:

a) egzistuoja vienintelė neigiama tikrinė reikšmė $\lambda < 0$ tada ir tik tada, kai $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$ ir $h < \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$;

b) $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$;

c) jei $\gamma_1+\gamma_2<2$ arba $\gamma_1+\gamma_2>2$, bet $h>\dfrac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$, tai visos tikrinės reikšmės yra teigiamos; be to, dalis tikrinių reikšmių priklauso nuo γ_1 ir γ_2, kita dalis – nepriklauso;

d) jei $h=\dfrac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$, tai (3.19)-(3.21) skirtuminis tikrinių reikšmių uždavinys negali būti užrašytas (3.22) pavidalu su (N-1)-osios eilės matrica;

e) kai $\gamma_1+\gamma_2\to\dfrac{2}{h}-0$, neigiamoji matricos A tikrinė reikšmė artėja į $-\infty$; kai $\gamma_1+\gamma_2\to\dfrac{2}{h}+0$, tai viena teigiamoji matricos A tikrinė reikšmė artėja į ∞.

Straipsniuose [55, 56] išnagrinėta diferencialinio tikrinių reikšmių uždavinio

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0,\quad 0<x<1, \tag{3.23}$$

$$u(0)=0, \tag{3.24}$$

$$u(1)=\gamma_0\int_0^{\xi}u(x)dx,\quad 0\le\xi\le1, \tag{3.25a}$$

$$u(1)=\gamma_1\int_{\xi}^{1}u(x)dx,\quad 0\le\xi\le1, \tag{3.25b}$$

spektro struktūra. Įrodyta, kad (3.23), (3.24), (3.25b) uždavinio visos tikrinės reikšmės yra realios ir paprastosios. Jei

$$\gamma_1=\frac{1}{1-\xi^2},$$

tai $\lambda=0$ yra mažiausia tikrinė reikšmė. Jei

$$\gamma_1>\frac{1}{1-\xi^2},$$

tai egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė.

(3.23), (3.24), (3.25a) uždaviniui gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

Pakankamai išsami diferencialinių ir skirtuminių operatorių su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūros tyrimų apžvalga iki 2014 metų pateikta straipsnyje [57].

Straipsnyje [58] išnagrinėtas diferencialinis tikrinių reikšmių uždavinys su nelokaliosiomis sąlygomis:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0,\ 0<x<1, \tag{3.26}$$

$$u(0)=\gamma_1 u(1), \tag{3.27}$$

$$u(\xi)=\gamma_2 u(1-\xi)\,,\quad 0<\xi<1\,. \tag{3.28}$$

ir jo skirtuminis analogas

$$\frac{u_{i-1}-2u_1+u_{i+1}}{h^2}+\lambda u_i=0\,,\; i=1,2,\ldots,N-1, \tag{3.29}$$

$$u_0=\gamma_1 u_N\,,\quad u_S=\gamma_2 u_{N-S}\,; \tag{3.30}$$

čia $h=\dfrac{1}{N}$, $\xi=Sh$, $1-\xi=(N-S)h$.

Įrodyta, kad (3.29), (3.30) skirtuminį tikrinių reišmių uždavinį negalima užrašyti matriciniu pavidalu $Au=\lambda u$. Šis uždavinys yra ekvivalentus apibendrintam matricos tikrinių reikšmių uždaviniui

$$Au=\lambda Bu \tag{3.31}$$

su išsigimusia matrica B. Dėl šios priežasties (3.29), (3.30) tikrinių reikšmių uždavinys pasižymi savybėm, kurios nebūdingos nei diferencialiniam tikrinių reikšmių uždaviniui nei matricos tikrinių reikšmių uždaviniui. Pavyzdžiui, kai $h=\xi$ ir $\gamma_1=\gamma_2\neq\pm1$, skirtuminio operatoriaus spektras yra tuščia aibė. Esant pastoviam N (3.29), (3.30) tikrinių reikšmių uždavinio tikrinių reikšmių skaičius nelygus $N-1$ (t.y. matricos A eilei), o priklausomai nuo ξ, γ_1 ir γ_2 reikšmių kinta nuo nulio iki begalybės. Šios ir kitos (3.29), (3.30) skirtuminio uždavinio savybės leidžia suformuluoti išvadą, kad skirtuminio operatoriaus su nelokaliosiomis sąlygomis tikrinių reikšmių uždavinys vertas atskiro tyrimo, nesitenkinant tik analogijomis su diferencialinio operatoriaus ar matricos tikrinių reikšmių uždaviniu.

Dar viena (3.29), (3.30) tikrinių reikšmių uždavinio savybė. Nors (3.31) tikrinių reikšmių uždavinio reikšmės yra tolydžios charakteringojo daugianario $\det(A-\lambda B)$ koeficientų funkcijos, jos gali turėti trūkį parametrų γ_1, γ_2 atžvilgiu.

Svarbu pastebėti, kad visi anksčiau išvardinti spektro struktūros tyrimų rezultatai gauti tik esant pastoviems koeficientams diferencialinėje lygtyje (nors nebūtinai vienamatėje). Diferencialiniams operatoriams su kintamais koeficientais ir nelokaliosiomis sąlygomis yra tik keletas atskirų, galima pavadinti, pirmųjų spektro tyrimų rezultatų [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65].

Straipsnyje [66] išnagrinėtas netiesinis tikrinių reikšmių uždavinys

$$\lambda\frac{d^2u}{dt^2}+f(t,u(t))\,,\quad t\in(0,1)\,, \tag{3.32}$$

$$\frac{du(0)}{dt}=0\,,\; \alpha\frac{du(\eta)}{dt}=u(1)\,,\quad 0<\eta<1\,. \tag{3.33}$$

Tai jau pakankamai kita uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis grupė.

Straipsnyje [67] pradėtas nagrinėti tikrinių reikšmių uždavinys elipsiniam operatoriui, kai viena nelokalioji sąlyga apibrėžta tik vidiniuose taškuose. Būtent, šio straipsnio rezultatai paskatino pratęsti tyrimus ir gauti naujas kokybiškas išvadas straipsnyje [58].

Dar viena pastaba. Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam ar skirtuminiam operatoriui su nelokaliosiomis sąlygomis yra bendrosios nesavijungių operatorių teorijos dalis [68].

4. Skaitiniai metodai. Skirtuminių schemų stabilumas.

Diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis kaip taikomųjų uždavinių matematinių modelių formulavimas ir nagrinėjimas smarkiai įtakojo naujus tyrimus diferencialinių lygčių teorijoje ir skaitiniuose metoduose. Susiformavo sparčiai plėtojama nauja skaičiavimo matematikos šaka – skaitiniai metodai diferencialinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis. Vienas iš gana svarbių teorinių šios šakos klausimų – parabolinių lygčių su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis skirtuminių schemų (arba skirtuminių metodų) stabilumas ir konvergavimas.

Pirmieji diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis skaitinių metodų rezultatai matematinėje spaudoje pasirodė praėjus beveik dviem dešimtmečiams po straipsnio [1] pasirodymo. Straipsnyje [9] buvo išnagrinėta neišreikštinė skirtuminė schema (1.1)-(1.4) uždaviniui spręsti su šiek-tiek modifikuota (1.4) sąlyga

$$\int_0^b u(x,t)dx = m(t). \tag{4.1}$$

Skirtuminės schemos tyrimui autoriai naudojo Ionkino transformaciją. Būtent, atsižvelgiant į (1.1) diferencialinės lygties pavidalą, (4.1) nelokalioji sąlyga pakeičiama jai ekvivalenčia sąlyga

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + m'(t). \tag{4.2}$$

Straipsnyje [69] autoriai nagrinėja baigtinių skirtumų metodą bei skirtuminį Galiorkino metodą (1.1)-(1.4) uždaviniui spręsti, kai (1.3) klasikinė kraštinė sąlyga pakeista kita sąlyga

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = g(t).$$

Skirtuminiai metodai vienamatei parabolinei lygčiai su (1.4) integraline sąlyga, kurioje viršutinis integralo rėžis yra kintamojo t funkcija, nagrinėti daugelyje straipsnių [10, 70, 71].

Skirtuminių metodų tyrimai parabolinėms lygtims su integraline sąlyga gana anksti pradėti ir Lietuvoje [28, 72].

Sprendžiant parabolinius uždavinius su (1.4) pavidalo integraline sąlyga, iš esmės beveik nebuvo kuriami nauji metodai ar naudojamos naujos tyrimų idėjos. Svarbiausia buvo naujo tipo uždaviniams pritaikyti tai, kas buvo žinoma parabolinėms lygtims su klasikinėmis sąlygomis. Galima pasakyti, kad naujos idėjos skaitiniuose metoduose atsirado taikant skirtuminius metodus (2.6)-(2.8) nelokaliam uždaviniui arba atitinkamam dvimačiam uždaviniui [17, 18, 51, 73, 74].

Pasirodo, uždaviniams su (2.7), (2.8) nelokaliosiomis sąlygomis yra gana sunku ištirti skirtuminių schemų stabilumą įprastose erdvių C ar L_2 normose. Todėl buvo apibrėžta nauja norma, labiau tinkanti skirtuminėms schemoms su nelokaliosiomis sąlygomis. Užrašykime skirtuminę schemą (n+1)-ame laiko sluoksnyje pavidalu

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = Su^n + f^n. \tag{4.3}$$

Apibrėžkime

$$\|u\|_D = \left(Du,u\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.4}$$

čia $D=\left(MM^*\right)^{-1}$- teigiamai apibrėžta simetrinė matrica, M -matrica sudaryta iš skirtuminio operatoriaus S tikrinių vektorių (jei jie sudaro vektorinės erdvės bazę) arba tikrinių ir prijungtinių vektorių. Toliau

$$(u,v) = h\sum_{i=1}^{N} u_i v_i\,,\ \|u\| = \left(u,u\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Atsižvelgiant į D išraišką, (4.4) normą galima užrašyti ir kitu pavidalu

$$\|u\|_D = \left((MM^*)^{-1}u,u\right)^{\frac{1}{2}} = \left(M^{-1}u, M^{-1}u\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|M^{-1}u\right\| \tag{4.4}$$

Komentarai apie šią normą dar bus pateikti ir vėliau. Paprastai, (4.4) pavidalu užrašyta vektoriaus norma yra vadinama matricos (ar operatoriaus) D generuota energetine norma. Kai kuriais nelokaliųjų sąlygų atvejais įrodyta, kad (4.4) norma yra ekvivalenti įprastai normai $\|u\|$:

$$\alpha(u,u) \le (Du,u) \le \beta(u,u)$$

su ekvivalentiškumo konstantomis α ir β, nepriklausančiomis nuo h.

Galima dar ir kitaip pakomentuoti čia minimuose straipsniuose įrodytą skirtuminių schemų stabilumą normoje $\|u\|_D$. Nagrinėjant skirtuminių schemų su nelokaliosiomis sąlygomis

$$u(0,t)=0\,,\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}$$

stabilumą energetinėje normoje (4.4), esminį vaidmenį vaidina matricos S spektro struktūra. Ir dar tas faktas, kad apibrėžus vektoriaus normą formule (4.4), matricos norma, suderinta su vektoriaus norma, apibrėžiama taip, kad vienai konkrečiai matricai S galioja lygybė

$$\|S\| = \rho(S) = \max_{1\le i\le N} \left|\lambda_i(S)\right|,$$

nepaisant to, kad S yra nesimetrinė matrica. Šie skiruminių metodų stabilumo tyrimo rezultatai, be minėtų mokslinių straipsnių, aprašyti dar ir knygoje [75].

O pirmą kartą skirtuminių schemų stabilumo tyrimas parabolinėms lygtims su nelokaliąja sąlyga, naudojant spektro struktūrą, tikriausiai, aprašytas straipsnyje [76]. Net keista, kad šis straipsnis beveik necituojamas.

Dar labiau naujų skaitinių metodų teorinį tyrimą įtakojo (2.13), (2.14) nelokaliosios sąlygos.

Straipsnyje [77] autorius išnagrinėjo tris skirtumines schemas šilumos laidumo lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \; x \in (0,1), \; t \in (0,T], \tag{4.5}$$

$$u(0,t) = \int_0^1 k_0(x) u(x,t) dx + g_0(t), \tag{4.6}$$

$$u(1,t) = \int_0^1 k_1(x) u(x,t) dx + g_1(t), \tag{4.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Įrodytas išreikštinės ir neišreikštinės skirtuminių schemų konvergavimas C normoje, esant apribojimams

$$\int_0^1 |k_0(x)| \, dx < 1, \; \int_0^1 |k_1(x)| \, dx < 1. \tag{4.8}$$

Crank-Nicolson skirtuminei schemai vietoje (4.8) nelygybių naudojamas kitas (realiai, silpnesnis) apribojimas

$$\left(\int_0^1 (k_0(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 (k_1(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.9}$$

(4.8) ir (4.9) sąlygos yra tik pakankamosios, bet ne būtinosios tam, kad skirtuminė schema būtų stabili.

Straipsnyje [78] nagrinėjama netiesinė parabolinė lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(k) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(u,x,t), \;\; x \in (0,1), \; t \in (0,T], \tag{4.10}$$

su (4.6), (4.7) kraštinėmis nelokaliomis sąlygomis. Uždavinys sprendžiamas šiek-tiek kitokiu skirtuminiu metodu (Galiorkino baigtinių elementų metodas). Skirtuminių schemų stabilumas įrodytas esant griežtesnei sąlygai nei (4.8)

$$\int_0^1 (k_0(x))^2 \, dx < 1, \; \int_0^1 (k_1(x))^2 \, dx < 1. \tag{4.11}$$

Straipsnyje [79], naudojant θ- metodą, įrodyta, kad Crank-Nicolson skirtuminės schemos stabilumui pakanka sąlygos

$$\int_0^1 (k_0(x))^2 \, dx + \int_0^1 (k_1(x))^2 \, dx < 2. \tag{4.12}$$

Pastaroji sąlyga yra dar bendresnė (mažesni apribojimai).

Panašūs, šiek-tiek griežtesni ar silpnesni apribojimai nelokalliųjų sąlygų pointegrinėms funkcijoms sutinkami daugelyje straipsnių [15, 33, 80, 81, 82]. Svarbu pastebėti, kad bet kurią iš (4.8)-(4.12) galima interpretuoti taip, kad skirtuminės schemos stabilumui pakanka, kad funkcijos $k_0(x)$ ir $k_1(x)$ normoje $\|k_i\|_{L_1(0,1)}$ ar $\|k_i\|_{L_2(0,1)}$ būtų „nedaug nutolusios nuo nulio“. Dar įdomesnis šitos interpretacijos laisvas perfrazavimas. Skirtuminė schema išlieka stabili, jei (4.6), (4.7) nelokaliosios sąlygos „nedaug“ skiriasi nuo Dirichle kraštinių sąlygų. Kaip jau minėta (4.8)-(4.12) sąlygų būtinumas nebuvo nagrinėtas.

Straipsnyje [83] išnagrinėtas skirtuminės schemos dvimatėms parabolinėms lygtims su integraline sąlyga, kuri yra (4.6), (4.7) sąlygų apibendrinimas dvimačiam atvejui. Sprendžiamas toks uždavinys

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \left(x,y\right)\in\Omega=\left\{x,y\in(0,1)\right\}, \tag{4.13}$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),$$

$$u(x,y,t)=\int_\Omega K(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta,\quad \left(x,y\right)\in\partial\Omega. \tag{4.14}$$

Skirtuminės schemos pakankamoji stabilumo sąlyga yra analogiška (4.8)-(4.12) sąlygoms vienamačiu aveju

$$\int_\Omega \left|K(x,y,\xi,\eta)\right|d\xi d\eta<1. \tag{4.15}$$

Analogiškas apribojimas naudojamas ir straipsnyje [84], sprendžiant n-matę netiesinę parabolinę lygtį.

Straipsnyje [53], naudojant skirtuminio operatoriaus spektro struktūrą, išnagrinėtas neišreikštinės skirtuminės schemos stabilumas (4.5)-(4.7) uždaviniui, kai $k_0(x)=\gamma_1$ ir $k_1(x)=\gamma_2$ yra konstantos. Šiuo atveju gauta stabilumo sąlyga, kuri yra gana paprasta:

$$\gamma_1+\gamma_2<2. \tag{4.16}$$

Šioje sąlygoje slypi tam tikra „kompensavimo“ idėja. Jei viena reikšmė, pvz, γ_1 yra per didelė, stabilumą gali užtikrinti (kompensuoti) tinkamas γ_2 parinkimas. Tas pats pasakytina ir apie (4.9) ir (4.12) apribojimus, bet (4.8) ir (4.11) apribojimams tai negalioja.

Šiame straipsnyje [53] skirtuminės schemos stabilumas įrodytas specialioje vektoriaus energetinėje normoje, kuri iš esmės beveik nesiskiria nuo (4.4) apibrėžimo. Būtent, imama

$$\|u\|_*=\left\|P^{-1}u\right\|_2=\left(P^{-1}u,P^{-1}u\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.17}$$

$$\|A\|_*=\left\|P^{-1}AP\right\|_2, \tag{4.18}$$

$$\|A\|_2=\max\lambda\left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}};$$

čia matrica P sudaryta iš matricos S (žr. (4.3) formulę) tikrinių vektorių. Jei matrica S turi tiesiškai nepriklausomų tikrinių vektorių sistemą, (4.4) ir (4.17) normos sutampa. Skirtumas tik tas, kad (4.4) apibrėžimas tinka ir tam atvejui, kai tikriniai vektoriai nesudaro vektorinės erdvės bazės. O apibrėžimą (4.17) galima pakeisti ir kitu

$$\|u\|_*=\left\|P^{-1}u\right\|_\infty=\max_i\left|\left(P^{-1}u\right)_i\right|,$$

atitinkamai pakeičiant ir $\|A\|_*$ apibrėžimą

$$\|A\|_*=\left\|P^{-1}AP\right\|_\infty.$$

Abiem atvejais

$$\|S\|_* = \rho(S).$$

Reikia pastebėti, kad (4.5)-(4.7) uždavinio skirtuminės matricos S tikrinės reikšmės yra skirtingos, o tikriniai vektoriai sudaro vektorinės erdvės bazę, kai $k_0(x) = const$, $k_1(x) = const$ [53].

Straipsnyje [85] išnagrinėta skirtuminio uždavinio, atitinkančio (4.5)-(4.7) diferencialiniam uždaviniui, spektro struktūra kai $k_0(x)$ ir $k_1(x)$ nėra konstantos. Išnagrinėti du konkretūs atvejai

1) $k_0(x) = 0$, $k_1(x) = \gamma_2 x$;

2) $k_0(x) = \gamma_1(1+x)$, $k_1(x) = \gamma_2(1-x)$.

Papildant teorinius spektro struktūros tyrimus skaitiniu eksperimentu, sudarytos skirtuminės schemos stabilumo sritys, kurias pakankamai įdomu palyginti su stabilumo sritimis, gautomis sutinkamai su (4.12) pavidalo apribojimais.

Spektro stuktūros tyrimo metodika skirtuminės schemos stabilumui tirti naudota ir straipsnyje [86]. Čia funkcijos $k_0(x)$ ir $k_1(x)$ paimtos iš termotamprumo teorijos uždavinio [20]. Matricos spektro struktūra išnagrinėta teoriškai, atsižvelgiant į konkrečias $k_0(x)$ ir $k_1(x)$ išraiškas. Teoriniai tyrimai papildyti skaitinio eksperimento rezultatais.

Iš tyrimų, atliktų straipsniuose [85, 86], galima padaryti išvadą, kad skirtuminio uždavinio matricos spektro struktūros tyrimas gali būti efektyvi metodikos dalis skirtuminės schemos stabilumo klausimuose.

Skirtuminių schemų stabilumo tyrimai, naudojant matricos spektro struktūrą, atlikti ir kito tipo diferencialinėms lygtis, kai (4.6), (4.7) sąlygose koeficientai yra konstantos.

Būtent, taip buvo ištirtas skirtuminės schemos stabilumas pseudoparabolinei lygčiai [87], hiperbolinėms lygtims [54, 88] ir diffencialinėms lygtims su kompleksiniais koeficientais [74, 89, 90].

Straipsnyje [91] išnagrinėtas skirtuminės schemos stabilumas vienamatei parabolinei lygčiai su Robin tipo nelokaliosiomis sąlygomis:

$$\theta_1 u(0,t) - \sigma_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \gamma_1 \int_0^1 \alpha(x) u(x) dx + \mu_1(t), \tag{4.19}$$

$$\theta_2 u(1,t) - \sigma_2 \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \gamma_2 \int_0^1 \beta(x) u(x) dx + \mu_2(t). \tag{4.20}$$

Skyrelio pabaigai dar keletas pastabų apie skirtuminių schemų stabilumą parabolinėms lytims su (4.6), (4.7) nelokaliosiomis sąlygomis. Kai $k_0(x)$ ir $k_1(x)$ yra funkcijos, tai (4.9) ir (4.12) nelygyės yra pakankamosios skirtuminės shcemos stabilumo sąlygos. Kai $k_0(x) = \gamma_1$ ir $k_1(x) = \gamma_2$ yra konstantos, tai skirtuminės schemos (4.16) sąlygą $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$ galima interpretuoti kaip būtinąją ir pakankamąją stabilumo sąlygą (tiksliau reikėtų rašyti $\gamma_1+\gamma_2 \le 2$). Aptarkime šį klausimą plačiau.

Ištikrųjų, kai $\gamma_1+\gamma_2 > 2$, egzistuoja viena neigiama matricos S tikrinė reikšmė $\lambda_1 < 0$. Pažymėkime šiai tikrinei reikšmei atitinkantį tikrinį vektorių $X^{(1)} = \left\{X_i^{(1)}\right\}$. Užrašykime (4.3) uždavinio (kai $f^n = 0$) su pradine sąlyga $u_i^0 = X_i^{(1)} T^0$, T^0 - konstanta, sprendinį Furje metodu

$$u_i^n = (1-\tau\lambda_1)^n T^0 X_i^{(1)} \approx e^{-\lambda_1 t^n} T^0 X_i^{(1)}, \tag{4.21}$$

čia $t^n = n\tau$. Iš čia seka išvada: jei $\lambda_1 < 0$, tai $(1-\tau\lambda_1)^n$ neaprėžtai ir gana greitai artėja į ∞, kai n didėja. Daugiau informacijos šiuo klausimu galima rasti straipsniuose [74, 90] ir kngoje [92, V sk., § 1.4].

Nepaisant šios išvados, laikas nuo laiko matematiniuose žurnaluose pasirodo straipsniai, kuriuose formuluojamos skirtuminių schemų stabilumo sąlygos, kuriuose nėra jokių apribojimų (4.6) ir (4.7) išraiškų pointegrinėms funkcijoms $k_0(x)$ ir $k_1(x)$ [93, 94, 95].

Viena tokios situacijos priežasčių yra gana paprasta. „Stabilumas – sąvoka, neturinti tiksliai apibrėžto turinio“ – taip prasideda (kad ir kaip bebūtų keista) straipsnis apie vieną iš labai svarbių sąvokų matematikoje, apie stabilumą, solidžioje 5 tomų matematikos enciklopedijoje [96].

Apibrėžiant skirtuminių schemų stabilumą vadovėliuose ir monografijose, gana dažnai neužakcentuojama, ar konstantos įverčiuose ir nelygybėse, nusakančiose stabilumą, gali priklausyti nuo intervalo $[0,T]$ ar turi būti aprėžtos visoms t reikšmėms. Tuo atveju, kai kalbama apie konkretų baigtinį intervalą $[0,T]$, tai formaliai daugiklis $e^{-\lambda T}$, $\lambda < 0$, visada yra aprėžtas. Tada paklaidos įvertyje daugiklis $e^{-\lambda T}$ formaliai gali būti kompencuotas τ ar h mažumu. Jei konkrečiam uždaviniui τ ar h turėtų būti nepateisinamai maži (pvz. 10^{-30} eilės), galime interpretuoti, kad tai ne stabilumo problema, o šiuolaikinių kompiuterių ribotumas. Pavyzdžiui, taip diskusijoje su šių eilučių autoriumi, stabilumą $\lambda < 0$ atveju aiškina straipsnio [95] autorius. Paprasti skaitiniai eksperimentai parodo, kad kalbėti apie stabilumą $\lambda < 0$ atveju yra rizikinga [97]. Pastebėsime, kad diferencialinių lygčių teorijoje apibrėžiant stabilumo sąvoką (stabilumas pagal Liapunovą) aiškiai akcentuojama, kad įverčiai turi būti teisingi visoms t reikšmėms intervale $[0,\infty)$.

Ir dar viena pastaba apie (4.9) ir (4.12) stabilumo sąlygų pakankamumą. Kai $k_0(x) \ge 0$ ir $k_1(x) \ge 0$, šios abi sąlygos tam tikra prasme kokybiškai nedaug skiriasi nuo sąlygos $\gamma_1+\gamma_2 < 2$, kuri teisinga, kai $k_0(x)=\gamma_1$ ir $k_1(x)=\gamma_2$ yra konstantos. Tačiau tuo atveju, kai $k_0(x) \le 0$, $k_1(x) \le 0$, stabilumo sąlygos (4.9) ir (4.12) gali labai skirtis nuo sąlygos $\gamma_1+\gamma_2 < 2$. Todėl galima suformuluoti tokį uždavinį: kaip rasti bendresnio pavidalo pakankamas skirtuminės schemos stabilumo sąlygas, kai $k_0(x) \le 0$ ir $k_1(x) \le 0$.

5. Skaitiniai metodai. Kintamųjų krypčių metodas.

Dvimatėms parbolinėms ir elipsinėms lygtims su klasikinėmis sąlygomis spręsti buvo sukurti efektyvūs kintamųjų krypčių metodai (KKM) [98, 99]. Kiek vėliau kaip KKM modifikacija atsirado lokaliai vienamačiai metodai (LVM) [92]. Paprastai KKM sudaromas skirtuminių schemų pagrindu. Norint surasti artutinį sprendinį u_{ij}^{n+1}, šiuo metodu reikia spręsti tik vienamačius uždavinius. Paprastai, pirmiausia surandamas tarpinis sprendinys $u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ sprendžiant N-1 kartų vienamatį uždavinį viena koordinatine kryptimi, po to, randamas sprendinys u_{ij}^{n+1}, sprendžiant vienamačius uždavinius kita koordinatine kryptimi. Iš čia kilęs metodo pavadinimas.

Pirmieji rezultatai apie šių metodų taikymą uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis, autoriaus žiniomis, paskelbti straipsniuose [100, 101]. Šiuose straipsniuose nagrinėtos (2.20)-(2.22) uždavinyje suformuluotos nelokaliosios sąlygos. Tiesa, kiek anksčiau buvo keletas publikacijų panašia tematika [102, 103], tačiau iš esmės tai nebuvo KKM tikrąja prasme. Ir dar pastebėsime, kad šiuose straipsniuose dominavo algoritminė metodo dalis, be išsamesnių įrodymų apie metodo stabilumą ar konvergavimą. Pastarieji teoriniai klausimai nagrinėti straipsnyje [104].

Straipsniuose [105, 106] KKM ir LVM apibendrinti trimatėms parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis.

Peaceman-Rachford KKM dvimatei parabolinei lygčiai su nelokaliąja Bicadzes-Samarskio sąlyga

$$u(1,y,t)=\gamma u(\xi,y,t)+\mu(y,t), \tag{5.1}$$

kurioje γ ir ξ $\left(0<\xi<1\right)$ duoti realieji skaičiai, išnagrinėtas straipsnyje [107]. Šiame straipsnyje, tikriausiai, pirmą kartą uždaviniams su nelokaliąja sąlyga KKM stabilumas išnagrinėtas remiantis skirtuminio operatoriaus spektro struktūra.

Kintamųjų krypčių metodo klasikinių kraštinių sąlygų atveju stabilumas ir konvergavimas įrodytas [98], kai matricos A_1 ir A_2 (paprasčiausiu atveju, tai $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ir $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ skirtuminiai analogai, atsižvelgiant į kraštines sąlygas) yra simetrinės, teigiamai apibrėžtos ir turi tą pačią tikrinių vektorių sistemą. Iš šių prielaidų seka ir matricų komutatyvumas: $A_1A_2=A_2A_1$. Uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis matricos A_1 ir A_2 nėra simetrinės. Straipsnyje [107] įrodyta, kad KKM stabilumui užtenka sąlygų

$$\lambda\left(A_1\right)>0,\ \lambda\left(A_2\right)>0,\ A_1A_2=A_2A_1. \tag{5.2}$$

O šios sąlygos daugeliui uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis būna išpildytos.

Ištikrųjų, vietoje sąlygos $\lambda\left(A_i\right)>0$ užtenka sąlygos $\operatorname{Re}\lambda\left(A_i\right)>0$, $i=1,2$.

Tokia pat metodika įrodytas KKM stabilumas dvimatei parabolinei lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis [108]:

$$u(0,y,t)=\gamma_1\int_0^1 u(x,y,t)dx+\mu_1(y,t)\,, \tag{5.3}$$

$$u(1,y,t)=\gamma_2\int_0^1 u(x,y,t)dx+\mu_2(y,t)\,. \tag{5.4}$$

Straipsnyje [109] LVM stabilumas išnagrinėtas dvimatei parabolinei lygčiai su nelokaliąja sąlyga

$$u(x,0,t)=\gamma(x)\iint_{\Omega} u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta+\mu(x,t)\,. \tag{5.5}$$

Įrodymo metodika remiasi matricos spektro tyrimu.

Elipsinėms lygtims kintamųjų krypčių Peaceman-Rachford metodo konvergavimas nagrinėtas straipsniuose [110, 111]. Įrodymas, vėlgi grįstas matricos spektro tyrimu. Šiuose straipsniuose nagrinėta Puasono lygtis su tokio tipo nelokaliosiomis sąlygomis

$$u(0,y)=\gamma_0\int_0^l \alpha(x)u(x,y)dx+v_1(y)\,, \tag{5.6}$$

$$u(l,y)=\gamma_1\int_0^l \beta(x)u(x,y)dx+v_2(y)\,. \tag{5.7}$$

Išnagrinėti atvejai, kai $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ yra kostantos arba konkrečios išraiškos funkcijos.

Straipsnyje [112] KKM nagrinėjamas netiesinei elipsinei lygčiai su (5.6) ir (5.7) sąlygomis, kuriose $\alpha(x)=\beta(x)=1$.

Elipsinėms ar parabolinėms lygtims su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis KKM teoriškai išnagrinėtas ir esant mažesnėms matricų A_1 ir A_2 apribojimams [92]. Pavyzdžiui, vietoje prielaidos „A_1 ir A_2 yra simetrinės teigiamai apibrėžtos matricos“ imama kita mažiau ribojanti prielaida: $\left(A_i x,x\right)>\alpha_i(x,x)$, $\alpha_i>0$, $i=1,2$. Įdomi detalė. Daugeliui uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis yra teisingos nelygybės $\lambda(A_1)>0$ ir $\lambda(A_2)>0$, be to, A_1 ir A_2 turi tą pačią tikrinių vektorių sistemą. Palyginkime matricų savybes $\left(Ax,x\right)>0$ ir $\lambda(A)>0$. Gerai žinoma, kad simetrinėms matricoms šios dvi savybės ekvivalenčios. Tačiau nesimetrinėms matricoms nelygybę $\left(Ax,x\right)>0$ reikia interpretuoti, kaip griežtesnį apribojimą už nelygybę $\lambda(A)>0$. Kitaip tariant, jei nesimetrinei matricai $\left(Ax,x\right)>0$ visiems realiems vektoriams X ir matricoms A visos tikrinės reikšmės yra realios, tai iš $\left(Ax,x\right)>0$ seka $\lambda(A)>0$. Jei nesimetrinės matricos visos tikrinės reikšmės yra teigiamos, tai iš $\lambda(A)>0$ neseka $\left(Ax,x\right)>0$. O tarp nelokaliųjų uždavinių yra klasė uždavinių, kuriuos sprendžiant skirtuminiu metodu gauname: A - nesimetrinė ir visos tikrinės reikšmės teigiamos $\lambda(A)>0$.

Skirtuminių lygčių sistemai, gautai iš elipsinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis, spręsti buvo nagrinėti ir kiti iteraciniai metodai [113, 114, 115].

6. Išvados, apibendrinimai ir truputis (ne)rimtos filosofijos

Kraštinių uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis formulavimas fizikoje, mechanikoje, biochemijoje įtakojo naujus matematinius tyrimus diferencialinių lygčių teorijoje ir skaitiniuose metoduose. Pradžioje skaitiniuose metoduose bene daugiausia dėmesio buvo skiriama šilumos laidumo ir termotamprumo uždaviniams. Vėliau tyrimai buvo plėtojami vis kitoms diferencialinėms lygtims su vis įvairesnėmis nelokaliosiomis sąlygomis, dažnai nesusiejant tyrimų su taikymais. Taip pamažu atsirado kitas veiksnys, įtakojantis į tyrimų turinį. Tai teorinis apibendrinimas arba vidiniai matematikos poreikiai. Pateikiu du konkrečius pavyzdžius. Sprendžiant elipsines ar parabolines lygtis su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis skirtuminiais metodais, išryškėjo čia atsirandančių matricų vaidmuo. Simetrinės teigiamos apibrėžtos matricos tapo svarbia metodine skaitinių metodų teorijos priemone. Kitas dažnai pasitaikančios matricos pavidalas – diagonaliai vyraujančios matricos. O skirtuminių lygčių sistemoje, užrašytoje elipsinėms ar parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis, matrica gana dažnai pasižymi štai tokiomis savybėmis:

1) matrica nėra nei simetrinė, nei diagonaliai vyraujanti;
2) matricos visos tikrinės reikšmės yra teigiamos, o tikriniai vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi (bet ne ortogonalūs).

Pastebėkime, kol buvo nagrinėjamos tik klasikinės kraštinės sąlygos, tokios matricos savybės atrodė gana dirbtinai, neaišku, kokiems realiems uždaviniams jos būdingos. Taip skaitiniuose metoduose atsirado „vidinis matematikos poreikis“ nagrinėti skirtuminių schemų stabilumą ar iteracinių metodų konvergavimą, būtent, su tokiomis matricos savybėmis.

Antras pavyzdys. Uždaviniuose su nelokaliosiomis sąlygomis atsirado ir kiek kitokio pavidalo matricos, pasižyminčios kiek kitokiomis savybėmis:

1) matrica yra nesimetrinė ir ne diagonaliai vyraujanti;
2) $a_{ii} > 0$, $a_{ij} \le 0$, $i \ne j$;
3) $\mathrm{Re}\,\lambda(A) > 0$.

Tai jau žinomas matricų tipas – tai M-matricos. Šios matricos sutinkamos daugelyje taikomosios matematikos sričių – matematinėje ekonomikoje (Leontjevo pusiausvyros modelis), tikimybių teorijoje (Markovo grandinės), finansų matematikoje, operacijų tyrime, populiacijų dinamikoje ir t.t. M-matricos randa taikymų skirtuminiuose metoduose diferencialinėms lygtims su klasikinėmis sąlygomis [116]. Tačiau įsigilinus į M-matricų taikymus skirtuminiuose metoduose, aprašytus knygoje [116], peršasi išvada, kad klasikinių sąlygų atveju M-matricos suteikia galimybę kitaip interpretuoti rezultatus, kuriuos galima gauti ir kitais metodais. O uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis M-matricos yra naujas metodas naujiems rezultatams gauti, skyrium imant, tiriant iteracinių metodų konvergavimą bei skirtuminių metodų konvergavimą [113, 114, 117, 118].

Todėl ir galima paminėti kaip vidinį matematikos poreikį – atlikti naujus tyrimus skaitiniuose metoduose, susijusius su M-matricomis. Apart iteracinių metodų bei baigtinių skirtumų metodo konvergavimo, paminėsime dar vieną kryptį, susijusia su M-matricomis. Viena iš M-matricų savybių yra $\mathrm{Re}\,\lambda(A) > 0$. A. Štikono ir jo doktorantų darbuose sudaryta originali metodika diferencialinių ir skirtuminių operatorių spektro stuktūrai tirti. Pagal šią metodiką nagrinėjant spektro stuktūrą su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis, neabejotinai daugeliu atveju galima atsakyti į klausimą: su kokiomis nelokaliųjų sąlygų parametrų reikšmėmis egzistuoja (ar neegzistuoja) kompleksinės tikrinės reikšmės su savybe $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

Uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis skirtuminiuose metoduose pamažu ryškėjo tendencija – kuo daugiau pagrindimo ir kartu vis mažiau realių taikymų. Skaitinis eksperimentas, kaip taisyklė, atliekamas ne su realiais, o tik su iliustraciniais pavyzdžiais. Logiška manyti, kad tai tik laikina tendencija. Artimiausiais dešimtmečiais susidariusi niša tarp realių taikomųjų uždavinių ir skaitinių metodų teorijos turėtų būti pamažu užpildoma.

Kaip jau buvo minėta, įvairūs teoriniai skaitinių metodų klausimai, pavyzdžiui, skirtuminių schemų stabilumas, gana dažnai priklauso ne tik ir ne tiek nuo nelokaliųjų sąlygų pavidalo (kraštinės integralinės, grynai integralinės, taškinės, tiksliau, dvitaškės ar daugiataškės, Bicadzės-Samarskio ar pan.), kiek nuo funkcijų ar parametrų, esančių nelokaliosiose sąlygose, reikšmių. Todėl natūralu manyti, kad nelokaliąsias sąlygas galima klasifikuoti ne tik pagal jų pavidalą, bet ir pagal jų „nelokalumo“ matą – kiek kokybiškai ar kiekybiškai šie uždaviniai skiriasi nuo uždavinių su klasikinėmis sąlygomis.

Daugeliui parabolinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis galima nustatyti nelokaliųjų sąlygų parametrų reikšmes, nusakančias skirtuminės schemos stabilumo ir nestabilumo sritis. Antai, (4.5)-(4.7) uždaviniui, kai $k_0(x) = \gamma_1$ ir $k_1(x) = \gamma_2$, stabilumo ir nestabilumo sritis priklausomai nuo γ_1 ir γ_2 reikšmių, skiria sąlyga

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2.$$

Kai $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$, skirtuminė schema yra nestabili. Ir nestabili ji ne todėl, kad mes nemokame sudaryti stabilios, o todėl, kad ir diferencialinis uždavinys yra nestabilus. Panašiais atvejais visuomet iškyla klausimas: ar diferencialinis uždavinys turi fizikinę prasmę, kai $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$. Taigi, nagrinėdami diferencialines lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis, mes susiduriame su nekorektiškais (arba nekorektiškai suformuluotais) diferencialiniais ir skirtuminiais uždaviniais. Šie uždaviniai pasižymi trimis savybėmis (gali būti ir sudėtingesni atvejai):

1) Sprendinys egzistuoja;
2) Sprendinys vienintelis;
3) Uždavinys nestabilus.

Taigi, natūraliai egzistuoja toks klausimas: ar, apskritai, fizikine prasme reikia spręsti nestabilų uždavinį? Vieną iš galimų atsakymų galima rasti ir matematinėje enciklopedijoje [96, T.3] straipsnyje „Nekorektiški uždaviniai“, kurio autoriai yra pasaulyje pripažinti nekorektiškų uždavinių ekspertai V. Arseninas ir A. Tichonovas. Citata: „Nekorektiškų uždavinių sąvoka priklauso Ž. Adamarui (J. Hadamard, 1923), pareiškusiam, kad bet kuris matematinis uždavinys, atitinkantis kuriam nors fizikiniam ar techniniam uždaviniui, turi būti korektiškas. Ištikrųjų, kokią fizikinę interpretaciją galima suteikti sprendiniui, jei kaip norimai mažiems išeities duomenų pokyčiams gali atitikti dideli sprendinio pokyčiai? Tokiems uždaviniams sunku taikyti apytikslius sprendimo metodus. Tačiau toks požiūris, natūralus kalbant apie tam tikrus reiškinius, kintančius laike, negali būti perkeltas visiems uždaviniams“. Toliau autoriai išvardija keliolika konkrečių matematikos, fizikos ir technikos nekorektiškų uždavinių, tame skaičiuje, valdymo uždavinius, aprašomus diferencialinėmis lygtimis.

Taigi, kalbant apie diferencialines lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis, lieka atviras klausimas apie uždavinio fiziškumo ir stabilumo sąryšį. Ir dalinis šio klausimo formulavimas: kaip spręsti diferencialinę lygtį su nelokaliąja sąlyga, kai diferencialinis uždavinys yra nekorektiškai suformuluotas.

Galima teigti, kad nors ir lėtai, bet kryptingai kuriama bendroji nelokaliųjų uždavinių skaitinių metodų teorija. Prie jos kūrimo prisideda ir Lietuvos matematikai. Diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis skaitiniai sprendimo metodai Lietuvoje šiuo metu yra bene aktyviausiai plėtojama skaičiavimo matematikos sritis. Šioje srityje šiuo metu dirbančių (rašančių mokslinius straipsnius) mokslininkų Lietuvoje yra apie 20. Įdomu, kad nemažiau kaip 14 Lietuvos matematikų daktaro (iki 1992 m. kandidato) disertacijas apgynė iš diferencialinių lygčių sprendimo metodų srities, kai dominuojančios buvo, būtent, nelokaliosios sąlygos. Tai R. Čiegis (1985), V. Būda (1987), R. Čiupaila (1992), O. Suboč (2002), S. Pečiulytė (2007), Ž. Jesevičiūtė (2011), J. Jachimavičienė (2013) K. Jakubėlienė (2013), S. Sajavičius (2013), J. Novickij (2016), A. Skučaite (2016), G. Paukštaitė (2018), K. Bingelė (2019).

Dar viena detalė. Lietuvoje diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis skaitinių metodų tyrimai (gana originalūs) prasidėjo praeito šimtmečio aštunto dešintmečio pabaigoje. Šiuos tyrimus paskatino du praktiniai uždaviniai: elektros kontakto iš skysto metalo konstravimas (K. Ragulskis) ir priemaišų difuzijos puslaidininkinėje medžiagoje valdymas (D. Zanevičius). Pirmuosius mokslinius rezultatus Lietuvos matematikai pagal susiklosčiusią tuo metu tvarką, tradicijas ir galimybes, skelbė rusų kalba, dažnai vietiniuose pasauliniu mąstu nereikšminguose leidiniuose. Todėl pirmieji Lietuvos matematikų rezultatai apie nelokaliuosius uždavinius užsienio mokslininkams liko nežinomi, neprieinami ir necituojami. Situacija iš esmės pasikeitė maždaug paskutinio praeito amžiaus dešimtmečio antroje pusėje, kai du žurnalai „Lithuanian Mathematical Journal“ ir „Differential equations“ Springer leidykloje buvo verčiami į anglų kalbą. Maždaug tuo metu Lietuvos matematikai mokslinius straipsnius vis dažniau pradėjo rašyti anglų kalba ir spausdinti juos įvairiuose užsienio žurnaluose. Šiuo metu Lietuvos autorių darbai iš nelokaliųjų uždavinių skaitinių metodų srities pasauliui prieinami ir žinomi lygiai taip, kaip ir kitų šalių matematikų darbai.

Ir pabaigai. Šioje apžvalgoje įvairūs vertinimai, palyginimai, komentarai bei kritinės pastabos yra tik autoriaus nuomonė ir, aišku, gali būti diskutuojami. Rašydamas šią apžvalgą, autorius prisilaikė požiūrio ir formos, būdingos pranešimams moksliniuose seminaruose, kuriuose diskusija yra viena priimtiniausių mokslinės informacijos pateikimo formų.

Literatūra

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.,* 1963, v.21, pp. 155-160.
2. Beals R. W. Nonlocal elliptic boundary value problems. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 1964, v.70, pp.693-696.
3. Deckert K. I., Maple C. G. Solution for diffusion with integral type boundary conditions. *Proc. Iowa. Acad. Sci.,* 1963, v.70, pp.354-361.
4. Kamynin L. I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with nonclassical boundary a conditions. *Comp. Math. Math. Phys.,* 1964, v.6, No4, pp.1006-1024.
5. Kvedaras B. V., Kibenko A. V., Perov A. I. On some boundary-value problems. *Lit. Mat. Sb.,* 1965, v.5, No1, pp.69-84.
6. Picone M. Su un problema al contorno nelle equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sc.,* 1908, v.10, pp.1-95.
7. Tamarkin J. D. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions. *Math. Z.,* 1928, vol.27, pp.1-54.
8. Whyburn W. M. Differential equations with general boundary conditions. *Bull. Amer. Math. Soc.,*1942, v.48, pp.692-704.
9. Cannon J. R., J. van der Hoek, Inplicit finite difference scheme for the diffusion of mass in porous media. In B. J. Noye (Ed), *Numerical Solutions of Partial Differential Equations, North Holland,* 1982, pp.527-539.
10. Cannon J. R., J. van der Hoek. Diffusion subject to specification of mass. *J. Math. Anal. Appl.,* 1986, v.115, pp.517-529.
11. Cannon J. R., Lin Y., Matheson A. L. The solution of the diffusion equation in two-space variables subject to specification of mass. Appl. Anal. J., 1993, v.50, pp.1-19.
12. Bitsadze A. V. Samarskii A. A. Some elementary generalization of linear elliptic boundary value problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 1969, v.185, pp.739-740.
13. Sapagovas M. P., Štikonas A. D. On the structure of the spectrum of a differential operator with a nonlocal condition. *Differ. Equat.,* 2005, v.41, No7, pp.1010-1018.
14. Sapagovas M. Diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis, 2007, Vilnius, „Mokslo aidai“, 268p.
15. Ashyralyev A., Ozturk E. On a difference scheme of second order of accuracy for the Bitsadze-Samarski type nonlocal boundary-value problem. *Bound. Value Probl.,* 2014, v.2014(14), pp.1-19.
16. Ionkin N. I. Solution of one boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differ. Equat.,* 1977, v.13, No2, pp.204-211.
17. Gulin A. V., Ionkin N. I., Morozova V. A. Study of the norm in stability problems for nonlocal difference schemes. *Differ. Equat.,*2006, v.42, No7, pp.974-984.

18. Gulin A. V., Ionkin N. I., Morozova V. A. Stability of a nonlocal two-dimensional finite-difference problem. *Differ. Equat.*, 2001, v.37, No7, pp.970-978.
19. Day W. A. Existence of a property of solutions of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories. *Quart. Appl. Math.*, 1982, v.40, pp.319-330.
20. Day W. A. A decreasing property of solution of a parabolic equation with application to thermoelasticity. *Quart. Appl. Math.*, 1983, v.41, pp.468-475.
21. Sapagovas M. P. The numerical method for the solution of the problem on the equilibrium of a drop of liquid. *Comput. Math., Banach Center Publ.*, PWN, Warsaw, 1984, v.13, pp.45-59.
22. Sapagovas M. P. The determination of free surface of the drop by finite elements method. *Variac. Roznost. Metod. Math. Phys.*, Novosibirsk, 1978, pp.117-128.
23. Sapagovas M. P. Investigation of nonclassical drop equation. *Diff. Equat.*, 1983, vol.19, No7, pp.1271-1276.
24. Ragulskis K., Sapagovas M., Čiupaila R., Jurkulnevičius A. Numerical experiment in stationary problems of liquid-metal contacts. *Vibrotechnika*, 1986, vol.4(57), pp.105-111.
25. Zareckas V.-S. S., Kulakauskas A. K., Jurkulnevičius A. A. On liquid-metal contacts of the third generation. *Vibrotechnika*, 1975, vol.3(24), pp.57-60.
26. Cannon J. R., Lin Y. An inverse problem of finding a parameter in a semilinear heat equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 1990, vol.145(2), pp.470-484.
27. Dehgham M. An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation. *Appl. Math. Model.*, 2001, vol.25, pp.743-754.
28. Čiegis R. The solution of two-dimensional heat conduction problem with nonlocal boundary condition. *Differ. Equat. And their Appl.* 1984, Vilnius, IMC, vol.35, pp.74-82.
29. Būda V., Sapagovas M., Čiegis R. Two-dimensional model of nonlinear diffusion. *Matem. i Mashin. Metody v Microelektr., Vilnius, PFI,* 1985, pp.36-43.
30. Būda V., Čiegis R. The mathematical model of the implantation-diffusion process in solid. *Matem. i Mashin. Matody v Microelektr., Vilnius, PFI,*1987, pp.28-31.
31. Schùgerl K. Bioreaction Engineering: Reactions Involving Microorganisms ans Cells. Vol.1. Fundamentals, Thermodinamics, Formal Kinetics, Idealized Reactor Types and Operation Modes, *John Wiley and Sons Lmd*, 1987.
32. Nakhushev A. M. The Equations Of Mathematical Biology, Moscow, 1995 (in Russian).
33. Pao C. V. Numerical solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *J. Comp. Appl. Math.*, 2001, vol.136, pp.227-243.
34. Yin H.-M. On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, vol.294, pp.712-728.
35. McGill P., Schumaker M. F. Boundary conditions for single-ion diffusion. *Biophys. J.*, 1996, v.71, pp.1723-1742.
36. Ivanauskas F., Laurinavičius V., Sapagovas M., Nečiporenko A. Reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition subject to PID-controlled bioreactor. *Nonlin. Anal. Model. Centr.*, 2017, vol.22, No2, pp.261-272.

37. Čiegis R., Subоč O., Čiegis R. Numerical simulation of nonlocal delayed feetback controller for simple bioreactors. *Informatica,* 2018, vol.29, No2, pp.233-249.
38. Dezin A. A. On the theory of operators of the type d/det-A. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.,* 1965, vol.164, pp.963-966.
39. Makarov V. L., Sytnyk D., Vasylyk V. Egzistence of the solution to a nonlocal-in-time evolution problem. *Nonlin. Anal. Model. Contr.,* 2014, vol.19, No3, pp.432-447.
40. Kozhanov A. I., Pul‘kina L. S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimension hyperbolic equations. *Differ. Equat.,* 2006, vol.42, No.9, pp.1233-1246.
41. Shakeri F., Dehgham M. The method of lines for solution of the one-dimensional wave equation subject to an integral conversation condition. *Comp. Math, Appl.,* 2008, vol.56, pp.2175-2188.
42. Gordeziani D. G., Avalishvili G. A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations. *Matem. Modelir.,* 2002, vol.12, No.1, pp.94-103.
43. Merad A., Martin-Vaguero J. A Galerkin method for two-dimensional hyperbolic integro-differential equation with purely integral conditions. *Appl. Math. Comput.,* 2016, vol.291, pp.388-394.
44. Bouziani A., Merazga N. Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral condition. *Electr. J. Differ. Equat.,* 2006, vol.115, pp.1-18.
45. Diaz J. I. On a nonlocal elliptic problem arising in the magnetic confinement of a plasma in a stellarator. *Nonlin. Anal. Theor. Meth. Applic.* 1997, vol.30, No.7, pp.3963-3974.
46. Meir S. J., Yavneh I. An elliptic problem with integral constraints with application to large-scale geophysical flows. *Comput. Geoscien.,* 1998, vol.2, pp.337-346.
47. Choi Y. S. Chan K.-Y. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry. Nonlin. Anal. Theor. Meth. Appli., 1992, vol.18, No.4, pp.317-331.
48. Kalna G., MCKee S. The thermostat problem with a nonlocal boundary condition. *IMA J. Appl. Math.,* 2004, vol.69, pp.437-462.
49. Nakhushev A. M. On certain approximate method for boundary-value problems for differential equations and its application in ground waters dynamics. *Diff. Equat.,* 1982, vol.18, No.1, pp.72-81.
50. Xu. Z., Han H., Wu X. Adaptive absorbing boundary conditions for Sehrödinger-type equations: application to nonlinear and multi-dimensional problems. *J. Comp. Phys.,* 2007, vol.225, pp.1577-1589.
51. Gulin A., Ionkin N., Morozova V. Stability criterion of difference schemes for the heat conduction equation with nonlocal conditions. Comput. Meth. Appl. Math., 2006, vol.6, No.1, pp.31-55.
52. Ivanauskas F., Meškauskas T., Sapagovas M. Stability of difference schemes for two-dimensional parabolic equations with non-local boundary conditions. *Appl. Math. Comput.,* 2009, vol.215, No.7, pp.2716-2732.

53. Sapagovas M. On the stability of finite-difference schemes for one-dimensional parabolic equations subject to integral conditions. *Zh. Vychisl. Prikl. Math.,* 2005, No.92, pp.70-90.
54. Novickij J., Štikonas A. On the stability of a weighted finite difference for wave equation with nonlocal boundary conditions. *Nonlin. Anal. Model. Contr.,* 2014, vol.19, No.3, pp.460-475.
55. Pečiulytė S., Štikonienė O., Štikonas A. Sturm-Lioville problem for stationary difference operator with nonlocal integral boundary condition. *Math. Model. Anal.,* 2005, vol.10, No.4, pp.377-392.
56. Pečiulytė S., Štikonienė O., Štikonas A. Sturm-Liouville problems for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. *In: R. Čiegis (Ed.), Proceedings of the 10th Intern. Conf. MMA 2005 & CMAM2, Vilnius, Technika,* 2005, pp.199-204.
57. Štikonas A. A survey on stationary problems, Green‘s functions and spectrum of Sturm-Liouville problem with nonlocal boundary conditions. *Nonlin. Anal. Model. Control.,* 2014, vol.16, No.3, pp.301-334.
58. Sapagovas M., Čiupaila R., Jakubėlienė K., Rutkauskas S. A new eigenvalue problem for the difference operator with nonlocal conditions. *Nonlin. Anal. Model. Control.,* 2019, vol.24, No.3, pp.462-484.
59. Shkalikov A. A. Bases formed by eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions. *Vestnik Moskovsk. Univor., Ser.1. Matem. Mechan.,* 1982, vol..6, pp.12-21.
60. Il‘in V. A. On a connection between the form of the boundary conditions and the basis property of eiquiconvergence with a trigonometric series of expansions in root functions of a nonselfadjoint differential operators. *Differ. Equat.,* 1994, vol.30, No.9, pp.1402-1413.
61. Bandyrskii B. I., Makarov V. I. Sufficient conditions for the eigenvalues of the operator $-d/dx^2+q(x)u$ with the Ionkin-Samarskii conditions to be real valued. *Comput Math. Math. Phys.,* 2000, vol.40, No.12, pp.1715-1728.
62. Wang Y. Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary conditions. *Electr. J. Differ. Equat.,* 2002, vol.2002(5), pp.1-16.
63. Bandyrskii B., Lazurchak L., Makarov V., Sapagovas M. Eigenvalue problem for the second order differential equation with nonlocal conditions. *Nonlin. Anal. Model. Control.,* 2006, vol.11, No.1, pp.13-32.
64. Gao J., Sun D., Zhang M. Structure of eigenvalues of multi-point boundary value problems. *Advanc. Difference Equat.,* 2010, vol.210, Artic. ID 3819,32, 24p.
65. Sapagovas M. Štikonienė O., Čiupaila R., Jokšienė Ž. Convergence of iterative methods for elliptic equations with integral boundary conditions. *Electr. J. Differ. Equat.,* 2016, vol.2016(118), pp.1-14.
66. Infante G. Eigenvalues of some non-local boundary-value problems. *Proceed. Edinb. Math. Soc.,* 2003, vol.46, pp.75-86.

67. Elsaid A., Hedal S. M., El-Sayed. The eigenvalue problem for elliptic partial differential equation with two-point nonlocal conditions. *J. Appl. Anal. Comput*., 2015, vol.5, No.1, pp.146-158.
68. Mennicken R., Mòller M. Non-self-adjoint Boundary Value Problems. *Elsevier, Amsterdam,* 2003.
69. Cannon J. R., J. van der Hoek. The one phase Stefan problem subject to the specification of energy. *J. Math. Anal. Appl.,* 1982, vol.86, pp.281-291.
70. Cannon J. R., Matheson A. L. A numerical procedure for diffusion subject to the specification of mass. *Intern. J. Engz. Sci.,* 1993, vol.31(3). pp.347-355.
71. Wang S. The numerical method for the conduction subject to moving boundary energy specification. Numer. Heat. Transfer, 1990, vol.130, pp.35-38.
72. Čiegis R. The numerical solution of the heat conduction equation with nonclasic (integral) condition. *Liet. Mat. Rink.* 1984, vol.24, No.4, pp.209-215.
73. Gulin A. V., Morozova V. A., Udovichenko N. S. Stability criterion for a family of nonlocal difference schemes. *Differ. Equat.,* 2010, vol.46, No.7, pp.966-982.
74. Gulin A. V., Morozova V. A., Stability of a nonlocal difference problem with a complex parameter. *Differ. Equat.,* 2011, vol.47, No.8, pp.1116-1129.
75. Gulin A. V., Ionkin N. I., Morozova V. A., Stability of nonlocal difference schemes, *Moscov, MGU,* 2008, 320p. (rusų k.).
76. Cahlon B., Kulkarni D. M., Shi P. Stepwise stability for the heat equation with a nonlocal constraint. *SIAM J. Numer. Anal.,* 1995, vol.32, No.2, pp.571-593.
77. Ekolin G. Finite difference methods for a nonlocal boundary value problem for the heat equation. BIT, 1991, vol.31, pp.245-261.
78. Fairweather G., Lopez-Marcos J. C. Galerkin method for a semilinear parabolic problem with nonlocal boundary conditions. *Advanc. Comput. Math*., 1996, vol.6, pp,243-262.
79. Liu Y. Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions. *J. Comput. Appl. Math.,* 1999, vol.110, pp.115-127.
80. Čiegis R., Štikonas A., Štikonienė O., Suboč O. A monotone finite-difference scheme for a parabolic problem with nonlocal conditions. *Differ. Equat.,* 2002, vol.38, No.7, pp.1027-1037.
81. Čiegis R., Tumanova N. Numerical solution of parabolic problems with nonlocal boundary conditions. Numer. Funct. Anal. Appl., 2011, vol.31, No12, pp.1318-1329.
82. Cui M. R. Convergence analysis of compact difference schemes for diffusion equation with nonlocal boundary conditions. *Appl. Math. Comput.*, 2015, vol.260, pp.227-241.
83. Lin Y., Xu S., Yin H.-M. Finite difference approximations for a class of non-local parabolic equations. *Intern. J. Math. & Math. Sci.* 1997, vol.20, No.1, pp.147-164.
84. Pao C. V. Asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *J. Comput. Appl. Math.,* 1998, vol.88, pp.225-238.
85. Sapagovas M. On the stability of a finite-difference scheme for nonlocal parabolic boundary-value problems. *Lith, Math. J.,* 2008, vol.48, No.3, pp.339-356.

86. Jesevičiūtė Ž, Sapagovas M., On the stability of finite-difference schemes for parabolic equations subject to integral conditions with applications to thermoelasticity. *Comput. Math. Appl. Math.*, 2008, vol.8, No.4, pp.360-373.
87. Jachimavičienė J., Sapagovas M., Štikonas A., Štikonienė O. On the stability of explicit finite difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions. *Nonlin. Anal. Model. Contr.,* 2014, vol.19, No.2, pp.225-240.
88. Ivanauskas F. F., Novitski Yu. A., Sapagovas M. P. On the stability of an explicit difference scheme for hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions. *Differ. Equat.,* 2013, vol.49, No.7, pp.849-856.
89. Sapagovas M., Meškauskas T., Ivanauskas F. Influence of complex coefficients on the stability of difference scheme for parabolic equations with non-local conditions. *Appl. Math. Comp.,* 2018, vol.332, pp.228-240.
90. Leonavičienė T. Bugajev A., Jankevičiūtė G., Čiegis R. On stability analysis of finite difference schemes for generalized Kuramoto-Tsuzuki equations with nonlocal boundary conditions. *Math. Model. Anal.,* 2016, vol.21, No.5, pp.630-643.
91. Sapagovas M., Meškauskas T., Ivanauskas F. Numerical spectral analysis of a difference operator with non-local boundary conditions. *Appl. Math. Comput.,*2012, vol.218, pp.7515-7527.
92. Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes. *Marcel Dekker, Inc., New York-Basel,* 2001.
93. Dehghan M. Efficient techniques for the second-order parabolic equation subject to nonlocal specifications. *Appl. Numer. Math.,* 2005, vol.52, pp.39-62.
94. Martin-Vaquero J., Vigo-Aguiar J. On the numerical solution of the heat conduction equations subject to nonlocal conditions. *Appl. Numer. Math.,* 2009, vol.59, pp.2507-2514.
95. Alikhanov A. A. On the stability and convergence of nonlocal difference schemes. *Differ. Equat.,* 2010, vol.46, No.7, pp.949-961.
96. Matematičeskaja Enciklopedija. Vyr. Red. i. M. Vinogradov, t.1-5, Maskva, „Sovetskaja Enciklopedija“, 1977-1985.
97. Sapagovas M., Čiupaila R., Jokšienė Ž., Meškauskas T. Computational experiment for stability analysis of difference schemes with nonlocal conditions. *Informatica,* 2013, vol.24, No.2, pp.275-290.
98. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation. *J. SIAM*, 1955, vol.3, pp.28-41.
99. Douglas J. Jr., Rachford H. H. On the numerical heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 1956, vol.82, pp.421-439.
100. Dehgham M. Fully implicit finite difference methods for two-dimensional diffusion with a non-local boundary condition. *J. Comput. Appl. Math.* 1999, vol.106, pp.255-269.
101. Dehgham M. A new ADI technique for two-dimensional parabolic equation with an integral condition. *Comp. Math. Appl.,* 2002, vol.43, pp.1477-1488.

102. Noye B. J., Dehgham M. A time-splitting finite difference method for two-dimensional diffusion with an integral condition. *Communic. Numer. Meth. Engin.*, 1994, vol.10, pp.649-660.

103. Noye B. J., Dehgham M. New explicit finite difference schemes for two-dimensional diffusion subject to specification of mass. *Numer. Meth. Part. Diff. Equat.*, 1999, vol.15, pp.521-534.

104. Čiegis R. Economical difference schemes for the solution of a two-dimensional parabolic problem with an integral condition. *Differ. Equat.*, 2005, vol.41, No.7, pp.1025-1029.

105. Dehgham M. Numerical solution of the three-dimensional parabolic equation with an integral condition. *Numer. Meth. Part. Diff. Equat.*,2002, vol.18, pp.193-202.

106. Čiegis R. Numerical schemes for 3D parabolic problem with non-local boundary condition. Proceed. 17th IMACS World Congress. Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation. Paris, France June 11-15, 2005. Paris: IMACS, 2005. I, p. 1-4.

107. Sapagovas M., Kairytė G., Štikonienė O,. Štikonas A. Alternating direction method for a two-dimensional parabolic equation with a nonlocal boundary condition. *Math. Model. Anal.,* 2007, vol.12, No.1, pp.131-142.

108. Sajavičius S. On the stability of alternating direction method for two-dimensional parabolic equation with nonlocal conditions. *Proceed. Intern. Conf. Differ. Equad. Applic. DETA-2009, 2009, Kaunas Univ. Technol.*, pp.42-48.

109. Jakubėlienė K., Sapagovas M. On the stability of a difference scheme for a two-dimensional parabolic equation with an integral condition. *Lith. Math. J.,* 2013, vol.56, No.3, pp.311-323.

110. Sapagovas M., Štikonas A., Štikonienė O. Alternating direction method for the Poisson equation with variable weight coefficients in an integral condition. *Differ. Equat.,* 2011, vol.47, No.8, pp.1163-1174.

111. Sapagovas M., Štikonienė O. A fourth-order alternating-direction method for difference schemes with nonlocal condition. *Lith. Math. J.,* 2009, vol.49, No.3, pp.309-317.

112. Sapagovas M., Štikonienė O. Alternating-direction method for a mildly nonlinear elliptic equation with nonlocal integral condition. *Nonlin. Anal. Model. Contr.,* 2011, vol.16, No.2, pp.220-230.

113. Sapagovas M. Griškonienė V., Štikonienė O. Application of M-matrices theory to numerical investigation of a nonlinear elliptic equation with a integral condition. *Nonlin. Anal. Model. Contr.,* 2017, vol.22, No.4, pp.489-504.

114. Štikonienė O., Sapagovas M., Čiupaila R. On iterative methods for some elliptic equations with nonlocal conditions. *Nonlin. Anal. Model. Contr.*, 2014, vol.19, No.3, pp.517-535.

115. Sapagovas M., Štikonienė O., Čiupaila R., Jokšienė Ž. Convergence of iterative methods for elliptic equations with integral boundary conditions. *Electr. J. Differ. Equat.*, 2016, vol.2016(2016), No.118, pp.1-14,

116. Varga R. S. Matrix Iterative Analysis. *Prentice-Hall*, 1962.

117. Sapagovas M., Štikonienė O., Jakubėlienė K., Čiupaila R. Finite difference method for boundary value problem for nonlinear elliptic equation with nonlocal conditions. *Bound. Value Probl.*, 2019, vol.2019:94, pp.1-16.

118. Čiupaila R., Sapagovas M., Pupalaigė K. M-matrices and convergence of finite difference scheme for parabolic equation with an integral boundary condition. *Math. Model. Anal.*, 2020, vol.25 , No.2, pp.167-183.

Mifodijus Sapagovas. Kraštiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis: skaitiniai metodai, taikymai, problemos, perspektyvos (Apžvalga). Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas. Vilnius, 2020, 34 psl.

Darbe pateikta diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis skaitinių sprendimo metodų apžvalga. Nurodytas nelokaliųjų uždavinių ryšys su įvairiais taikymais moksle ir technologijose. Užakcentuotos naujos tendencijos skaitiniuose metoduose bei neišspręstos problemos. Detaliau išnagrinėti keturi klausimai:

- nelokaliųjų uždavinių istorinė apžvalga bei nelokaliųjų sąlygų įvairovė;
- diferencialinių ir skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis tikrinių reikšmių uždavinys;
- skirtuminių schemų diferencialinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis stabilumas;
- skirtuminių lygčių sistema su nelokaliosiomis sąlygomis sprendimas kintamųjų krypčių metodu.

Aptartas Lietuvos matematikų įnašas į nelokaliųjų uždavinių skaitinių sprendimo metodų bendrosios teorijos kūrimą.

Bibliografija – 118 pavadinimų.

Mifodijus Sapagovas. The boundary value problems with nonlocal conditions: numerical methods, applications, questions, perspectives. Technical report. Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Institute of Data Science and Digital Technologies, Vilnius, 2020, 34 pages (In Lituanian).

In the paper the survey of the numerical methods for differential equations with nonlocal boundary conditions are presented. Some applications of the nonlocal problems in various field of science and technologies are discused. A new trends in numerical analysis as well as the unsolved problems are noted. The next four topics are considered in detail:

- a historical survey of the nonlocal problems and a variety of nonlocal conditions;
- the eigenvalue problem for the differential and difference operators with nonlocal conditions;
- the stability of the difference schemes for nonlocal differential problems;
- the alternating direction method for the difference system with nonlocal conditions.

Contribution of Lithuanian mathematics to the theory of numerical analysis of the differential equations with nonlocal conditions is described.

Bibliography -118.