VILNIAUS UNIVERSITETAS

ANDRIUS ŠKARNULIS

KVADRATINIAI ILGOSIOS ATMINTIES ARCH MODELIAI IR PARAMETRŲ VERTINIMAS KVAZIDIDŽIAUSIO TIKĖTINUMO METODU

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2017

Disertacija rengta 2012–2016 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas – prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Mokslinis konsultantas – prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas – prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Nariai:

prof. habil. dr. Bronislovas Kaulakys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P);
prof. dr. Vytautas Kazakevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
prof. dr. Charles Suquet (Lilio 1 universitetas, Prancūzija, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2017 m. gegužės mėn. 15 d. 14 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute, 203 auditorijoje.

Adresas: Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiųsta 2017 m. balandžio mėn. 14 d.
Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir Vilniaus universiteto interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

ANDRIUS ŠKARNULIS

QUADRATIC ARCH MODELS WITH LONG MEMORY AND QML ESTIMATION

Summary of Doctoral Dissertation
Physical Sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2017

The dissertation was written in 2012–2016 at Vilnius University.

Scientific Supervisor – Prof. Dr. Habil. Donatas Surgailis (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P).

Scientific Adviser – Prof. Dr. Habil. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P).

Dissertation will be defended at the Council of Scientific Field of Mathematics at Vilnius University:

Chairman – Prof. Dr. Habil. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P).

Members:

Prof. Dr. Habil. Bronislovas Kaulakys (Vilnius University, Physical Sciences, Physics – 02 P);
Prof. Dr. Vytautas Kazakevičius (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Habil. Vigirdas Mackevičius (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Charles Suquet (Université des Sciences et Technologies de Lille, France, Physical Sciences, Mathematics – 01 P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Scientific Field of Mathematics on May 15, 2017, 2:00 p.m. at Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics, Room 203.

Address: Akademijos st. 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on April 14, 2017.
The dissertation is available at the Vilnius University Library and online at www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

Turinys

Įvadas

Disertacijoje, kurios pagrindiniai rezultatai pristatomi šioje santraukoje, nagrinėjamas ilgosios atminties autoregresinių sąlyginio heteroskedastiškumo (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, ARCH) procesų modeliavimas ir parametrų vertinimas. ARCH procesų klasę pirmasis nagrinėjo Nobelio premijos laureatas Robert'as Engle'as (1982, [5]). Šiais modeliais siekta matematiškai aprašyti finansinių laiko eilučių (rinkos indeksų, akcijų ir kitų vertybinių popierių grąžų) empiriškai stebėtas savybes, vadinamuosius stilizuotus faktus (*stylized facts*). Viena tokių savybių – ilgoji atmintis, pasireiškianti lėtu finansinių grąžų (jų kvadratų, kitų laipsnių ar netiesinių transformacijų) autokoreliacijų gesimu. Matematiškai ilgoji atmintis dažniausiai nusakoma diverguojančiąja kovariacijų eilute, t. y. $\sum_{k=0}^{\infty} |\mathrm{Cov}(X_0, X_k)| = \infty$.

ARCH procesus pagrįstai galima vadinti pagrindine finansinių duomenų modelių klase. ARCH tipo modeliais finansinę grąžą r_k įprasta užrašyti kaip tokio pavidalo lygtį:

$$r_k = \zeta_k \sigma_k, \tag{1}$$

čia ζ_k – nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai (modelio „triukšmas“), kurių vidurkis lygus nuliui, o σ_k^2 yra grąžos r_k sąlyginė dispersija, priklausanti nuo grąžų praeities reikšmių $r_s, s < k$. Ji yra kintanti laike ir dažnai vertinama kaip finansinio aktyvo rizikos matas. Aprašant ARCH(∞) modelį, kuriam disertacijoje skiriama daug dėmesio, dispersija σ_k^2 užrašoma tokiu būdu:

$$\sigma_k^2 = \omega + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{k-j}^2,$$

čia ω ir b_j yra neneigiami modelio parametrai. Iš esmės nuo šių parametrų reikšmių ir priklauso, ar modelis gali pasižymėti ilga atmintimi. Dėl ARCH(∞) ir specialių jo atvejų, ypač FIGARCH modelio, stacionariojo sprendinio, pasižyminčio ilgąja atmintimi, egzistavimo kilo nemažai kontroversiškų mokslinių diskusijų. Ilgą laiką manyta, kad ARCH(∞) modelis negali turėti ilgos atminties. Disertacijoje, nagrinėjant atvejį, kai $\omega = 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1$, parodoma, kad ilgosios atminties savybe pasižymintis stacionarusis sprendinys vis dėlto egzistuoja. Taip galutinai įrodoma ir daugiau nei prieš 20 metų Z. Ding'o ir C. W. J. Granger'io (1996, [3]) iškelta hipotezė apie ilgosios atminties ARCH proceso su baigtiniu ketvirtuoju momentu egzistavimą.

Disertacijoje taip pat nagrinėjamos vienos stambios ARCH modelių klasės stacionariojo sprendinio egzistavimo sąlygos, kai (1) lygties sąlyginė dispersija σ_k^2 yra užrašoma bendra netiesine forma. Nustačius sprendinio egzistavimo sąlygas, praktikoje plačiai taikomo ir literatūroje dažnai nagrinėjamo kvazididžiausio tikėtinumo įvertinio savybės yra tiriamos imant atskirą tokių modelių atvejį, kai sąlyginė dispersija σ_k^2 yra kvadratinė forma praeities grąžų atžvilgiu.

1. Mokslinė problema ir tyrimo objektas

Pagrindinis tyrimo objektas yra kvadratiniai begalinės eilės ARCH laiko eilučių modeliai, pasižymintys ilgąja atmintimi. Darbe nagrinėjama mokslinė problema aprėpia: a) sąlygų, kurioms galiojant egzistuoja šių modelių stacionarusis sprendinys, pasižymintis ilgąja atmintimi, paiešką; b) stacionariojo šių modelių sprendinio ilgosios atminties tyrimą; c) hipotezės apie stcionariojo ilgosios atminties ARCH(∞) modelio sprendinio egzistavimą tyrimą; d) kvadratinio asimetrinio ARCH proceso parametrų vertinimą ir sąlygų, kurioms galiojant kvazididžiausio tikėtinumo įvertinys yra suderintasis ir asimptotiškai normalusis, paiešką; e) pirminį naujos klasės IAR(p, d, q) modelių tyrimą ir lyginimą su klasikiniais ARFIMA tipo modeliais.

2. Pagrindiniai uždaviniai

Disertacijoje sprendžiami šie pagrindiniai uždaviniai:

- **nustatyti integruoto ARCH(∞) proceso ir jo atskiro atvejo, būtent FIGARCH modelio, stacionariojo sprendinio, pasižyminčio ilgąja atmintimi, egzistavimo sąlygas.** Siekiama surasti sąlygas, kurioms galiojant

IARCH(∞) modelis

$$r_k = \zeta_k \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{k-j}^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1,$$

ir atskiras jo atvejis su konkretaus pavidalo koeficientais b_j (FIGARCH modelis) turi stacionarųjį sprendinį su baigtiniu ketvirtuoju momentu. Taip siekiama įrodyti ir daugiau nei prieš 20 metų Z. Ding'o ir C. W. J. Granger'io [3] iškeltą hipotezę, kad stacionarusis LM(d)–ARCH modelio (kartu ir FIGARCH modelio) sprendinys su baigtiniu ketvirtuoju momentu (jeigu jis apskritai egzistuoja) pasižymi ilgąja atmintimi;

- **nustatyti integruoto AR(∞) proceso stacionariojo sprendinio egzistavimo sąlygas ir ištirti tokią šio sprendinio savybę kaip ilgoji atmintis.** Darbe taip pat nagrinėjami IAR(∞) modeliai, kurių pavidalas yra toks:

$$x_k - \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_{k-j} = \zeta_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

čia b_j yra neneigiami modelio parametrai, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1$, o $\{\zeta_k\}$ yra trumpos atminties triukšmo seka. Siekiama nustatyti sąlygas, užtikrinančias (2) lygties stacionariojo sprendinio egzistavimą. Taip pat keliamas uždavinys ištirti tokio sprendinio ilgosios atminties savybę;

- **atlikti pirminį naujos modelių IAR(p, d, q) klasės tyrimą pasitelkus empirinį modeliavimą**. Keliamas uždavinys ištirti IAR(p, d, q) modelio autokovariacinės funkcijos savybes ir palyginti jas su kitų klasikinių ARFIMA tipo modelių atitinkamomis savybėmis;

- **ištirti asimetrinio ilgosios atminties ARCH(∞) modelio parametrų kvazididžiausio tikėtinumo įvertinių savybes.** Darbe siekiama išnagrinėti asimetrinio ARCH(∞) modelio $r_k = \zeta_k \sigma_k$ su

$$\sigma_k^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma^{\ell} \Big\{ \omega^2 + \Big(a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{k-j-\ell} \Big)^2 \Big\} \tag{3}$$

kvazididžiausio tikėtinumo įvertinio savybes ir ieškoma sąlygų, kurioms galiojant įvertinys yra suderintasis ir asimptotiškai normalusis. Kartu keliamas uždavinys gautus teorinius rezultatus patikrinti pasitelkus praktinius skaičiavimus. Modelio, kurio parametrų vertinimas nagrinėjamas, stacionariojo sprendinio egzistavimo sąlygos yra analizuojamos atskirame disertacijos skyriuje;

- **nustatyti sąlygas, kurios užtikrina bendros netiesinių ilgosios atminties ARCH modelių klasės stacionariojo sprendinio egzistavimą, ištirti stacionariojo sprendinio ilgąją atmintį ir sverto efektą.** Darbe siekiama nustatyti sąlygas, kurioms galiojant egzistuoja stacionarusis sprendinys su baigtiniu p-uoju momentu modelio, turinčio pavidalą

$$r_k = \zeta_k \sigma_k, \quad \sigma_k^2 = Q^2\left(a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{k-j}\right) + \gamma \sigma_{k-1}^2.$$

  Atskiru atveju, kai funkcija Q yra kvadratinė, nagrinėjama sprendinio ilgosios atminties savybė ir sverto efektas.

3. Mokslinis naujumas ir aktualumas

Šiuo metu ARCH yra pagrindinė finansinių duomenų modelių klasė. Siekiant tokio tipo laiko eilučių modelius taikyti praktikoje, būtina ištirti stacionariųjų sprendinių egzistavimą ir jų savybes, pavyzdžiui, galimybę modeliuoti duomenis, pasižyminčius ilgąja atmintimi arba sverto efektu. Be to, kai kurie modeliai, tokie kaip šioje disertacijoje nagrinėjamas FIGARCH, praktikoje gana dažnai taikomi, nekreipiant dėmesio į jų teorinio pagrįstumo trūkumą. Taigi, konkrečių ARCH tipo modelių sprendinių egzistavimo, jų savybių tyrimo ir parametrų vertinimo mokslinė problematika yra itin aktuali. Pateikiami rezultatai, susiję su IARCH(∞), IAR(∞), FIGARCH ir netiesinių ARCH(∞) modelių stacionariojo sprendinio egzistavimo sąlygomis, ilgąja atmintimi, parametrų įvertinių savybėmis, yra nauji ir originalūs. Itin pabrėžtina, kad pirmą kartą yra įrodoma 1996 m. Z. Ding'o ir C. W. J. Granger'io iškelta hipotezė dėl LM(d)–ARCH modelio (kartu ir FIGARCH modelio) ilgosios atminties stacionariojo sprendinio su baigtiniu ketvirtuoju momentu egzistavimo.

4. Tyrimo metodika

Darbe taikomi įvairūs tikimybių teorijos, statistikos, funkcinės analizės, laiko eilučių, sprektrinės analizės sričių metodai ir šių sričių tyrimų rezultatai.

Tiriant integruotųjų ARCH(∞) modelių stacionariojo sprendinio egzistavimo sąlygas, ARCH(∞) lygtis yra užrašoma IAR(∞) pavidalu, taigi reikia nagrinėti pastarojo tipo procesų stacionariųjų sprendinių egzistavimą ir savybes. Sprendiniai užrašomi diskrečiojo laiko begalinės Volteros eilutės pavidalu, todėl remiamasi sumavimo Banacho erdvėse teorijos elementais.

Nagrinėjant kvazididžiausio tikėtinumo įvertinių savybes ir asimptotinį skirstinį, remiamasi martingaline centrine ribine teorema, Faa di Bruno formule, Sluckio teorema, Teiloro skleidinio savybėmis ir kt. Kadangi įprastinio „baigtinės praeities“ įvertinio konvergavimo greitis per mažas, nagrinėjamas papildomas įvertinys, kai kvazididžiausio tikėtinumo funkcija užrašoma įtraukiant tik tam tikrą dalį paskutinių tikėtinumų.

Įrodymams taikomos žinomos Holderio, Minkovskio, Burkholderio–Rozentalio, Koši nelygybės, Persevalio lygybė, remiamasi Fatu lema, dominuojančio konvergavimo teorema ir kt. Procesų empirinis generavimas ir praktiniai skaičiavimai daugiausia buvo atliekami programa MATLAB. Vertinant sugeneruotų procesų autokovariacines funkcijas, taikytas Monte Karlo metodas.

5. Darbo struktūra ir apimtis

Disertaciją sudaro 6 skyriai – įvadas, preliminari informacija disertacijos tematika, trys pagrindiniai skyriai, kuriuose pateikiami svarbiausi darbo rezultatai, ir paskutinis skyrius, kuriame trumpai pristatomos pagrindinės darbo išvados. Disertacija užbaigiama literatūros sąrašu. Darbas yra parengtas anglų kalba. Bendra jo apimtis – 162 psl.

6. Moksliniai rezultatai

Svarbiausi darbo rezultatai yra aprašomi trijuose skyriuose. Panašia seka jie pristatomi ir šioje santraukoje.

6.1. Stacionarieji integruoti ARCH(∞) ir AR(∞) procesai su baigtine dispersija

Vienas pagrindinių ir svarbiausių darbo rezultatų – nustatytos būtinosios ir pakankamos sąlygos, kurioms galiojant egzistuoja stacionarieji IARCH(∞), IAR(∞) ir FIGARCH modelių ilgosios atminties sprendiniai.

Iš pradžių apibrėšime, ką laikome ARCH(∞) procesu.

1 apibrėžimas. *Neneigiamas atsitiktinis procesas $\{\tau_k, k \in \mathbb{Z}\}$ tenkina ARCH(∞) lygtį, jeigu egzistuoja neneigiamų, nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, kurių vidurkis lygus vienetui,* $\mathrm{E}\varepsilon_0 = 1$, *seka $\{\varepsilon_k, k \in \mathbb{Z}\}$, neneigiamas parametras $\omega \geq 0$ ir seka $b_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots$, tokie, kad*

$$\tau_k \;=\; \varepsilon_k \left(\omega + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \tau_{k-j} \right), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

2 apibrėžimas. *Lygties (4) L^2-sprendiniu vadinamas atsitiktinis procesas $\{\tau_k, k \in \mathbb{Z}\}$ su baigtiniu antruoju momentu, toks, kad (4) lygties eilutė konverguoja kvadratinio vidurkio prasme ir atitinkama lygybė galioja kiekvienam $k \in \mathbb{Z}$.*

Kai $\omega = 0$, o $\sum_{j=1}^{\infty} b_j < 1$, tai (4) lygtis teturi trivialųjį nulinį sprendinį $\tau_k \equiv 0$. Jeigu $\omega > 0$, o $\sum_{j=1}^{\infty} b_j < 1$, tai, kaip rodytų moksliniuose darbuose pateikiami rezultatai, (4) lygties stacionarusis sprendinys pasižymi trumpąja atmintimi. Disertacijoje daugiausia nagrinėjamas yra atvejis, kai $\omega = 0$ ir $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1$. Tokiu atveju (4) modelis vadinamas integruotuoju ARCH(∞) (IARCH(∞)) modeliu. Trumpai aprašysime pagrindinę šio modelio stacionariojo sprendinio sudarymo idėją, taikomą disertacijoje.

Tarkime, kad $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\varepsilon_0) < \infty$, o $\{\zeta_k = (\varepsilon_k - 1)/\sigma,\ k \in \mathbb{Z}\}$ yra „centruotų“ nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka (primename, kad $E\varepsilon_0 = 1$). Tada ARCH(∞) lygtis (4) gali būti užrašyta bitiesinės lygties pavidalu

$$Y_k \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} b_j Y_{k-j} + \zeta_k\Big(\mu\sigma + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} b_j Y_{k-j}\Big). \tag{5}$$

Tokio pavidalo bitiesiniai modeliai jau anksčiau nagrinėti kitų autorių darbuose, pvz., L. Giraičio ir D. Surgailio [8]. Pažymėkime

$$z_k = Y_k - \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} b_j Y_{k-j} = (1 - B(L))Y_k.$$

Tuomet $Y_k = (1 - B(L))^{-1} z_k = G(L) z_k = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z_{k-j}$ ir

$$\sigma \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} b_j Y_{k-j} = \sigma B(L)(1 - B(L))^{-1} z_k = H(L) z_k = \sum_{j=1}^{\infty} h_j z_{k-j},$$

čia koeficientai g_j, h_j yra gaunami iš tokių generuojančiųjų funkcijų:

$$G(z) = \frac{1}{1 - B(z)} \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j, \qquad H(z) = \frac{\sigma B(z)}{1 - B(z)} \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} h_j z^j, \qquad |z| < 1.$$

Tuomet (5) lygtis gali būti užrašyta tokia dviejų lygčių sistema:

$$(a)\ \ Y_k \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} b_j Y_{k-j} + z_k, \qquad (b)\ \ z_k \;=\; \zeta_k\Big(\mu\sigma + \sum_{j=1}^{\infty} h_j z_{k-j}\Big). \tag{6}$$

Atkreipiame dėmesį, kad (6b) lygtyje nėra dydžių Y_k, ir pastaroji lygtis atitinka tiesinį ARCH modelį, dažnai vadinamą LARCH modeliu (jis nagrinėtas daugelyje ankstesnių darbų, pvz., L. Giraičio *et al.* [7], [6]). Remiantis jau žinomais rezultatais, stacionarusis (6b) lygties sprendinys $\{z_k, k \in \mathbb{Z}\}$ yra užrašomas kauzaliąja Volteros eilute triukšmų $\zeta_s, s \leq k$ atžvilgiu:

$$z_k \;=\; \mu\sigma\zeta_k\Big(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s_m < \cdots < s_1 < k} h_{k-s_1} h_{s_1-s_2} \cdots h_{s_{m-1}-s_m} \zeta_{s_1} \cdots \zeta_{s_m}\Big). \tag{7}$$

(7) eilutė konverguoja L^2 erdvėje tada ir tik tada, jeigu

$$\begin{aligned}
\sigma_z^2 = Ez_k^2 &= (\mu\sigma)^2\Big(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s_m<\cdots<s_1<k} h_{k-s_1}^2 h_{s_1-s_2}^2 \cdots h_{s_{m-1}-s_m}^2\Big) \\
&= (\mu\sigma^2)\big(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \|h\|^{2m}\big) < \infty, \qquad (8)
\end{aligned}$$

arba $\|h\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} h_j^2 < 1$, o tai yra ekvivalentu $\|g\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} g_j^2 < (1+\sigma^2)/\sigma^2$. Išsprendus (6b) lygtį, reikia surasti (6a) lygties sprendinį (tai nagrinėjama atskirame disertacijos poskyryje). Kadangi $\theta = \sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1$, minėtoji lygtis yra atskiras tiesinio integruoto AR(∞) (IAR(∞)) modelio, kurio triukšmai yra kauzalieji ir nekoreliuoti $\{z_k, k \in \mathbb{Z}\}$, atvejis, o jo stacionariojo sprendinio egzistavimo sąlygos nurodytos 2 teoremoje. Stacionarusis (5) bitiesinės lygties (ir atitinkamai (4) ARCH lygties) sprendinys gali būti gaunamas apverčiant (6a) lygtį, t. y.

$$\begin{aligned}
Y_k &= (1 - B(L))^{-1} z_k = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z_{k-j} \qquad (9) \\
&= \mu\sigma\Big(\textstyle\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{-\infty<s_m<\cdots<s_1\le k} g_{k-s_1} h_{s_1-s_2} \ldots \cdots h_{s_{m-1}-s_m} \zeta_{s_1} \cdots \zeta_{s_m}\Big).
\end{aligned}$$

Pažymėkime pernešimo funkciją

$$A(x) = (1 - B(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}))^{-1}, \quad B(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}, \qquad x \in \Pi := [-\pi, \pi],$$

ir $\|g\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} g_j^2$, $\|A\|^2 = \int_\Pi |A(x)|^2 \mathrm{d}x$.

1 teorema. *Tarkime, $\omega = 0$, $\theta = \sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1$. Tuomet (4) ARCH lygtis turi netrivialųjį kauzalųjį L^2-sprendinį $\{\tau_k, k \in \mathbb{Z}\}$ tada ir tik tada, jeigu*

$$\|g\|^2 < (1+\sigma^2)/\sigma^2. \qquad (10)$$

Sąlyga (10) yra ekvivalenti sąlygai

$$\|A\|^2 < 2\pi(1+\sigma^2)/\sigma^2. \qquad (11)$$

Jeigu sąlyga (10) arba (11) yra tenkinama, o Y_k yra užrašytas (9) ir (7) pavidalu, tuomet, pasirinkus bet kokį $\mu > 0$, $\{\tau_k = \mu + Y_k, k \in \mathbb{Z}\}$ yra vienintelis kauzalusis (4) lygties L^2-sprendinys, kurio vidurkis yra $E\tau_k = \mu$. Šio sprendinio kovariacinė funkcija yra

$$\operatorname{cov}(\tau_0, \tau_k) = \sigma_z^2 \sum_{j=0}^{\infty} g_j g_{k+j}, \tag{12}$$

čia σ_z^2 yra pateikta (8) lygybėje. Kovariacinė funkcija (12) yra neneigiama, t. y. $\operatorname{cov}(\tau_0, \tau_k) \geq 0$, o kovariacijų eilutė yra diverguojančioji: $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{cov}(\tau_0, \tau_k) = \infty$. Be to, $\{\tau_k, k \in \mathbb{Z}\}$ turi spektrinį tankį

$$f(x) = \mu^2(\sigma_z^2/2\pi)|1 - B(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})|^{-2}, \quad x \in \Pi,$$

kuris yra neaprėžtas: $f(x) \to \infty$, kai $x \to 0$.

Toliau pateikiamas 1 teiginys yra susijęs su FIGARCH modeliu

$$\tau_k \;=\; \varepsilon_k\big\{\omega + \big(1 - (1-L)^d\big)\tau_k\big\} \;=\; \varepsilon_k\left(\omega + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \tau_{k-j}\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

kai $\omega = 0$, o koeficientai b_j turi pavidalą $b_j = -\frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)}$ ir $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1$. Teiginiu nurodomos būtinosios ir pakankamos stacionariojo ilgosios atminties FIGARCH proceso $\{\tau_k, k \in \mathbb{Z}\}$ egzistavimo sąlygos ir parodoma, kad tokio proceso kovariacinė funkcija $\operatorname{cov}(\tau_k, \tau_0)$ gęsta hiperboliškai.

1 teiginys. *FIGARCH modelio (13) su $\omega = 0$ ir $d \in (0, 1/2)$ atveju sąlyga (10) yra ekvivalenti sąlygai*

$$\mathrm{E}\varepsilon_0^2 < \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-2d) - \Gamma^2(1-d)}. \tag{14}$$

Jeigu pastaroji sąlyga tenkinama, tuomet galioja 1 teoremos teiginiai. Be to, kai $k \to \infty$, FIGARCH proceso $\{\tau_k, k \in \mathbb{Z}\}$ su vidurkiu $E\tau_k = \mu$ kovariacinė funkcija ir spektrinis tankis tenkina

$$\operatorname{cov}(\tau_0, \tau_k) \sim \mu^2 c_\gamma k^{-1+2d}, \tag{15}$$

čia $c_\gamma = \sigma_z^2\Gamma(1-2d)/\{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\}$, $\sigma_z^2 = \sigma^2/\big(1+\sigma^2-\sigma^2(\Gamma(1-2d)/\Gamma^2(1-d))\big)$ *ir*

$$f(x) = (\sigma_z^2/2\pi)|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^{-2d} \sim (\sigma_z^2/2\pi)|x|^{-2d}, \quad x \to 0.$$

Tolesniu teiginiu nusakomas FIGARCH proceso dalinių sumų konvergavimas į trupmeninį Brauno judesį. Pažymėkime $\{B_{d+1/2}(t), t \in [0,1]\}$ trupmeninį Brauno judesį su dispersija $EB_{d+1/2}^2(t) = t^{2d+1}$, $d \in (0,\, 1/2)$.

2 teiginys. *Tarkime, kad (10) sąlyga galioja ir* $\{\tau_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *yra FIGARCH procesas. Tuomet*

$$n^{-1/2-d}\sum_{k=1}^{[nt]}(\tau_k - E\tau_k) \to_{D[0,1]} s_d B_{d+1/2}(t), \qquad s_d^2 = \mu^2 c_\gamma/(d(1+2d)).$$

Su atliekamu tyrimu yra susijęs LM(d)–ARCH modelis, kurį 1996 m. aprašė Z. Ding'as ir C. W. J. Granger'is [3]:

$$r_k^2 = \zeta_k^2\sigma_k^2, \quad \sigma_k^2 = \mu(1-\theta) + \theta\left(1-(1-L)^d\right) r_k^2, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

čia $\theta \in [0,1], \mu > 0$. Z. Ding'as ir C. W. J. Granger'is [3] mini, kad atveju $\theta = 1$ (16) lygtis sutampa su FIGARCH modeliu (13), kai $\omega = 0$. Be to, jie teigia, kad stacionarusis (16) lygties sprendinys su baigtiniu ketvirtuoju momentu pasižymi ilgąja atmintimi lėto autokoreliacijų gesimo prasme:

$$\mathrm{corr}(r_0^2, r_k^2) \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)}k^{-1+2d}. \tag{17}$$

R. T. Baillie'io, T. Bollerslev'o ir M. O. Mikkelsen'o [1], kurie laikomi pirmaisiais, aprašiusiais FIGARCH modelį, rezultatai rodo panašų FIGARCH modelio ilgosios atminties elgesį. Vis dėlto pabrėžtina, kad LM(d)–ARCH modelio (16) stacionariojo sprendinio su baigtiniu ketvirtuoju momentu egzistavimas niekada nebuvo įrodytas, taigi ir hipotezė (17) liko nepagrįsta. Disertacijoje pateikiamas galutinis Z. Ding'o ir

C. W. J. Granger'io iškeltos hipotezės (17) įrodymas.

3 teiginys. *Ding'o ir Granger'io (1996) hipotezė (17) apie LM(d)–ARCH modelį (16) yra teisinga tada ir tik tada, jeigu $\theta = 1$ ir $E\zeta_0^4 = E\varepsilon_0^2$ tenkina sąlygą (14).*

Svarbūs atlikto tyrimo rezultatai yra susiję su tiesiniu integruotu AR(∞), arba IAR(∞), modeliu:

$$x_k - \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_{k-j} = \xi_k, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{18}$$

čia b_j yra neneigiami modelio koeficientai, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1$, o $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ – baltasis triukšmas (stacionarioji nekoreliuotų atsitiktinių dydžių, turinčių nuliui lygų vidurkį ir dispersiją $\sigma_\xi^2 = E\xi_0^2 < \infty$, seka).

Kaip ir IARCH(∞) lygties atveju, stacionarusis (18) modelio L^2-sprendinys $\{x_k\}$ nėra vienintelis, jeigu jis egzistuoja: pasirinkus bet kokį μ, $\{x_k + \mu, k \in \mathbb{Z}\}$ taip pat yra lygties (18) L^2-sprendinys. Tokio sprendinio egzistavimas lemia, kad koeficientai b_j negali tapti lygūs nuliui nuo kurio nors (kad ir didelio) j, pvz., vienetinės šaknies modelis $x_k - x_{k-1} = \xi_k$ neturi stacionariojo sprendinio.

2 teorema. *Tarkime, kad $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionarusis procesas, turintis nuliui lygų vidurkį, baigtinę dispersiją ir spektrinį tankį f_ξ, kuris yra aprėžtas:*

$$c_1 \le f_\xi(x) \le c_2, \quad \forall\, x \in \Pi, \qquad \exists\, 0 < c_1 < c_2 < \infty.$$

(a) *sąlyga $\|g\| < \infty$ yra būtina ir pakankama, kad lygties (18) stacionarusis L^2-sprendinys $\{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$ egzistuotų.*

(b) *jeigu $\|g\| < \infty$, tai apibrėžus $\tilde{x}_k = \sum_{j=0}^{\infty} g_j \xi_{k-j}$ ir pasirinkus bet kokį realųjį μ,*

$$x_k = \mu + \tilde{x}_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

yra stacionarusis (18) lygties L^2-sprendinys, turintis vidurkį $Ex_k = \mu$. Šis sprendinys yra vienintelis sprendinys visų stacionariųjų tiesinių procesų $x_k = \mu + \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \xi_{k-j}$ klasėje, kuriems galioja $\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j^2 < \infty$.

(c) *sprendinio x_k, apibrėžto (19) lygybe, kovariacinė funkcija yra neneigiama, o kovariacijų eilutė yra diverguojančioji:*

$$\operatorname{cov}(x_0, x_k) = \sigma_\xi^2 \sum_{j=0}^{\infty} g_j g_{k+j} \geq 0, \qquad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{cov}(x_0, x_k) = \infty. \tag{20}$$

Spektrinis tankis $f(x) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}|1 - B(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|^{-2}$ *yra neaprėžtas* $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

(d) $\|g\| < \infty$ *lemia* $\|A\| < \infty$ *ir lygybes*

$$g_j \;=\; (2\pi)^{-1}\int_\Pi A(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xj}\mathrm{d}x, \quad g_j \;=\; (2\pi)^{-1}\int_\Pi A(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xj}\mathrm{d}x, \quad A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}xj}. \tag{21}$$

Atvirkščiai, $\|A\| < \infty$ *lemia* $\|g\| < \infty$.

Stebinanti 2 teoremos išvada yra tai, kad stacionarusis (18) lygties sprendinys neegzistuoja, jeigu koeficientai b_j tampa lygūs nuliui nuo kurio nors (kad ir didelio) j. Šis faktas nėra akivaizdus, vertinant vien koeficientų g_j išraišką per koeficientus b_j, t. y.

$$g_j \;=\; \sum_{m=1}^{j} \sum_{0<s_{m-1}<\cdots<s_1<j} b_{j-s_1} b_{s_1-s_2} \cdots b_{s_{m-2}-s_{m-1}} b_{s_{m-1}}, \quad j \geq 1, \qquad g_0 = 1,$$

tačiau jis nesunkiai nustatomas remiantis (21) lygybėmis. Iš tikrųjų tai, kad

$$|A(x)|^{-1} = |1 - B(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})| = \Big|\sum_{j=0}^{\infty} b_j(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx})\Big| \leq |x| \sum_{j=1}^{\infty} j|b_j| \leq C|x|,$$

lemia $\int_\Pi |A(x)|^2\mathrm{d}x \geq C^{-2}\int_\Pi x^{-2}\mathrm{d}x = \infty$ ir $\|g\| = \infty$, remiantis (21). Ši išvada matematiškai užrašoma toliau pateikiamu 4 teiginiu.

4 teiginys. *IAR(∞) lygtis (18) neturi stacionariojo L^2-sprendinio, jeigu koeficientai b_j gęsta kaip $j^{-3/2}$ arba greičiau. Pavyzdžiui, tai galioja, jeigu $b_j = 0, j > j_0$, kuriam nors $j_0 \geq 1$ arba $b_j = O(\mathrm{e}^{-cj})$, $j \geq 1, c > 0$.*

Disertacijoje aprašoma ir tiriama nauja IAR procesų $x_k = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_{k-j} + \xi_k$ klasė, kai koeficientai b_j yra gaunami pagal tokį operatorių:

$$B(L) = \big(1 - (1-L)^d\big)P(L) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j L^j, \quad 0 < d < 1/2. \tag{22}$$

Čia $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$ yra generuojančioji funkcija, kurios koeficientai tenkina tokias sąlygas:

$$p_j \geq 0, \quad p_0 > 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \quad \text{ir} \quad \sum_{j=1}^{\infty} j p_j < \infty. \tag{23}$$

Tuomet $b_j = \sum_{k=0}^{j-1} p_k b^0_{j-k}$, čia b^0_j yra koeficientai, gaunami pagal $1 - (1-z)^d = \sum_{j=1}^{\infty} b^0_j z^j$, žr. (13). Vadinasi, (22) lygybės koeficientai b_j yra neneigiami ir jų suma lygi 1. Tokio pavidalo procesai leidžia nesunkiai atskirti jų ilgosios ir trumposios atminties elementus, o tai yra didelis privalumas, palyginti su kitais klasikiniais modeliais (pvz., ARFIMA). Pavyzdžiui, minėto proceso kovariacinė funkcija pasižymi tokia asimptotine savybe: $\mathrm{cov}(x_0, x_k) \sim c_\gamma k^{-1+2d}, k \to \infty$, čia $c_\gamma = \frac{\sigma^2_\xi \Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)}$ yra konstanta. Vadinasi, koeficientai p_j arba (22) lygybės operatorius $P(L)$ iš esmės veikia tik proceso trumposios atminties savybę, o ilgosios atminties nepaveikia. Ši savybė disertacijoje yra tiriama ir pasitelkiant praktinį modeliavimą.

6.2. Kvadratinio ARCH modelio parametrų vertinimas kvazididžiausio tikėtinumo metodu

Disertacijoje siekiama ištirti kvazididžiausio tikėtinumo įvertinio savybes, kai vertinami konkretaus pavidalo asimetrinio ARCH modelio parametrai. Modelis užrašomas tokiu pavidalu:

$$r_t = \zeta_t \sigma_t, \quad \sigma^2_t \; = \; \omega^2 + \Big(a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-j}\Big)^2 + \gamma \sigma^2_{t-1}, \tag{24}$$

čia $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra standartizuotų nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka, $\mathrm{E}\zeta_t = 0, \mathrm{E}\zeta^2_t = 1$, o $\gamma \in [0,1), \omega, a, b_j, j \geq 1$ yra realieji skaičiai (modelio parametrai). (24) lygties sąlyginė dispersija σ^2_t gali būti užrašyta kaip praeities reikšmių $r_s, s < t$ kvadratinė forma:

$$\sigma_t^2(\theta) \;=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma^\ell \Big\{\omega^2 + \Big(a + c\sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} r_{t-\ell-j}\Big)^2\Big\}. \tag{25}$$

Ji priklauso nuo 5 parametrų $\theta = (\gamma, \omega, a, d, c) : 0 < \gamma < 1, \omega > 0, a \neq 0, c \neq 0$ ir $d \in (0, 1/2)$. Koeficientų parametrinė forma $b_j = c\, j^{d-1}$, naudojama lygtyje (25), yra tokia pati kaip ir J. Beran'o ir M. Schützner'io [2] darbe, kuriame nagrinėjamas LARCH modelio parametrų vertinimas. Apibrėžiami trijų rūšių kvazididžiausio tikėtinumo įvertiniai. Pirmasis yra toks:

$$\widehat{\theta}_n := \arg\min_{\theta\in\Theta} L_n(\theta), \quad L_n(\theta) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(\frac{r_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} + \log\sigma_t^2(\theta)\Big). \tag{26}$$

Šiuo atveju taikoma tiksli sąlyginė dispersija (25), priklausanti nuo begalinės praeities $r_s, -\infty < s < t$:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2(\theta) \;&=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma^\ell \big\{\omega^2 + \big(a + cY_{t-\ell}(d)\big)^2\big\}, \qquad \text{čia} \\ Y_t(d) \;&:=\; \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} r_{t-j}. \end{aligned} \tag{27}$$

Tikroviškesnė įvertinio (26) versija yra apibrėžiama taip:

$$\widetilde{\theta}_n := \arg\min_{\theta\in\Theta} \widetilde{L}_n(\theta), \tag{28}$$

čia

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_n(\theta) \;&:=\; \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(\frac{r_t^2}{\widetilde{\sigma}_t^2(\theta)} + \log\widetilde{\sigma}_t^2(\theta)\Big), \\ \widetilde{\sigma}_t^2(\theta) \;&:=\; \sum_{\ell=0}^{t-1} \gamma^\ell \big\{\omega^2 + \big(a + c\widetilde{Y}_{t-\ell}(d)\big)^2\big\}, \quad \widetilde{Y}_t(d) \;:=\; \sum_{j=1}^{t-1} j^{d-1} r_{t-j}. \end{aligned} \tag{29}$$

Visi (29) lygybės dydžiai priklauso tik nuo $r_s, 1 \le s \le n$, todėl (28) įvertinys paprastai yra vadinamas baigtinės praeities įvertiniu. Didžiausio tikėtinumo funkcijos

(26) ir (29) gali būti užrašytos tokiu pavidalu:

$$L_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} l_t(\theta) \quad \text{ir} \quad \widetilde{L}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \widetilde{l}_t(\theta),$$

čia

$$l_t(\theta) := \frac{r_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} + \log\sigma_t^2(\theta), \qquad \widetilde{l}_t(\theta) := \frac{r_t^2}{\widetilde{\sigma}_t^2(\theta)} + \log\widetilde{\sigma}_t^2(\theta). \tag{30}$$

Remiantis J. Beran'u ir M. Schützner'iu [2], apibrėžiama atskira baigtinės praeities įvetinio (28) versija, įtraukiant tik paskutinius $O(n^\beta)$ kvazitikėtinumus $\widetilde{l}_t(\theta), n - [n^\beta] < t \le n$, tokiu būdu:

$$\widetilde{\theta}_n^{(\beta)} := \arg\min_{\theta\in\Theta} \widetilde{L}_n^{(\beta)}(\theta), \qquad \widetilde{L}_n^{(\beta)}(\theta) \ := \ \frac{1}{[n^\beta]}\sum_{t=n-[n^\beta]+1}^{n} \widetilde{l}_t(\theta), \tag{31}$$

čia $0 < \beta < 1$ yra parametras, kuriuo nustatoma, kiek kvazitikėtinumų bus įtraukiama į (31) lygybės sumą. Įvertinio $\widetilde{\theta}_n$ konvergavimo greitis per mažas, kad būtų galima įrodyti asimptotinio normalumo savybę. Būtent dėl šios priežasties nagrinėjamas įvertinys $\widetilde{\theta}_n^{(\beta)}$.

Pažymėkime $L(\theta) := \mathrm{E}L_n(\theta) = \mathrm{E}l_t(\theta)$ ir

$$A(\theta) \ := \ \mathrm{E}\left[\nabla^T l_t(\theta)\nabla l_t(\theta)\right], \qquad B(\theta) \ := \ \mathrm{E}\left[\nabla^T\nabla l_t(\theta)\right], \tag{32}$$

čia $\nabla = (\partial/\partial\theta_1, \cdots, \partial/\partial\theta_5)$, o T žymi transponuotą vektorių. $A(\theta)$ ir $B(\theta)$ yra 5×5– matricos. Lygybėse (32) esantys vidurkiai yra tinkamai apibrėžti kiekvienam $\theta \in \Theta$, jeigu $\mathrm{E}r_0^4 < \infty$. Be to,

$$B(\theta) \ = \ \mathrm{E}[\sigma_t^{-4}(\theta)\nabla^T\sigma_t^2(\theta)\nabla\sigma_t^2(\theta)] \quad \text{ir} \quad A(\theta) = \kappa_4 B(\theta), \tag{33}$$

čia $\kappa_4 := \mathrm{E}(\zeta_0^2 - 1)^2 > 0$.

3 teorema. (a) *Tarkime,* $\mathrm{E}|r_t|^3 < \infty$. *Tuomet* $\widehat{\theta}_n$*, apibrėžtas (26) lygybe, yra stipriai suderintas* θ_0 *įvertinys, t. y.*

$$\widehat{\theta}_n \overset{b.t.}{\to} \theta_0.$$

čia $\overset{b.t.}{\to}$ *žymi konvergavimą „beveik tikrai“.*

(b) *Tarkime,* $\mathrm{E}|r_t|^5 < \infty$. *Tuomet* $\widehat{\theta}_n$ *yra asimptotiškai normalusis:*

$$n^{1/2}\big(\widehat{\theta}_n - \theta_0\big) \;\to\; N(0, \Sigma(\theta_0)), \tag{34}$$

čia turimas omenyje konvergavimas pagal skirstinį, $\Sigma(\theta_0) := B^{-1}(\theta_0)A(\theta_0)B^{-1}(\theta_0) = \kappa_4 B^{-1}(\theta_0)$, *o matricos* $A(\theta), B(\theta)$ *yra apibrėžtos (33) lygybėmis.*

4 teoremoje nurodomos baigtinės praeities įvertinių $\widetilde{\theta}_n$ ir $\widetilde{\theta}_n^{(\beta)}$ (apibrėžtų atitinkamai (28) ir (31) lygybėmis) savybės.

4 teorema. (a) *Tarkime, kad* $\mathrm{E}|r_t|^3 < \infty$ *ir* $0 < \beta < 1$. *Tuomet*

$$\mathrm{E}|\widetilde{\theta}_n - \theta_0| \;\to\; 0 \qquad \textit{ir} \qquad \mathrm{E}|\widetilde{\theta}_n^{(\beta)} - \theta_0| \;\to\; 0.$$

(b) *Tarkime, kad* $\mathrm{E}|r_t|^5 < \infty$ *ir* $0 < \beta < 1 - 2d_0$. *Tuomet*

$$n^{\beta/2}(\widetilde{\theta}_n^{(\beta)} - \theta_0) \;\to\; N(0, \Sigma(\theta_0)), \tag{35}$$

čia turimas omenyje konvergavimas skirstinio prasme, o $\Sigma(\theta_0)$ *yra tokia pat, kaip ir 3 teoremoje.*

Tiriant minėtų įvertinių savybes, nemažai dėmesio buvo skirta praktiniam teorinių rezultatų tikrinimui. Taikant nepriklausomus ir vienodai pasiskirsčiusius atsitiktinius dydžius $\{\zeta_t\}$, turinčius standartinį normalųjį skirstinį, buvo generuojamos (24) lygtimis aprašyto modelio reikšmės $r_t, -m+1 \le t \le m$. Pasirinkta pradinė sąlyga $\sigma_{-m} = 0$. Be to, siekiant įvertinti, kaip kinta įvertinių tikslumas, priklausomai nuo imties dydžio, procesas buvo generuojamas dviem skirtingais atvejais – kai imties dydis yra $m = 1000$ ir $m = 5000$.

Optimizavimo procedūros metu siekta minimizuoti tokią kvazididžiausio tikėtinumo funkciją:

$$\widetilde{L}_m = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\left(\frac{r_t^2}{\sigma_t^2} + \log\sigma_t^2\right), \tag{36}$$

čia

$$r_t = \zeta_t \sigma_t, \quad \sigma_t^2 = \omega^2 + \Big(a + c \sum_{j=1}^{t+m-1} j^{d-1} r_{t-j}\Big)^2 + \gamma \sigma_{t-1}^2, \quad t = 1, \cdots, m. \qquad (37)$$

(36) lygybėje esančią kvazididžiausio tikėtinumo funkciją galima vertinti kaip funkcijos $\widetilde{L}_n(\theta)$, apibrėžtos (31) lygybe, kur $m = n^\beta$, „tikrovišką aproksimaciją“. Iš tikrųjų lygybėje (36), skaičiuojant m tikėtinumų, yra naudojami ne tik dydžiai $r_1, \cdots, r_m$, bet ir ankstesnės pagalbinės proceso reikšmės, panašiai kaip ir (31) įvertinio atveju. Vis dėlto pabrėžtina, kad pagalbinių reikšmių skaičius (36) lygybėje yra lygus m ir nedidėja greičiu $m^{1/\beta} = n, 0 < \beta < 1 - 2d < 1$, kaip kad tai numato 4 teoremos (b) dalis. Praktiniams taikymams įvertinys $\widetilde{\theta}_n^{(\beta)}$ yra mažiau patogus, nes iš anksto turi būti žinoma, kokį $\beta < 1 - 2d_0$ pasirinkti, be to, proceso realizacija turi būti labai ilga. Vis dėlto, nors šiuose praktiniuose skaičiavimuose netenkinama 4 teoremos (b) dalies sąlyga $m = n^\beta$, rezultatai rodo, kad skirtumai tarp įverčių empirinių paklaidų ir atitinkamų teorinių stadartinių nuokrypių yra gana nedideli, o kai kuriais atvejais apskritai nereikšmingi. Skaičiavimų rezultatai yra pateikti 1 lentelėje. Joje (ne skliaustuose) esantys skaičiai rodo empirines vidutines kvadratines kvazididžiausio tikėtinumo įverčių $\widetilde{\theta}_m = (\widetilde{\gamma}_m, \widetilde{\omega}_m, \widetilde{a}_m, \widetilde{d}_m, \widetilde{c}_m)$ paklaidas. Šie įverčiai buvo gauti, optimizavimo procedūrą taikant kiekvienai iš 100 nepriklausomų imčių. Generuojant procesą pagal (37) lygtį, buvo pasirinktos konkrečios „tikrosios“ parametrų $\theta_0 = (\gamma_0, \omega_0, a_0, d_0, c_0)$ reikšmės: $\gamma_0 = 0,7, a_0 = -0,2, c_0 = 0,2$, ir keletas skirtingų $\omega_0 = 0,1,\ 0,01$ bei ilgosios atminties parametro reikšmių $d_0 = 0,1,\ 0,2,\ 0,3,\ 0,4$. Empirinės kvadratinės įverčių paklaidos 1 lentelėje yra lyginamos su teoriniais standartiniais begalinės praeities įvertinio nuokrypiais, gautais iš 3 teoremos (b) dalyje pateiktos matricos $\Sigma(\theta_0)$, apverčiant sugeneruotą matricą $B(\theta_0)/\kappa_4$.

Matyti, kad bendru atveju 1 lentelėje esantys teoriniai standartiniai nuokrypiai yra mažesni už empirines įverčių paklaidas. Šie skirtumai tampa mažesni, imties dydžiui m padidėjus, o kai kuriais atvejais (pvz., kai $\omega_0 = 0,1, m = 5000$) jie apskritai atrodo nereikšmingi. Kai kurios 1 lentelėje išryškėjančios tendencijos yra netikėtos, pvz., teorinių standartinių nuokrypių (ir daugelio empirinių paklaidų) mažėjimas, kai parametro d_0 reikšmė didėja. Taip pat pastebimas staigus $\widehat{\omega}_n$ padidėjimas, kai

1 lentelė. *Įvertinio $\widetilde{\theta}_m$, apibrėžto* (36) *lygybe, empirinės kvadratinės paklaidos ir (skliaustuose) teoriniai standartiniai nuokrypiai, apskaičiuoti taikant 3 teoremoje pateiktą matricą* $\Sigma(\theta_0)$

		$\omega_0 = 0,1$				
m	d_0	$\widetilde{\gamma}_m$	$\widetilde{\omega}_m$	$\widetilde{a}_m$	$\widetilde{d}_m$	$\widetilde{c}_m$
1000	0,1	$0,076$ (0,053)	$0,046$ (0,037)	$0,032$ (0,023)	$0,090$ (0,079)	$0,027$ (0,031)
	0,2	$0,051$ (0,048)	$0,043$ (0,027)	$0,027$ (0,020)	$0,076$ (0,060)	$0,030$ (0,027)
	0,3	$0,069$ (0,043)	$0,033$ (0,018)	$0,026$ (0,017)	$0,063$ (0,041)	$0,030$ (0,022)
	0,4	$0,047$ (0,039)	$0,028$ (0,013)	$0,025$ (0,015)	$0,043$ (0,029)	$0,022$ (0,019)
5000	0,1	$0,023$ (0,024)	$0,018$ (0,016)	$0,011$ (0,010)	$0,035$ (0,033)	$0,014$ (0,014)
	0,2	$0,020$ (0,021)	$0,011$ (0,011)	$0,010$ (0,009)	$0,028$ (0,021)	$0,012$ (0,012)
	0,3	$0,019$ (0,019)	$0,010$ (0,008)	$0,010$ (0,008)	$0,020$ (0,013)	$0,010$ (0,010)
	0,4	$0,022$ (0,017)	$0,007$ (0,005)	$0,011$ (0,007)	$0,014$ (0,009)	$0,010$ (0,008)

		$\omega_0 = 0,01$				
m	d_0	$\widetilde{\gamma}_m$	$\widetilde{\omega}_m$	$\widetilde{a}_m$	$\widetilde{d}_m$	$\widetilde{c}_m$
1000	0,1	$0,060$ (0,046)	$0,040$ (0,296)	$0,020$ (0,019)	$0,073$ (0,071)	$0,022$ (0,029)
	0,2	$0,044$ (0,040)	$0,035$ (0,203)	$0,020$ (0,016)	$0,073$ (0,048)	$0,022$ (0,024)
	0,3	$0,045$ (0,033)	$0,028$ (0,117)	$0,018$ (0,012)	$0,044$ (0,029)	$0,020$ (0,019)
	0,4	$0,040$ (0,025)	$0,038$ (0,047)	$0,024$ (0,009)	$0,034$ (0,016)	$0,020$ (0,013)
5000	0,1	$0,021$ (0,020)	$0,032$ (0,125)	$0,009$ (0,008)	$0,031$ (0,028)	$0,013$ (0,013)
	0,2	$0,018$ (0,017)	$0,024$ (0,085)	$0,007$ (0,007)	$0,020$ (0,018)	$0,010$ (0,011)
	0,3	$0,019$ (0,015)	$0,021$ (0,046)	$0,008$ (0,006)	$0,013$ (0,011)	$0,008$ (0,009)
	0,4	$0,016$ (0,012)	$0,013$ (0,017)	$0,007$ (0,004)	$0,011$ (0,006)	$0,009$ (0,006)

$\omega_0 = 0,01$. Jis gali būti paaiškintas tuo, kad išvestinė $\partial_\omega \sigma_t^2(\theta_0) = 2\omega_0/(1-\gamma_0)$ yra tuo mažesnė, kuo mažesnė yra parametro ω_0 reikšmė, o tai lemia mažas atitinkamų matricos $B(\theta_0)$ elementų reikšmes ir dideles matricos $\Sigma(\theta_0)$ elementų reikšmes.

6.3. Apibendrintasis netiesinis ilgosios atminties sąlyginio heteroskedastiškumo modelis

Šiame poskyryje pristatomi pagrindiniai rezultatai, susiję su netiesiniu ilgosios atminties ARCH tipo modeliu

$$r_t = \zeta_t \sigma_t, \qquad \sigma_t^2 = Q^2\left(a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-j}\right) + \gamma \sigma_{t-1}^2, \tag{38}$$

čia $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra standartizuoti nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, $a, b_j, 0 < \gamma < 1$ – modelio parametrai, o $Q(x), x \in \mathbb{R}$ yra Lipschitz'o funkcija.

Pažymėkime $|\mu|_p := \mathrm{E}|\zeta_0|^p$ $(p > 0)$, $\mu_p := \mathrm{E}\zeta_0^p$ $(p = 1, 2, \dots)$ ir

$$X_t \ := \ \sum_{s<t} b_{t-s} r_s. \tag{39}$$

Kadangi $0 \le \gamma < 1$, (38) lygybės lemia tokias išraiškas:

$$\sigma_t^2 \ = \ \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma^\ell Q^2(a + X_{t-\ell}) \quad \text{ir} \quad r_t \ = \ \zeta_t \sqrt{\sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma^\ell Q^2(a + X_{t-\ell})}. \tag{40}$$

Kitaip tariant, stacionarusis lygties (38) sprendinys, arba

$$r_t \ = \ \zeta_t \sqrt{\sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma^\ell Q^2\Big(a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-\ell-j}\Big)}, \tag{41}$$

gali būti apibrėžtas (39) lygybėje nurodyto dydžio terminais, t. y. per stacionarųjį sprendinį

$$X_t \ := \ \sum_{s<t} b_{t-s} \zeta_s \sqrt{\sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma^\ell Q^2(a + X_{s-\ell})}, \tag{42}$$

ir atvirkščiai.

Pažymėkime

$$B_p := \begin{cases} \sum_{j=1}^\infty |b_j|^p, & 0 < p < 2, \\ \big(\sum_{j=1}^\infty b_j^2\big)^{p/2}, & p \ge 2, \end{cases} \qquad B_{p,\gamma} := \begin{cases} B_p/(1 - \gamma^{p/2}), & 0 < p < 2, \\ B_p/(1 - \gamma)^{p/2}, & p \ge 2. \end{cases}$$

Sprendinio egzistavimo sąlygoms aprašyti reikalinga tokia momentų nelygybė (žinoma iš ankstesnių rezultatų).

5 teiginys. *Tarkime,* $\{Y_j, j \ge 1\}$ *yra tokių atsitiktinių dyžių seka, kad* $\mathrm{E}|Y_j|^p < \infty$ *kokiam nors* $p > 0$*. Jeigu* $p > 1$*, reikia dar vienos sąlygos – kad* $\{Y_j\}$ *būtų martingalinių skirtumų seka:* $\mathrm{E}[Y_j | Y_1, \dots, Y_{j-1}] = 0$, $j = 2, 3, \dots$ *Tuomet egzistuoja* *tokia konstanta $K_p \geq 1$, priklausanti tik nuo p, kad*

$$\mathrm{E}\left|\sum_{j=1}^{\infty} Y_j\right|^p \;\leq\; K_p \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}|Y_j|^p, & 0 < p \leq 2, \\ \big(\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{E}|Y_j|^p)^{2/p}\big)^{p/2}, & p > 2. \end{cases} \tag{43}$$

Toliau pateikiamos dvi teoremos apie (38) stacionariojo sprendinio egzistavimą.

5 teorema. *Tarkime, $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su $|\mu|_p = \mathrm{E}|\zeta_0|^p < \infty$, tenkinanti $\mathrm{E}\zeta_0 = 0$, $p > 1$, o funkcija Q tenkina Lipschitz'o sąlygą $|Q(x) - Q(y)| \leq \mathrm{Lip}_Q|x - y|, x, y \in \mathbb{R}$.*

(a) *Tegul $p > 0$ ir*

$$K_p^{1/p}\, |\mu|_p^{1/p}\, \mathrm{Lip}_Q\, B_{p,\gamma}^{1/p} < 1, \tag{44}$$

čia K_p yra konstanta iš (43) nelygybės. Tuomet egzistuoja vienintelis stacionarusis (42) lygties L^p-sprendinys $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ ir

$$\mathrm{E}|X_t|^p \;\leq\; \frac{C(p,Q)|\mu|_p B_p}{1 - K_p|\mu|_p \mathrm{Lip}_Q^p B_{p,\gamma}}, \tag{45}$$

čia $C(p,Q) < \infty$ priklauso tik nuo p ir c_1, c_2 nelygybėje $Q^2(x) \leq c_1^2 + c_2^2 x^2, x \in \mathbb{R}$.

(b) *Tarkime, kad $Q^2(x) = c_1^2 + c_2^2 x^2$, čia $c_i \geq 0, i = 1, 2$, ir $\mu_2 = \mathrm{E}\zeta_0^2 = 1$. Tuomet $c_2^2 B_{2,\gamma} < 1$ yra būtina ir pakankama sąlyga, kad egzistuotų lygties (42) stacionarusis L^2-sprendinys $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ su $a \neq 0$.*

6 teorema. *Tarkime, kad $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ ir Q yra tokie pat kaip ir 5 teoremoje. Tegul $p = 2, 4, \ldots,$ yra lyginis skaičius ir*

$$\sum_{j=2}^{p} \binom{p}{j} |\mu_j| \mathrm{Lip}_Q^j \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^j \;<\; (1 - \gamma)^{p/2}. \tag{46}$$

Tuomet egzistuoja vienintelis stacionarusis lygties (42) L^p-sprendinys $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Kitos dvi teoremos yra susijusios su ilgosios atminties savybe ir sverto efektu, kai lygties (38) funkcija Q turi tokį pavidalą: $Q(x) = \sqrt{c^2 + x^2}$. T. y.:

$$r_t \;=\; \zeta_t \sqrt{\sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma^{\ell} \Big(c^2 + \big(a + \sum_{s<t-\ell} b_{t-\ell-s} r_s \big)^2 \Big)}, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{47}$$

čia $0 \le \gamma < 1, a \ne 0, c$ yra realieji parameterai, $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra standartizuoti nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, o $b_j, j \ge 1$, realieji skaičiai, tenkina

$$b_j \;\sim\; \beta j^{d-1} \;\; (\exists\, 0 < d < 1/2, \; \beta > 0). \tag{48}$$

7 teorema. *Tarkime, $\{r_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionarusis lygčių (47)–(48) L^2-sprendinys. Taip pat tegul $\mu_4 = \mathrm{E}[\zeta_0^4] < \infty$, ir $\mathrm{E}[r_t^4] < \infty$. Tuomet*

$$\mathrm{cov}(r_0^2, r_t^2) \;\sim\; \kappa_1^2 t^{2d-1}, \qquad t \to \infty, \tag{49}$$

čia $\kappa_1^2 := \big(\frac{2a\beta}{1-\gamma-B_2}\big)^2 B(d, 1-2d)\mathrm{E}r_0^2$. Be to,

$$n^{-d-1/2} \sum_{t=1}^{[n\tau]} (r_t^2 - \mathrm{E}r_t^2) \;\to_{D[0,1]}\; \kappa_2 B_{d+(1/2)}(\tau), \qquad n \to \infty, \tag{50}$$

čia $B_{d+(1/2)}$ yra trupmeninis Brauno judesys su Hurst'o parametru $H = d + (1/2) \in (1/2, 1)$ ir $\kappa_2^2 := \kappa_1^2/(d(1+2d))$, o $B(\cdot,\cdot)$ žymi Beta funkciją.

Nagrinėkime modelio (47) su $\mathrm{E}\zeta_t = \mathrm{E}\zeta_t^3 = 0, \mathrm{E}\zeta_t^2 = 1$ sverto funkciją $h_t = \mathrm{cov}(\sigma_t^2, r_0) = \mathrm{E}r_t^2 r_0,\ t \ge 1$. Remdamiesi L. Giraičiu *et al.* [6], ir P. Doukhan'u *et al.* [4], teigiame, kad procesas $\{r_t, t \in \mathbb{Z}\}$, tenkinantis (47) lygtį, *pasižymi $k \ge 1$ eilės sverto efektu* (žymima $\{r_t\} \in \ell(k)$), jeigu

$$h_j < 0, \qquad 1 \le j \le k.$$

6 teiginys. *Tarkime, $\{r_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionarusis (47) lygties L^2-sprendinys su $\mathrm{E}|r_0|^3 < \infty,\ |\mu|_3 < \infty$. Be to, tegul $B_{2,\gamma} < 1/5$, $\mu_3 = \mathrm{E}\zeta_0^3 = 0$. Tuomet kiekvienam fiksuotam k, $1 \le k \le \infty$, galioja:*

(a) jeigu $ab_1 < 0$, $ab_j \leq 0, j = 2, \ldots, k$, *tai* $\{r_t\} \in \ell(k)$*;*

(b) jeigu $ab_1 > 0$, $ab_j \geq 0, j = 2, \ldots, k$, *tai* $h_j > 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Čia užbaigiame pagrindinių tyrimo rezultatų aprašymą.

Literatūra

[1] R. T. Baillie, T. Bollerslev, H. O. Mikkelsen. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 74, 3–30, 1996.

[2] J. Beran, M. Schützner. On approximate pseudo-maximum likelihood estimation for LARCH-processes. *Bernoulli*, 15, 1057–1081, 2009.

[3] Z. Ding, C. W. J. Granger. Modelling volatility persistence of speculative returns: A new approach. *Journal of Econometrics*, 73, 185–215, 1996.

[4] P. Doukhan, I. Grublytė, D. Surgailis. A nonlinear model for long memory conditional heteroscedasticity. *Lithuanian Mathematical Journal*, 56, 164–188, 2016.

[5] R. F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 987–1008, 1982.

[6] L. Giraitis, R. Leipus, P. M. Robinson, D. Surgailis. LARCH, leverage and long memory. *Journal of Financial Econometrics*, 2, 177–210, 2004.

[7] L. Giraitis, P. M. Robinson, D. Surgailis. A model for long memory conditional heteroscedasticity. *The Annals of Applied Probability*, 10, 1002–1024, 2000.

[8] L. Giraitis, D. Surgailis. ARCH-type bilinear models with double long memory. *Stochastic Processes and their Applications*, 100, 275–300, 2002.

Publikacijos ir mokslinių rezultatų sklaida

Pagrindiniai darbo rezultatai yra pateikti šiuose trijuose straipsniuose:

- L. Giraitis, D. Surgailis, A. Škarnulis. *Stationary integrated ARCH(∞) and AR(∞) processes with finite variance.* Pateiktas spaudai, 2017;
- I. Grublytė, D. Surgailis, A. Škarnulis. QMLE for quadratic ARCH model with long memory. *Journal of Time Series Analysis.* 2016. doi: 10.1111/jtsa.12227;
- I. Grublytė, A. Škarnulis. A nonlinear model for long memory conditional heteroscedasticity. *Statistics.* 51, 123–140, 2017.

Darbo rezultatai taip pat buvo pristatyti šiose tarptautinėse konferencijose:

- *8th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics/9th International Conference on Computational and Financial Econometrics*, 2015 m. gruodžio 12–14 d., Londono Universitetas. Pristatymo pavadinimas: *Quasi-MLE for quadratic ARCH model with long memory*;
- *NBER-NSF Time Series Conference*, 2015 m. rugsėjo 25–26 d., Vienos Ekonomikos ir verslo universitetas. Pristatymo pavadinimas: *Integrated AR and ARCH processes and the FIGARCH model: Origins of long memory*;
- *11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, 2014 m. birželio 29 d.–liepos 1 d., Vilniaus universitetas. Pristatymo pavadinimas: *An autoregressive conditional duration model and the FIGARCH equation.*

Apie autorių

Andrius Škarnulis gimė 1987 m. Kalvarijos gimnaziją (Marijampolės apskr.) baigė 2006 m. (su pagyrimu). 2006–2010 m. studijavo finansų ir draudimo matematiką Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, įgijo statistikos bakalauro laipsnį. Nuo 2010 m. studijavo tame pačiame fakultete magistrantūroje, 2012 m. įgijo finansų ir draudimo matematikos magistro laipsnį (*Cum Laude*). 2012–2016 m. studijavo Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto doktorantūroje, parengė straipsnių disertacijos tema.

Summary

This dissertation focuses on quadratic ARCH models with long memory. We investigate the existence of their stationary solutions and consider the properties of these solutions, including long memory and leverage. The QML parameter estimation is also under the scope of this dissertation. Theoretical results are combined with practical simulations and are divided in three main chapters. The context and the main goals of dissertation are provided in the Introduction. Preliminaries and short discussion on the main concepts related to the dissertation problems are given in the Background part.

In the third chapter of the dissertation we find the necessary and sufficient conditions for the existence of a long memory stationary solution to the integrated ARCH(∞) (or IARCH(∞)), IAR(∞) and FIGARCH models. We give the final answer to the long standing conjecture of Ding and Granger (1996) about the existence of a stationary Long Memory ARCH process with the finite fourth moment. This result follows from the necessary and sufficient conditions for the existence of covariance stationary integrated AR(∞), ARCH(∞) and FIGARCH models obtained in the present dissertation. We also prove that such processes always have long memory. The new class of IAR(∞) models with attractive features for covariance modeling is investigated.

In the fourth chapter the QML estimation for the 5-parametric generalized quadratic ARCH model with long memory and strictly positive conditional variance is considered. We prove consistency and asymptotic normality of the corresponding QML estimates, including the estimate of long memory parameter $0 < d < 1/2$. A simulation study of empirical MSE is included. In the simulation experiment, we study the empirical performance of a more realistic version of the estimator and show that the empirical RMSEs of this estimator reflect a good agreement with the theoretical standard deviations.

In the fifth chapter we study the existence and properties of a stationary solution of the ARCH-type equation $r_t = \zeta_t \sigma_t$, where the conditional variance satisfies $\sigma_t^2 = Q^2\big(a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-j}\big) + \gamma \sigma_{t-1}^2$ with a Lipschitz function $Q(x)$ and real parameters a, γ, b_j.

We obtain conditions for the existence of a stationary solution and, in particular, when Q is the square root of a quadratic polynomial, we prove that r_t can exhibit a leverage effect and long memory.

Andrius Škarnulis

KVADRATINIAI ILGOSIOS ATMINTIES ARCH MODELIAI IR PARAMETRŲ VERTINIMAS KVAZIDIDŽIAUSIO TIKĖTINUMO METODU

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai

Matematika (01 P)

Andrius Škarnulis

QUADRATIC ARCH MODELS WITH LONG MEMORY AND QML ESTIMATION

Summary of Doctoral Dissertation

Physical Sciences

Mathematics (01 P)