VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

Vaidas KEBLIKAS

NAVJĖ-STOKSO LYGČIŲ PERIODINIAI LAIKO ATŽVILGIU UŽDAVINIAI SRITYSE SU CILINDRINIAIS IŠĖJIMAIS Į BEGALYBĘ

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius LEIDYKLA TECHNIKA 2008

Disertacija rengta 2003–2008 metais Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas

prof. habil. dr. Konstantinas PILECKAS (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija ginama Vilniaus Gedimino technikos universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

prof. habil. dr. Raimondas ČIEGIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Nariai:

prof. habil. dr. Feliksas IVANAUSKAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

doc. dr. Vytautas KLEIZA (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

doc. dr. Aleksandras KRYLOVAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

prof. habil. dr. Mifodijus SAPAGOVAS (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Oponentai:

prof. dr. Stasys RUTKAUSKAS (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

prof. dr. Vladas SKAKAUSKAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2008 m. spalio 2 d. 14 val. Matematikos ir informatikos instituto konferencijų ir seminarų centre.

Adresas: Goštauto g. 12, 01108 Vilnius, Lietuva.

Tel.: (8 5) 274 4952, (8 5) 274 4956; faksas (8 5) 270 0112;

el. paštas doktor@adm.vgtu.lt

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2008 m. rugsėjo 2 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus Gedimino technikos universiteto (Saulėtekio al. 14, 10223 Vilnius, Lietuva) ir Matematikos ir informatikos instituto (Akademijos g. 4, 08663 Vilnius, Lietuva) bibliotekose.

VGTU leidyklos „Technika“ 1491-M mokslo literatūros knyga.

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

Vaidas KEBLIKAS

TIME PERIODIC PROBLEMS FOR NAVIER-STOKES EQUATIONS IN DOMAINS WITH CYLINDRICAL OUTLETS TO INFINITY

Summary of Doctoral Dissertation
Physical Sciences, Mathematics (01P)

Vilnius LEIDYKLA TECHNIKA 2008

Doctoral dissertation was prepared at the Institute of Mathematics and Informatics in 2003–2008.

Scientific Supervisor

Prof Dr Habil Konstantinas PILECKAS (Institute of Mathematics and Informatics, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation is being defended at the Council of Scientific Field of Mathematics at Vilnius Gediminas Technical University:

Chairman:

Prof Dr Habil Raimondas ČIEGIS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

Members:

Prof Dr Habil Feliksas IVANAUSKAS (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Assoc Prof Dr Vytautas KLEIZA (Kaunas University of Technology, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Assoc Prof Dr Aleksandras KRYLOVAS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Prof Dr Habil Mifodijus SAPAGOVAS (Institute of Mathematics and Informatics, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

Opponents:

Prof Dr Stasys RUTKAUSKAS (Institute of Mathematics and Informatics, Physical Sciences, Mathematics – 01P),

Prof Dr Vladas SKAKAUSKAS (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Scientific Field of Mathematics in the Conference and Seminars Center of the Institute of Mathematics and Informatics at 2 p. m. on 2 October 2008.

Address: Goštauto g. 12, LT-01108 Vilnius, Lithuania.

Tel.: +370 5 274 4952, +370 5 274 4956; fax +370 5 270 0112;

e-mail: doktor@adm.vgtu.lt

The summary of the doctoral dissertation was distributed on 2 September 2008.

A copy of the doctoral dissertation is available for review at the Library of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lithuania) and at the Library of Institute of Mathematics and Informatics (Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania).

Bendras disertacijos aprašymas

Tyrimo objektas. Disertacijos tyrimo objektas yra nestacionarios Navjė-Stokso lygtys.

Mokslo problema. Periodinių laiko atžvilgiu uždavinių Navjė-Stokso lygtims sprendimas srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę.

Darbo tikslas ir uždaviniai. Darbo tikslas – ištirti Navjė-Stokso lygčių periodinių laiko atžvilgiu sprendinių egzistavimą ir savybes. Darbo uždaviniai yra šie:

1. Įrodyti nestacionaraus Puazelio sprendinio tiesiame cilindre egzistavimą ir vienatį.
2. Įrodyti Stokso lygčių sistemos periodinių laiko atžvilgiu sprendinių egzistavimą ir vienatį srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę.
3. Įrodyti dvimatės Navjė-Stokso lygčių sistemos periodinių laiko atžvilgiu sprendinių egzistavimą srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę.
4. Įrodyti trimatės Navjė-Stokso lygčių sistemos periodinių laiko atžvilgiu sprendinių egzistavimą srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę.

Mokslinis naujumas. Visi disertacijoje pateikti darbo rezultatai yra nauji. Nestacionarūs Puazelio sprendiniai anksčiau nebuvo nagrinėti. Taip pat nebuvo nagrinėti anksčiau ir periodiniai uždaviniai nestacionarioms Stokso, bei Navjė-Stokso lygtims srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę.

Tyrimų metodika. Disertacijos teiginiams įrodyti panaudoti funkcionalinės analizės teiginiai.

Praktinė vertė. Gauti rezultatai praplečia žinias apie nestacionarias Navjė-Stokso lygtis nekompaktinėse srityse. Taip pat gauta daug naudingos informacijos apie Puazelio sprendinius cilindre. Rezultatai yra teoriniai, tačiau gali būti plačiai taikomi skysčių tekėjimo praktiniams uždaviniams spręsti.

Ginamieji teiginiai

1. Įrodytas nestacionaraus Puazelio sprendinio tiesiame cilindre egzistavimas ir vienatis.
2. Įrodytas Stokso lygčių sistemos periodinių laiko atžvilgiu sprendinių egzistavimas ir vienatis srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę.
3. Įrodytas dvimatės Navjė-Stokso lygčių sistemos periodinių laiko atžvilgiu sprendinių egzistavimas srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę.
4. Įrodytas trimatės Navjė-Stokso lygčių sistemos periodinių laiko atžvilgiu sprendinių egzistavimas srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę.

Mokslo problemos aktualumas. Matematiniai skysčių dinamikos modeliai yra tiesinės ir netiesinės diferencialinės lygtys dalinėmis išvestinėmis, taip vadinamos Navjė-Stokso lygtys. Šių lygčių matematinė analizė prasidėjo dar 20 amžiaus pradžioje nuo žymaus prancūzų matematiko J. Lerė (J. Leray) darbų. Matematinė tokių lygčių analizė susideda iš korektiško uždavinio formulavimo,
sprendinio egzistavimo ir vienaties įrodymo įvairiose funkcijų erdvėse, sprendinių reguliarumo tyrimo, asimptotikos konstravimo ir pan. Šie klausimai išsamiai išnagrinėti tokių žymių matematikų kaip G. P. Galdžio (G. P. Galdi), O. Ladyženskajos, K. Pilecko, V. A. Solonikovo, R. Temamo ir kitų darbuose.

Dauguma čia paminėtų autorių daugiausia nagrinėjo Navjė-Stokso lygtis aprėžtose arba išorinėse srityse. Tačiau daugelis praktinių ir mokslinių uždavinių, tokių kaip vandens arba naftos tekėjimas vamzdžiais, kraujo tekėjimas venomis tiesiogiai susiję su nekompaktinėmis (neaprėžtomis) sritimis. Per paskutinius 30 metų tik stacionarūs (nepriklausantys nuo laiko) uždaviniai nekompaktinėse srityse buvo išsamiai išnagrinėti. Tuo tarpu nestacionarūs skysčių tekėjimo uždaviniai tokiose srityse nagrinėti labai mažai. Netgi nestacionarus Puazelio (Poiseuille) tekėjimas tiesiame cilindre anksčiau nebuvo žinomas. Tuo tarpu kai stacionarus jo analogas žinomas jau nuo 19 amžiaus. Taip pat verta paminėti, kad svarbūs taikymuose periodiniai skysčių tekėjimo uždaviniai nagrinėti mažai.

Siekiant užpildyti šią spragą, disertacijoje nagrinėjamos periodinės Stokso ir Navjė-Stokso lygtys srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę. Minėtų uždavinių sprendinių egzistavimas įrodytas svorinėse Sobolevo erdvėse. Tuo pačiu nustatytas ir sprendinių nykimo greitis, kurį reguliuoja svorinė funkcija. Taip pat įrodytas nestacionaraus Puazelio sprendinio cilindre egzistavimas Hiolderio (Hiolder) erdvėse. Puazelio sprendinio egzistavimas labiau įprastose Sobolevo erdvėse įrodytas vėliau K. Pilecko darbuose.

Aprobavimas. Disertacijos rezultatai buvo pristatyti devintoje tarptautinėje "Mathematical modelling and analysis" konferencijoje (Jūrmala, Latvija, 2004 m. gegužės 27–29 d.), dešimtoje tarptautinėje konferencijoje "Mathematical modelling and analysis" (Trakai, Lietuva, 2005 m. birželio 1–5 d.). Disertacijos tema skaityti pranešimai Matematikos ir informatikos instituto seminaruose ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto Fundamentinių mokslų fakulteto Matematinio modeliavimo katedros seminare.

Disertacijos struktūra. Disertacija parašyta anglų kalba. Disertaciją sudaro įvadas, penki skyriai, išvados, literatūros ir mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas. Bendra darbo apimtis – 109 puslapiai.

1. Funkcijų erdvės ir pagalbiniai rezultatai

Šiame skyriuje apibrėžiama nagrinėjama sritis su cilindriniais išėjimais į begalybę (ją žymėsime raide Ω), taip pat įvedamos svorinės Sobolevo erdvės. Pirmiausia apibrėžkime sritį, kurioje nagrinėsime Stokso ir Navjė-Stokso lygčių sistemas.

Tegu $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, n=2,3, yra sritis su J cilindrinių išėjimų į begalybę:

$$\Omega \subset \Omega_{(0)} \cup (\bigcup_{j=1}^{J} \Omega_j),$$

t. y., už sferos $|x| = r_0$ ribų sritis Ω suskyla į J sujungtų komponenčių Ω_j (išėjimų į begalybę), kurios kokioje nors koordinačių sistemoje $\mathrm{x}^{(j)}$ gali būti užrašomos taip:

$$\Omega_j = \{x^{(j)} \in R^n : x^{(j)'} \in \sigma_j, x_n^{(j)} > 0\}, j = 1,...,J,$$

čia $x^{(j)'} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$ kai n=3, $x_1^{(j)'} = x_1^{(j)}$ kai n=2 ir $\sigma_j \subset R^{n-1}$ yra aprėžta sritis, t. y. kai $x_n^{(j)} > 0$, išėjimai į begalybę sutampa su begaliniais cilindrais $\prod_j = \{x^{(j)} \in R : x^{(j)'} \in \sigma_j, -\infty < x_n^{(j)} < \infty\}$ (jeigu n=2, tai išėjimai Ω_j sutampa su begalinėmis juostomis ir jų skerspjūviai $\sigma_j = (0, h_j)$ yra aprėžti intervalai).

Dabar apibrėšime svorines funkcijas. Pažymėkime $\beta = (\beta_{1,...,}\beta_J)$ ir tegu $E_{\beta_j}(x) = E_{\beta_j}(x_n^{(j)})$ yra tolydi monotoninė funkcija srityje Ω_j, turinti tokias savybes:

$$E_{\beta_j}(x) > 0,\ a_1 \le E_{-\beta_j}(x)E_{\beta_j}(x) \le a_2,\ \forall x \in \Omega_j, E_{\beta_j}(0) = 1,$$
$$\left|\nabla E_{\beta_j}(x)\right| \le b_3\ \gamma_* E_{\beta_j}(x), \forall x \in \Omega_j, \tag{1}$$
$$\lim_{x\to\infty} E_{\beta_j}(x) = +\infty, \text{ jeigu } \beta > 0.$$

Čia a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 – teigiamos konstantos. Paprasčiausi pavyzdžiai tokių funkcijų būtų:

$$E_{\beta_j}(x) = (1 + \delta\, |\, x_n^{(j)}\, |^2)^{\beta_j} \quad \text{ir} \quad E_{\beta_j}(x) = \exp(2\beta_j x_n^{(j)}).$$

Verta paminėti, kad toliau nagrinėjamų uždavinių sprendinių nykimo greitis tiesiogiai priklausys nuo koeficiento γ_*, apibrėžto (1) nelygybėje. Pažymėkime

$$E_\beta(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega_{(0)}, \\ E_{\beta_j}(x), x \in \Omega_j. \end{cases}$$

Apibrėšime svorines Sobolevo erdves, kurios naudojamos įrodant pagrindinius disertacijos rezultatus.

$W_{2,\beta}^l(\Omega)$, l ≥ 0, tai funkcijų erdvė, turinti baigtinę normą:

$$\left\| u; W_{2,\beta}^l(\Omega) \right\| = \left(\sum_{|\alpha=0|}^{l} \int_\Omega E_\beta(x)\, |\, D^\alpha u(x)\, |^2\, dx \right)^{1/2}.$$

$$W_{2,\beta}^0(\Omega) = L_{2,\beta}(\Omega).$$

$W_{2,\beta}^{2,1}(\Omega \times (0,2\pi))$, tai funkcijų erdvė, turinti baigtinę normą:

$$\left\| u; W_{2,\beta}^{2,1}(\Omega \times (0,2\pi)) \right\| = \left(\int_0^{2\pi} \int_\Omega E_\beta(x) \left(|\, u_t\, |^2 + |\, u\, |^2 + |\, \nabla u\, |^2 + |\, \Delta u\, |^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

2. Nestacionarus Puazelio sprendinys

Šiame skyriuje nagrinėsime nestacionarią Navjė-Stokso lygčių sistemą begaliniame cilindre $\Pi = \{x \in R^3 : x' = (x_1, x_2) \in \sigma, x_3 \in R\}$:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \nu\Delta u(x,t) + (u(x,t)\cdot\nabla u(x,t)) + \nabla p(x,t) = 0, \\ div u(x,t) = 0, \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,t) = a(x), \\ \int\limits_{\sigma} u_3(x',t)dx' = F(t). \end{cases} \qquad (2)$$

Lygties (2) sprendinio $(u(x,t), p(x,t))$ ieškosime pavidalu

$$u(x,t) = (0,0,v(x',t)), p(x,t) = -q(t)x_3. \qquad (3)$$

Apibrėžimas. Uždavinio (2) sprendinys, turintis (3) pavidalą, vadinamas Puazelio sprendiniu.

Įstatę (3) išraišką į (2) lygtį gausime naują uždavinį:

$$\begin{cases} v_t(x',t) - \nu\Delta' v(x',t) = q(t), \\ v(x',t)|_{\partial\sigma} = 0, \\ v(x',0) = a_3(x'), \\ \int\limits_{\sigma} v(x',t)dx' = F(t), \end{cases} \qquad (4)$$

čia simbolis Δ' žymi Laplaso operatorių kintamųjų $x' = (x_1, x_2)$ atžvilgiu.

Funkcija q(t) yra nežinoma. Ji turi būti surasta remiantis integraline tapatybe $\int\limits_{\sigma} v(x',t)dx' = F(t).$ Taigi gauname atvirkštinį uždavinį.

Pagrindinis skyriaus rezultatas yra toks.

Teorema. *Tegul* $\partial\sigma \in C^{2l+2+2\delta}$, *F(t)* $\in C^{l+1+\delta}(0,T)$ *ir a(x)* $\in C^{2l+2+2\delta}(0,T)$, *čia* $l \geq 0$ *ir* $\delta \in (0,1/2)$. *Tarkime, kad išpildytos l+2 suderinamumo sąlygos*

$$\Delta^m a(x)|_{\partial\sigma} = 0, \frac{d^m}{dt^m} F(0) = \int_{\sigma} \Delta^m a(x)dx, m = 0,...,l+1.$$

Tada bent kokiam T>0 egzistuoja vienintelis (4) uždavinio sprendinys

$$(v(x',t), q(t)) \in C^{2l+2+2\delta, l+1+\delta}(\sigma \times (0,T)) \times C^{l+\delta}(0,T).$$

Taip pat galioja įvertis:

$$\left\|v; C^{2l+2+2\delta, l+1+\delta}(0,T)\right\| + \left\|q; C^{l+\delta}(0,T)\right\| \le c(T)\left\|F; C^{l+1+\delta}(0,T)\right\|.$$

Analogiškas uždavinys su periodine pradine sąlyga buvo išspręstas H. Beirao de Veigos, G. P. Galdžio ir A. M. Robertson darbuose. Periodinio Puazelio sprendinio egzistavimas įrodytas Sobolevo erdvėse.

3. Periodinis laiko atžvilgiu Stokso uždavinys

Šiame skyriuje nagrinėjama srityje Ω (apibrėžtoje 1 skyriuje) periodinė laiko atžvilgiu Stokso lygčių sistema (nemažindami bendrumo periodą imsime lygų 2π).

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \nu\Delta u(x,t) + \nabla p(x,t) = f(x,t), \\ divu(x,t) = 0, \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = u(x,2\pi), \\ \int_{\sigma_j} u(x,t)\cdot n_j(x)ds = F_j(t), j = 1,...,J. \end{cases} \tag{5}$$

Čia – $\sum_{j=1}^{J} F_j(t) = 0.$

Pirmiausia sukonstruosime periodinį Puazelio sprendinį visoje srityje Ω. Remiantis minėtais H. Beirao de Veigos, G. P. Galdžio ir A. M. Robertson tyrimų rezultatais, kiekviename cilindriniame išėjime į begalybę Ω_j egzistuoja periodinis Puazelio sprendinys, turintis formą:

$$U^{(j)}(x^{(j)'},t)=(0,0,U_3(x^{(j)'},t)), P^{(j)}(x,t)=-q^{(j)}(t)x_3^{(j)}.$$

Apibrėžkime

$$U(x,t)=\sum_{j=1}^{j}\zeta(x_n^{(j)})U^{(j)}(x^{(j)'},t), P(x,t)=\sum_{j=1}^{J}\zeta(x_n^{(j)})P^{(j)}(x^{(j)'},t),$$

čia $\zeta(t)-$ tolydi nupjautinė funkcija $\zeta(t)=0,$ kai $t\le 1$ ir $\zeta(t)=1,$ kai $t\ge 2.$ $f(x,t)\in L_{2,\beta}(\Omega\times(0,2\pi))$
Paimkime

$$V(x,t)=U(x,t)+W(x,t).$$

Čia $W(x,t)$ periodinė laiko atžvilgiu funkcija, tokia kad $W(\cdot,t)\in W_2^2(\Omega_{(0)})$ ir tenkinanti lygtį:

$$divW(x,t)=-divU(x,t).$$

Funkcija $W(x,t)$ pridedama, tam kad gautume $divV(x,t)=0.$
Pagrindinis skyriaus rezultatas yra toks.

Teorema. *Tegu* $\partial\Omega\in C^2$. *Tarkime kad* $F_j(t)\in W_2^1(0,2\pi)$, *j=1, 2, ... , J, ir yra periodinės laiko atžvilgiu funkcijos. Jeigu svorio indeksas* γ_* *(1) nelygybėje pakankamai mažas, tada uždavinys (5) turi vienintelį periodinį sprendinį tenkinantį asimptotinę išraišką*

$$u(x,t)=V(x,t)+v(x,t), p(x,t)=P(x,t)+\widetilde{p}(x,t). \qquad (6)$$

Taip pat galioja įvertis:

$$\left\|v;W_{2,\beta}^{2,1}(\Omega\times(0,2\pi))\right\|+\left\|\nabla\widetilde{p};L_{2,\beta}(\Omega\times(0,2\pi))\right\|\le c\left\|f;L_{2,\beta}(\Omega\times(0,2\pi))\right\|$$
$$+c\sum_{j=1}^{J}\left\|F_j;W_2^1(0,2\pi)\right\|.$$

4. Periodinis laiko atžvilgiu uždavinys dvimačiai Navjė-Stokso lygčiai

Šiame skyriuje nagrinėjama periodinė laiko atžvilgiu Navjė-Stokso lygčių sistema dvimatėje srityje Ω:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + (u(x,t)\cdot\nabla)u(x,t) + \nabla p(x,t) = f(x,t), \\ div u(x,t) = 0, \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = u(x,2\pi), \\ \int\limits_{\sigma_j} u(x,t)\cdot n_j(x)ds = F_j(t), j = 1,...,J. \end{cases} \tag{7}$$

Kaip ir Stokso uždavinio atveju, sprendinio ieškosime pavidalu (6). Įstatę į (7) lygtį asimptotinę išraišką (6) gausime naują lygtį kintamųjų $\left(v(x,t), \widetilde{p}(x,t)\right)$ atžvilgiu:

$$\begin{cases} v_t(x,t) - \Delta v(x,t) + (v(x,t)\cdot\nabla)v(x,t) + (V(x,t)\cdot\nabla)v(x,t) + \\ + (v(x,t)\cdot\nabla)V(x,t) + \nabla\widetilde{p}(x,t) = \widetilde{f}(x,t), \\ div v(x,t) = 0, \\ v(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ v(x,0) = v(x,2\pi), \\ \int\limits_{\sigma_j} v(x,t)\cdot n_j(x)ds = 0, j = 1,...,J. \end{cases} \tag{8}$$

Pagrindinis skyriaus rezultatas yra toks.

Teorema. *Tegul* $\partial\Omega \in C^2$ *ir* $f(x,t) \in L_{2,\beta}(\Omega\times(0,2\pi))$. *Jeigu svorio indeksas* γ_* *(1) nelygybėje yra pakankamai mažas ir jeigu funkcijos* $V(x,t)$ *norma pakankamai maža, tai uždavinys (8) turi bent vieną sprendinį* $v(x,t) \in W_{2,\beta}^{2,1}(\Omega\times(0,2\pi)), \nabla\widetilde{p}(x,t) \in L_{2,\beta}(\Omega\times(0,2\pi))$. *Taip pat galio-ja įvertis:*

$$\left\| v; W^{2,1}_{2,\beta}(\Omega \times (0,2\pi)) \right\|^2 + \left\| \nabla \widetilde{p}; L_{2,\beta}(\Omega \times (0,2\pi)) \right\|^2 \le B \ ,$$

čia B *– teigiama konstanta, priklausanti nuo uždavinio duomenų.*

Sprendinio egzistavimas įrodytas tuo atveju, jeigu Puazelio sprendinius apibūdinanti funkcija $V(x,t)$ normos atžvilgiu yra pakankamai maža. Analogiškas uždavinys su įprasta pradine sąlyga išspręstas K. Pilecko darbuose be mažumo sąlygos.

5. Periodinis laiko atžvilgiu uždavinys trimačiai Navjė-Stokso lygčiai

Šiame skyriuje nagrinėjama periodinė laiko atžvilgiu Navjė-Stokso lygčių sistema (7) trimatėje erdvėje Ω.

Analogiškai, įstačius (6) išraišką į (7) lygtį, gausime (8) uždavinį trimatėje srityje Ω.

Pagrindinis šio skyriaus rezultatas yra toks.

Teorema. *Tegu* $\partial\Omega \in C^2$, $f\,(x,t) \in L_{2,\beta}(\Omega \times (0,2\pi))$. *Taip pat svorio indeksas* γ_* *(1) nelygybėje yra pakankamai mažas. Jeigu funkcijos* $V(x,t)$ *ir* $f(x,t)$ *yra pakankamai mažos normos atžvilgiu, tai egzistuoja (8) uždavinio sprendinys* $v(x,t) \in W^{2,1}_{2,\beta}(\Omega \times (0,2\pi))$, $\nabla \widetilde{p}(x,t) \in L_{2,\beta}(\Omega \times (0,2\pi))$. *Taip pat galioja įvertis:*

$$\left\| v; W^{2,1}_{2,\beta}(\Omega \times (0,2\pi)) \right\|^2 + \left\| \nabla \widetilde{p}; L_{2\beta}(\Omega \times (0,2\pi)) \right\|^2 \le r_0,$$

čia r_0 *– teigiama konstanta priklausanti nuo uždavinio duomenų.*

Sprendinio egzistavimas įrodomas, jeigu visi uždavinio duomenys yra pakankamai maži, įskaitant ir išorinių jėgų vektorių $f(x,t)$.

Pagrindinių publikacijų disertacijos tema sąrašas:

1. PILECKAS, K.; KEBLIKAS, V. On the existence of non-stationary Poiseuille solution. *Siberian Math. Journal*, 2005, Vol. 46(3), p. 514–526.
2. KEBLIKAS, V. On the time-periodic problem for the Stokes system in domains with cylindrical outlets to infinity, *Lithuanian Math. Journal*, 2007, Vol. 47(2), p. 147–163.

Trumpos žinios apie disertacijos autorių:

1997–2001 m. studijos Vilniaus pedagoginio universiteto Matematikos ir Informatikos fakultete – įgytas matematikos bakalauro laipsnis.

2001–2003 m. studijos Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete – įgytas matematikos magistro laipsnis.

2003–2007 m. doktorantūros studijos Matematikos ir informatikos institute.

E–mail: vaidas.keblikas@gmail.com

TIME PERIODIC PROBLEMS FOR NAVIER-STOKES EQUATIONS IN DOMAINS WITH CYLINDRICAL OUTLETS TO INFINITY

Topicality of the problem. The research area of this work is the analysis of time periodic Navier-Stokes equations in domains with cylindrical outlets to infinity.

Actuality of the problem. Mathematical models of fluid dynamics are systems of linear and nonlinear partial differential equations, known as Navier-Stokes equations. The rigorous mathematical analysis of Navier-Stokes equations started at the beginning of the 20th century from works of the French mathematician J. Leray. This analysis consists of studies concerning the correct formulations of initial boundary value problems for Navier-Stokes equations, proofs of the existence and uniqueness of solutions in different functional spaces, investigation of solutions reguliarity, construction of asymptotics, etc. Such questions have been studied in many papers and monographs.

The existence theory developed in the literature mainly deals with the flows of incompressible viscous fluids in domains with compact boundaries (i. e. in bounded and exterior domains). Although some of these results do not depend on the shape of the boundary, many problems of scientific and practical interest (e. g. water or petroleum flow in pipes systems or blood flow in veins) related to flows of incompressible viscous fluid in domains with noncompact boundaries were unsolved. Therefore, it is not surprising that during the last 30 years the special attention was given to problems in unbounded domains. However, during this time only stationary problems were exhaustively investigated, while not much is known about the non-stationary ones. Even the existence of a non-stationary analog of the Poiseuille flow in a straight cylinder was not proved (the stationary Poiseuille solution was constructed as far back as in XIX century). In this thesis we prove the existence of the non-stationary Poiseuille solution in a straight cylinder and study the time-periodic solutions of Stokes and Navier-Stokes equations in domains with cylindrical outlets to infinity (i. e. in a system of pipes).

Aims and problems. The main aim of the thesis is the analysis of time periodic problems for Navier-Stokes equations in domains with cylindrical outlets to infinity. To achieve this goal, we have to solve following problems: 1) To investigate the existence and uniqueness questions for the Poiseuille flow of an incompressible viscous fluid in an infinite cylinder; 2) To investigate the existence and uniqueness questions of a time periodic Stokes problem with cylindrical outlets to infinity; 3) To investigate the existence questions of a time periodic Navier-Stokes problem for two and three dimensional domains with cylindrical outlets to infinity.

Novelty of the results. All the results obtained in the thesis are new. The existence of a non-stationary Poiseuille solution in Hiolder spaces was not known before. The time periodic solutions to Stokes and Navier-Stokes equations in domains with cylindrical outlets to infinity have been investigated for the first time.

Approbation. The results of the thesis were presented at the 9^{th} International conference on mathematical modelling and analysis and at the 10^{th} International conference on mathematical modelling and analysis. Contributing talks were given at the seminars at Institute of Mathematics and

Informatics and Vilnius Gediminas Technical University. The results of the thesis were published in the following periodical scientific papers:

PILECKAS, K.; KEBLIKAS, V. On the existence of non-stationary Poiseuille solution. *Siberian Math. Journal*, 2005, Vol. 46(3), p. 514–526.
KEBLIKAS, V. On the time-periodic problem for the Stokes system in domains with cylindrical outlets to infinity, *Lithuanian Math. Journal*, 2007, Vol. 47(2), p. 147–163.

The scope and structure of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, five chapters, conclusions and the bibliography. There are 108 pages of text and 86 bibliographical sources.

In the first chapter, the necessary function spaces are defined and certain known auxiliary results are formulated.

In the second chapter, we study a non-stationary Poiseuille solution. Poiseuille flow is an exact solution of the steady Navier-Stokes system in an infinite straight cylinder of constant cross-section σ and has the prescribed flux F over σ. However, in this case there already appears to be a problem with the definition of time dependent Poiseuille flow. In prescribing the flux F(t), we have to solve for v(x,t) and q(t) the more complicated nonstandard inverse parabolic problem.

In the third chapter, we study the time periodic problem for the Stokes system in domains with cylindrical outlets to infinity.

In the forth chapter, we study the two-dimensional time periodic Navier-Stokes problem. Here, it was proved that at least one solution in weighted Sobolev spaces exists. However, it‘s existence was proved only if some of the data is small enough.

In the fifth chapter, we study the three-dimensional time periodic Navier-Stokes problem. The solvability in weighted Sobolev norms was obtained for all small data (including external forces).

General conclusions

1. The existence and uniqueness of a non-stationary Poiseuille solution to Navier-Stokes system in a straight cylinder is proved.
2. The existence and uniqueness of a solution to the time periodic Stokes problem in domains with cylindrical outlets to infinity is proved in weighted Sobolev spaces.
3. The existence of a solution for the two-dimensional time periodic Navier-Stokes problem in domains with cylindrical outlets to infinity is proved in

weighted Sobolev spaces. The results were obtained for „small“ fluxes. However, the external forces could be „large“.

4. The existence of a solution for the three-dimensional time periodic Navier-Stokes problem in domains with cylindrical outlets to infinity is proved in weighted Sobolev spaces. The results were obtained for all „small“ data, including both fluxes and external forces.
5. It is shown that the obtained solutions in every outlet to infinity asymptotically tend as $|x| \to \infty$ to the corresponding time periodic Poiseuille solution.
6. From the obtained results, we conclude that in the case of „rapidly“ vanishing external forces, the time periodic solution of Navier-Stokes equations in outlets to infinity are almost coincident for a large $|x|$ with a corresponding time periodic Poiseuille solution. In particular, if there is no external force, then the time periodic solution of the Navier-Stokes problem exponentially tends towards the time periodic Poiseuille flow. Thus, in studying viscous fluid flow problems in complicated systems of pipes, one can get the information for large distances by solving much easier linear parabolic problems describing the time periodic Poiseuille flows in pipes.

Vaidas Keblikas

NAVJĖ-STOKSO LYGČIŲ PERIODINIAI LAIKO ATŽVILGIU UŽDAVINIAI SRITYSE SU CILINDRINIAIS IŠĖJIMAIS Į BEGALYBĘ

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

TIME PERIODIC PROBLEMS FOR NAVIER-STOKES EQUATIONS IN DOMAINS WITH CYLINDRICAL OUTLETS TO INFINITY

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, Mathematics (01P)

2008 06 12. 1,25 sp. l. Tiražas 100 egz.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
leidykla „Technika“, Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius,
http://leidykla.vgtu.lt
Spausdino UAB „Baltijos kopija“,
Kareivių g. 13B, 09109 Vilnius, *www.kopija.lt*