VILNIAUS UNIVERSITETAS

RAIMONDAS MALUKAS

RIBINĖS TEOREMOS GAUSO PROCESŲ H-VARIACIJAI

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2015

Disertacija rengta 2011–2015 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas

prof. habil. dr. Rimas Norvaiša (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. dr. Mark Podolskij (Aarhus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2015 m. lapkričio 12 d. 13 val. VU Matematikos ir informatikos institute, 203 a., Akademijos g. 4.
Adresas: Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2015 m. spalio 12 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: *www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.*

VILNIUS UNIVERSITY

RAIMONDAS MALUKAS

LIMIT THEOREMS FOR H-VARIATION OF GAUSSIAN PROCESSES

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2015

Doctoral dissertation was written in 2011–2015 at Vilnius University.

Scientific supervisor

prof. habil. dr. Rimas Norvaiša (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Dissertation will be defended at Vilnius University Mathematics research council:

Chairman

prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Members:

prof. dr. Mark Podolskij (Aarhus University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the Mathematics research council on November 12, 2015 in Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics, lecture room 203, Akademijos st. 4 at 13 pm.

Address: Akademijos st. 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on 12 October, 2015.

The dissertation is available at the library of Vilnius University and VU website:

www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

1 Įžanga

Disertacijoje, kuri pristatoma šioje santraukoje, nagrinėjamos Gauso procesų trajektorijų charakteristikos. Mus dominančios chrakteristikos yra taip vadinamos proceso H-variacijos, kurias toliau ir apibrėšime. Tegu $T > 0$ ir $G := \{G(t) : t \in [0,T]\}$ yra nulinio vidurkio Gauso stochastinis procesas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, su prieaugių standartinių nuokrypių funkcija $\sigma_G(s,t) := (\mathbf{E}[G(t)-G(s)]^2)^{1/2}$, $s,t \in [0,T]$. Tegu $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ yra didėjanti ir neaprėžta teigiamų sveikųjų skaičių seka. Visiems $n \in \mathbb{N}$, $t_i^n := iT/m_n,\ i = 0,\ldots,m_n$, yra taškai, pasiskirstę vienodais atstumais intervale $[0,T]$ ir sudarantys jo reguliarų skaidinį, kurio smulkis yra $\Delta_n := T/m_n = t_i^n - t_{i-1}^n \to 0$, kai $n \to \infty$. Duotai funkcijai $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžiame

$$V_n := V(G,H,m_n) := \sum_{i=1}^{m_n} H\left(\frac{G(t_i^n) - G(t_{i-1}^n)}{\sigma_G(t_i^n, t_{i-1}^n)}\right),$$

ir vadiname *proceso G H-variacija.* Kai $H(x) = |x|^r,\ x \in \mathbb{R}$, su kuriuo nors $r > 0$, V_n dažniausiai vadinamas *proceso G r-tojo laipsnio variacija.* Šį atskirą atvejį žymėsime $V_n^{(r)}$. Mus domina statistikos V_n ribinis elgesys, kai $n \to \infty$.

Jei, papildomai, tam tikrai funkcijai $\rho : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\sigma_G(s,t)$ reikšmės yra arti (tam tikra prasme) $\rho(|t-s|)$ reikšmių, kai $t \to s$ tolygiai visiems $s \in (0,T]$, tai galime nagrinėti kitaip normuotą statistiką

$$\widetilde{V}_n := \widetilde{V}(G,H,\rho,m_n) := \sum_{i=1}^{m_n} H\left(\frac{G(t_i^n) - G(t_{i-1}^n)}{\rho(\Delta_n)}\right),$$

vadinamą *proceso G H-variacija su svoriais.* Kaip ir prieš tai, $\widetilde{V}_n^{(r)}$ žymės atskirą $\widetilde{V}_n$ atvejį, kai $H(x) = |x|^r,\ x \in \mathbb{R}$, kuriam nors $r > 0$.

Disertacijoje taip pat nagrinėjami dalinių sumų procesai, susiję su V_n. Tiksliau, visiems $n \geq 1$ apibrėžkime funkcijas $Y^n : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ su reikšmėmis

$$Y_t^n(G,H) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \left[H\left(\frac{G(t_i^n) - G(t_{i-1}^n)}{\sigma_G(t_i^n, t_{i-1}^n)}\right) - \mathbf{E}H(Z)\right]$$

$t \in [0,1]$. Šiuo atveju siekiama įrodyti invariantiškumo principą dalinių sumų procesams Y^n.

Procesų H-variacijos analizė pradėta nuo žymios P. Lévy teoremos apie standartinio Brauno judesio kvadratinės variacijos konvergavimą beveik tikrai. Vėlesniuose kitų mokslininkų darbuose ši teorema buvo išplėsta daugeliu krypčių, ir šioje disertacijoje pateikiami keli nauji šios teoremos apibendrinimai.

2 Disertacijos mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertacijos tyrimų objektas yra Gauso proceso, neturinčio stacionarių prieaugių, H-variacija ir H-variacija su svoriais. Disertacijos mokslinė problema yra šių statistikų ribinio pasiskirstymo radimas, konvergavimo į ribinį dėsnį greičio radimas, bei invariantiškumo principo įrodymas dalinių sumų procesui.

3 Pagrindiniai uždaviniai

Disertacijoje nagrinėjami šie uždaviniai:

1. **Centrinė ribinė teorema.** Antrajame disertacijos skyriuje nagrinėjami dydžiai V_n bei $\widetilde{V}_n$. Pagrindinis skyriaus uždavinys yra įrodyti, kad ribinis šių dydžių pasiskirstymas, kai $n \to \infty$, yra standartinis normalusis. Šiame skyriuje pateikiamas pastarojo fakto įrodymas. Ši teorema gali būti palyginta su Breuer ir Major, Guyon ir Leon, Corcuera ir kt. bei Barndorff-Nielsen ir kt. darbais, kuriuose gauti centrinių ribinių teoremų rezultatai yra jos atskiri atvejai.

2. **Konvergavimo greitis centrinėje ribinėje teoremoje.** Trečiajame skyriuje nagrinėjamos bendros svorinės H-sumos Gauso proceso standartizuotus prieaugius statistikoje V_n pakeitus bet kokiais standartiniais Gauso dydžiais. Nagrinėjamas tokių sumų konvergavimo į normalųjį dydį greitis. Viename iš šio skyriaus rezultatų šis greitis yra įrodomas gana plačiai funkcijų H klasei.

3. **Funkcinė centrinė ribinė teorema dalinių sumų procesui.** Trečiajame skyriuje taip pat nagrinėjamas funkcinis statistikos Y^n konvergavimas. Gautas rezultatas apibendrina kai kuriuos Corcuera ir kt. bei Barndorff-Nielsen ir kt. rezultatus bei galioja gana plačiai funkcijų H klasei.

4. **Gautų rezultatų pritaikymas konkretiems Gauso procesams.** Ketvirtajame skyriuje gauti rezultatai pritaikomi trupmeninio, subtrupmeninio ir bitrupmeninio Brauno judesio procesams, taip pat procesams su stacionariais prieaugiais ir reguliariai kintančia koreliacine funkcija bei procesams su lokaliai stacionariais prieaugiais. Remiantis kitų autorių rezultatais, kai kuriais atvejais gauti konvergavimo centrinėje ribinėje teoremoje greičiai yra optimalūs.

4 Tyrimų metodika

Gauso procesų H-variacijos analizėje naudojami metodai iš įvarių matematikos sričių. Keletas iš jų panaudoti ir šiame darbe, trumpai juos apžvelgsime.

Vieną pagrindinių vietų visų teiginių įrodymuose užima rezultatai ir metodai, taikomi naudojant Malliavin'o analizę. Ji ypač naudinga nagrinėjant sudėtingesnes funkcijas H, nes, galiojant tam tikroms sąlygoms, leidžia sukoncentruoti dėmesį į proceso koreliacijas. Šiame kontekste įžymi „Ketvirtųjų momentų teorema", įrodyta Nualart ir Peccati, leidžianti ženkliai supaprastinti centrinės ribinės teoremos įrodymą galiojant Breuer ir Major teoremos prielaidoms. Šios teoremos apibendrinimas yra šios disertacijos antrajame skyriuje suformuluotos centrinės ribinės teoremos įrodymo pagrindas.

Konvergavimo greičiui centrinėje ribinėje teoremoje įrodyti naudojamas Nourdin ir Peccati įvertis, kuris leidžia gauti įverčius trijų gana skirtingų metrikų tarp atsitiktinių dydžių atžvilgiu. Šios teoreomos įrodyme pasitelkiami kai kurie nesudėtingi kombinatoriniai skaičiavimai. Trečiajame skyriuje taipogi naudojamasi Taqqu įverčiu Hermite'o polinomų nuo standartinių Gauso dydžių sandaugos momentams.

Nagrinėjant procesų koreliacijų sumas daugelyje vietų naudojamos Minkowski'o, Hölder'io ir kitos, elementarios, nelygybės. Taipogi taikomos Chebyshev'o ir Cauchy-Schwatrz'o nelygybės.

Norint įrodyti, kad nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai turi tankį, naudojami standartiniai matų teorijos argumentai ir kai kurios Lebego mato savybės.

5 Moksliniai rezultatai

5.1 Centrinė ribinė teorema

Disertacijoje įrodoma centrinė ribinė teorema dydžiui $\widetilde{V}_n^{(r)}$. Pristatant rezultatus Z žymės standartinį normalųjį atsitiktinį dydį. Pirmiausia apibrėšime nagrinėjamus procesus:

1 Apibrėžimas. Tegu $T > 0$ ir $R[0,T]$ yra aibė funkcijų $\rho\colon [0,T] \to \mathbb{R}_+$, tokių, kad $\rho(0) = 0$, ρ yra tolydi nulyje ir visiems $\delta \in (0,T)$,

$$0 < \inf\{\rho(u)\colon\ u \in [\delta, T]\} \leq \sup\{\rho(u)\colon\ u \in [\delta, T]\} < \infty.$$

Tegu $G = \{G(t)\colon\ t \in [0,T]\}$ nulinio vidurkio Gauso procesas su prieaugių standartinių nuokrypių funkcija σ_G^2, apibrėžta aibėje $[0,T]^2 := [0,T] \times [0,T]$ ir įgyjančia reikšmes

$$\sigma_G^2(s,t) := E[G(t) - G(s)]^2, \qquad (s,t) \in [0,T]^2.$$

Sakoma, kad G turi *lokalią dispersiją*, jei egzistuoja funkcija $\rho \in R[0,T]$, tokia, kad galioja $(A1)$ ir $(A2)$, čia:

$(A1)$ egzistuoja baigtinė konstanta L, tokia, kad visiems $(s,t) \in [0,T]^2$ galioja

$$\sigma_G(s,t) \leq L\rho(|t-s|);$$

$(A2)$ visiems $\epsilon \in (0,T)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup \left\{ \left| \frac{\sigma_G(s, s+h)}{\rho(h)} - 1 \right| \colon\ s \in [\epsilon, T),\ h \in (0, \delta \wedge (T-s)] \right\} = 0.$$

Sakoma, kad G turi lokaliai stacionarius prieaugius, jei G turi lokalią dispersiją su kokia nors $\rho \in R[0,T]$, ir tokiu atveju žymima $G \in \mathcal{LSI}(\rho)$.

Nulinio vidurkio Gauso proceso $G = \{G(t)\colon\ t \in [0,T]\}$ iš klasės $\mathcal{LSI}(\rho)$ kovariacinę funkciją žymėsime $\Gamma_G\colon\ [0,T]^2 \to \mathbb{R}$ bei visiems $k \geq 1$

$$\eta(k, \Delta_n) := \frac{[\rho((k+1)\Delta_n)]^2 + [\rho((k-1)\Delta_n)]^2 - 2[\rho(k\Delta_n)]^2}{2[\rho(\Delta_n)]^2}.$$

Galiausiai, intervalo $[0,T]$ skaidiniui $\{t_i^n\}$ ir bet kuriai funkcijai $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ žymėsime

$$\square_{i,j}^n f := f(t_i^n, t_j^n) - f(t_i^n, t_{j-1}^n) - f(t_{i-1}^n, t_j^n) + f(t_{i-1}^n, t_{j-1}^n).$$

5.1 Teorema. *Tegu $r > 0$, $T > 0$ ir $G = \{G(t)\colon\ t \in [0,T]\} \in \mathcal{LSI}(\rho)$ su kuria nors $\rho \in R[0,T]$. Tegu $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ yra didėjanti neaprėžta sveikųjų skaičių seka, tokia, kad $\Delta_n = T/m_n \to 0$ as $n \to \infty$. Tegu* (*a*) *egzistuoja konstanta* $C_1 > 0$*, tokia, kad* $\sigma_G(s,t) \geq C_1\rho(|t-s|)$ *visiems* $(s,t) \in [0,T]^2$*;*

(*b*) *visiems sveikiesiems* $m \geq 2$ *egzistuoja realusis skaičius* Ψ_m*, toks, kad lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{y_n} \big[\eta(k,\Delta_n)\big]^m = \Psi_m \tag{1}$$

galioja visoms didėjančioms ir neaprėžtoms teigiamų sveikųjų skaičių sekoms $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, tenkinančioms* $y_n \leq m_n - 2$ *visiems* $n \in \mathbb{N}$*;*

(*c*) *visiems sveikiesiems* $m \geq 2$ *egzistuoja ir yra lygi nuliui riba*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{[\rho(\Delta_n)]^{2m}} \sum_{i,j=2}^{m_n} \big|\square_{i,j}^n[\Gamma_G - 2^{-1}\tilde{\rho}]\big|^m = 0,$$

čia $\tilde{\rho}(s,t) := -[\rho(|t-s|)]^2$ *visiems* $(s,t) \in [0,T]^2$*.*

Tuomet,kai $n \to \infty$*, galioja tokia centrinė ribinė teorema*

$$\Delta_n^{1/2}\big(\widetilde{V}_n^{(r)} - \mathbf{E}\widetilde{V}_n^{(r)}\big) = \sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{m_n}\left[\left(\frac{|\Delta_i^n G|}{\rho(\Delta_n)}\right)^r - \mathbf{E}\left(\frac{|\Delta_i^n G|}{\rho(\Delta_n)}\right)^r\right] \Rightarrow \lambda_r Z,$$

o dispersija

$$\lambda_r^2 := T\sum_{m=2}^{\infty} a_{rm}^2 m!(1+2\Psi_m),$$

čia Ψ_m *yra apibrėžti* (1)*, o koeficientai* a_{rm} *randami taip*

$$a_{rm} := (m!)^{-1}\mathbf{E}[(|Z|^r - \mathbf{E}|Z|^r)H_m(Z)],$$

čia H_m*,* $m \geq 2$*, yra Hermite'o polinomai.*

5.2 Berry-Esséen rėžis

Konvergavimo greitį centrinėje ribinėje teoremoje, Gauso procesų H-variacijų atveju, atskirais atvejais nustatė Tudor, Aazizi ir Es-Sebaiy bei Nourdin ir kt. Disertacijoje įrodomas Berry-Esséen rėžis gana plačiai funkcijų H klasei:

2 Apibrėžimas. Tegu $q \geq 0$ yra sveikasis skaičius. Sakysime, kad funkcija $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ priklauso klasei $\mathcal{F}_q$, jei

(*a*) H yra tolydi, ir egzistuoja aibės $\mathbb{R}$ skaitus skaidinys, $\{[a_j, b_j]\}_{j\geq 1}$, toks, kad funkcijos H siaurinys į kiekvieną iš aibių $[a_j, b_j]$ turi tolydžią atvirkštinę;

(*b*) $\mathbf{E}H^2(Z) < \infty$, $\mathbf{E}H(Z)Z = 0$ ir

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{E}H(Z)H_m(Z)|m^q}{\sqrt{m!}} 3^{\frac{m}{2}} < \infty.$$

Tegu $n \in \mathbb{N}$ ir $X := (X_i,\ i = 1, \ldots, n)$ yra nulinio vidurkio Gauso vektorius, tenkinantis $\mathbf{E}X_i^2 = 1$ visiems $i = 1, \ldots, n$ (tokius vektorius vadiname standartiniais Gauso). Esant duotai funkcijai $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir vektoriui $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$, apibrėžiame

$$S(X, H, \alpha) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i H(X_i),$$

ir

$$W(X, H, \alpha) := \frac{S(X, H, \alpha) - \mathbf{E}S(X, H, \alpha)}{\sqrt{\operatorname{var}(S(X, H, \alpha))}}.$$

Disertacijoje parodoma, kad dydis $S(X, H, \alpha)$ turi tankį.

5.2 Lema. *Tegu $X := (X_i,\ i = 1, \ldots, n)$ yra Gauso vektorius, funkcija $H \in \mathcal{F}_0$ ir $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Tuomet $S(X, H, \alpha)$ turi tankį.*

Remiantis šia lema įrodoma teorema:

5.3 Teorema. *Tegu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ yra standartinių Gauso vektorių seka, $X_n := (X_{i,n},\ i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$, kurių kovariacijų matricos yra $(r_n(i,j))_{1\le i,j\le n}$. Tegu $H \in \mathcal{F}_1$ ir $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ yra vektorių $\alpha_n := (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{n,n}) \in [\beta_1, \beta_2]^n$, $n \in \mathbb{N}$, seka, čia $0 < \beta_1 \le \beta_2 < \infty$. Tuomet egzistuoja konstanta $c \in \mathbb{R}$, tokia, kad visiems $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} d^2\left(W(X_n, H, \alpha_n), Z\right) \le \frac{c}{[\operatorname{var}(S(X_n, H, \alpha_n))]^2} \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} r_n^2(i,j) \\ \times \sum_{i,k,l=1}^{n} |r_n(k,l)||r_n(i,k)|, \end{aligned}$$

čia d yra Wasserstein'o, Kolmogorovo arba pilnosios variacijos metrika tarp atsitiktinių dydžių.

5.3 Funkcinė centrinė ribinė teorema dalinių sumų procesui

Funkcinė centrinė ribinė teorema Gauso procesų su stacionariais prieaugiais laipsninei variacijai buvo įrodyta Corcuera ir kt. bei Barndorff-Nielsen ir kt. darbuose. Disertacijoje nagrinėjamas šių teoremų apibendrinimas procesams su nebūtinai stacionariais prieaugiais bendru funkcijos H atveju.

5.4 Teorema. *Tegu* $X_n := (X_{i,n},\ i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$, *yra standartinių Gauso vektorių su kovariacijų matricomis* $(r_n(i,j))_{1 \le i,j \le n}$, $n \in \mathbb{N}$, *seka, funkcija* $H \in \mathcal{F}_0$ *ir* $\alpha_n := (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{n,n}) \in [\beta_1, \beta_2]^n$, *yra vektorių seka, čia* $0 < \beta_1 \le \beta_2 < \infty$. *Visiems* $n \in \mathbb{N}$ *apibrėžkime funkcijas* $Y^n : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ *su reikšmėmis*

$$Y_t^n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \alpha_{i,n}[H(X_{i,n}) - \mathbf{E}H(Z)],$$

$t \in [0,1]$. *Tarkime, kad*

(*a*) *egzistuoja konstanta* $M \in \mathbb{R}$, *tokia, kad*

$$\sup_n \left\{ \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} r_n^2(i,j) \right\} = M;$$

(*b*) *visiems* $m \ge 2$ *egzistuoja realusis skaičius* Φ_m , *toks, kad visiems* $s, t \in [0,1]$, *tenkinantiems* $s < t$, *egzistuoja riba*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i,j=[ns]+1}^{[nt]} \alpha_{i,n}\alpha_{j,n} r_n^m(i,j) = (t-s)\Phi_m;$$

(*c*) *visiems* $s, t, u, v \in [0,1]$, *tokiems, kad* $s < t \le u < v$, *egzistuoja riba*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=[nu]+1}^{[nv]} \sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} r_n^2(i,j) = 0;$$

(*d*) *visiems* $m \ge 2$, $1 \le p \le m-1$ *ir* $s, t \in [0,1]$, *tokiems, kad* $s < t$, *egzistuoja riba*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j,k,l=[ns]+1}^{[nt]} |r_n^p(i,j) r_n^p(k,l) r_n^{m-p}(i,k) r_n^{m-p}(j,l)| = 0.$$

Tuomet erdvėje $\mathcal{D}[0,1]$ *su Skorochodo topologija teisinga*

$$Y^n \Rightarrow \lambda W,$$

kai $n \to \infty$, *ir*

$$\lambda^2 := \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m^2}{m!} \Phi_m \quad \text{bei} \quad a_m := \mathbf{E}H(Z)H_m(Z),\ m \ge 2.$$

5.4 Gautų rezultatų pritaikymas konkretiems Gauso procesams

Trupmeninis Brown'o judesys

Trupmeninis Brown'o judesys $B_H := \{B_H(t),\ t \in [0,T]\}$ su Hurst'o indeksu $H \in (0,1)$ yra nulinio vidurkio Gauso stochastinis procesas su kovariacine funkcija

$$F_H(s,t) := \Gamma_{B_H}(s,t) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

visiems $(s,t) \in [0,T]^2$.

Disertacijoje iš naujo įrodomas žinomas teiginys:

5.5 Išvada. *Tegu $r > 0$, $H \in (0, 3/4)$ ir $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ yra didėjanti teigiamų sveikųjų skaičių seka, tokia, kad $\Delta_n = T/m_n \to 0$, kai $n \to \infty$. Tuomet*

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{m_n}\left[\left(\frac{|\Delta_i^n B_H|}{\Delta_n^H}\right)^r - c_r\right] \Rightarrow \lambda_r Z, \quad \textit{kai } n \to \infty,$$

čia dispersija

$$\lambda_r^2 = T\sum_{m=2}^{\infty} a_{rm}^2 m!\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)^{2H} + (k-1)^{2H} - 2k^{2H}\right)^m\right).$$

Taipogi trupmeniniam Brown'o judesiui įrodomas Berry-Esséen rėžis.

5.6 Išvada. *Tegu $H \in (0, 3/4]$, $F \in \mathcal{F}_1$, ir visiems $n \in \mathbb{N}$ pažymėkime*

$$V_n := \sum_{i=1}^{n} F\left(n^H \Delta_i^n B_H\right) \quad \textit{and} \quad Z_n := \frac{V_n - \mathbf{E}V_n}{\sqrt{\operatorname{var}(V_n)}}.$$

Tuomet egzistuoja konstanta $c \in \mathbb{R}$, tokia, kad visiems $n \in \mathbb{N}$ galioja

$$d(Z_n, Z) \le c \begin{cases} n^{-1/2} & \textit{if } H \in (0, 1/2), \\ n^{2H-3/2} & \textit{if } H \in [1/2, 3/4), \\ (\log n)^{-1/2} & \textit{if } H = 3/4, \end{cases}$$

čia d yra Wasserstein'o, Kolmogorovo arba pilnosios variacijos metrika tarp atsitiktinių dydžių.

Be to, atveju $H \in (0, 1/2)$ šis įvertis yra optimalus.

Subtrupmeninis Brown'o judesys

Bojdecki ir kt. apibrėžė subtrupmeninį Brown'o judesį su indeksu H kaip nulinio vidurkio Gauso stochastinį procesą $G_H = \{G_H(t) : t \in [0,T]\}$ su kovariacine funkcija R_H:

$$R_H(s,t) := s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}\left[(s+t)^{2H} + |s-t|^{2H}\right],$$

$(s,t) \in [0,T]^2$. Disertacijoje įrodomos šios išvados:

5.7 Išvada. *Tegu* $H \in (0, 3/4)$, $r > 0$ *ir* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *yra didėjanti teigiamų sveikųjų skaičių seka, tokia, kad* $\Delta_n = T/m_n \to 0$, *kai* $n \to \infty$. *Tuomet*

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{m_n}\left[\left(\frac{|\Delta_i^n G_H|}{\Delta_n^H}\right)^r - \mathbf{E}\left(\frac{|\Delta_i^n G_H|}{\Delta_n^H}\right)^r\right] \Rightarrow \lambda_r Z, \qquad kai\ n \to \infty,$$

o dispersija

$$\lambda_r^2 = T\sum_{m=2}^{\infty} a_{rm}^2 m! \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)^{2H} + (k-1)^{2H} - 2k^{2H}\right)^m\right).$$

5.8 Išvada. *Tegu* $H \in (0, 3/4]$, $F \in \mathcal{F}_1$, *ir visiems* $n \in \mathbb{N}$ *pažymėkime*

$$V_n := \sum_{i=1}^{n} F\left(\frac{\Delta_i^n G_H}{\sigma_{G_H}(t_i^n, t_{i-1}^n)}\right) \quad and \quad Z_n := \frac{V_n - \mathbf{E}V_n}{\sqrt{\mathrm{var}(V_n)}}.$$

Tuomet egzistuoja konstanta $c \in \mathbb{R}$, *tokia, kad visiems* $n \in \mathbb{N}$

$$d(Z_n, Z) \le c \begin{cases} n^{-1/2} & if\ H \in (0, 1/2), \\ n^{2H-3/2} & if\ H \in [1/2, 3/4), \\ (\log n)^{-1/2} & if\ H = 3/4, \end{cases}$$

čia d *yra Wasserstein'o, Kolmogorovo arba pilnosios variacijos metrika tarp atsitiktinių dydžių.*

Berry-Esséen rėžis subtrupmeniniam Brown'o judesiui kvadratinės variacijos (bei bendresniu, H_q-variacijos atveju, čia H_q yra q-tasis Hermite'o polinomas) gautas Tudor.

Bitrupmeninis Brown'o judesys

Tegu $0 < T < \infty$, $0 < H < 1$ ir $0 < K \le 1$. Houdre ir Villa apibrėžė bitrupmeninį Brown'o judesį su parametrais (H, K) kaip nulinio vidurkio Gauso stochastinį procesą $B_{H,K} = \{B_{H,K}(t) : t \in [0, T]\}$ su kovariacine funkcija $C_{H,K}$:

$$C_{H,K}(s, t) := 2^{-K}\left\{(t^{2H} + s^{2H})^K - |t - s|^{2HK}\right\},$$

$(s, t) \in [0, T]^2$. Disertacijoje įrodomos šios išvados:

5.9 Išvada. *Tegu* $HK \in (0, 3/4)$, $r > 0$ *ir* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *yra didėjanti teigiamų sveikųjų skaičių seka, tokia, kad* $\Delta_n = T/m_n \to 0$, *kai* $n \to \infty$. *Tuomet*

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{m_n}\left[\left(\frac{|\Delta_i^n B_{HK}|}{\Delta_n^{HK}}\right)^r - \mathbf{E}\left(\frac{|\Delta_i^n B_{HK}|}{\Delta_n^{HK}}\right)^r\right] \Rightarrow \lambda_r Z, \qquad kai\ n \to \infty,$$

čia dispersija

$$\lambda_r^2 = T\sum_{m=2}^{\infty} a_{rm}^2 m! \left(1 + 2^{1-m}\sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)^{2HK} + (k-1)^{2HK} - 2k^{2HK}\right)^m\right).$$

5.10 Išvada. *Tegu $HK \in (0, 3/4]$, $F \in \mathcal{F}_1$, ir visiems $n \in \mathbb{N}$ pažymėkime*

$$V_n := \sum_{i=1}^{n} F\left(\frac{\Delta_i^n B_{H,K}}{\sigma_{B_{H,K}}(t_i^n, t_{i-1}^n)}\right) \quad \text{and} \quad Z_n := \frac{V_n - \mathbf{E}V_n}{\sqrt{\operatorname{var}(V_n)}}.$$

Tuomet egzistuoja kosntanta $c \in \mathbb{R}$, tokia, kad visiems $n \in \mathbb{N}$

$$d(Z_n, Z) \le c \begin{cases} n^{-1/2} & \text{if } HK \in (0, 1/2), \\ n^{2HK-3/2} & \text{if } HK \in [1/2, 3/4), \\ (\log n)^{-1/2} & \text{if } HK = 3/4. \end{cases}$$

čia d yra Wasserstein'o, Kolmogorovo arba pilnosios variacijos metrika tarp atsitiktinių dydžių.

Berry-Esséen rėžis bitrupmeniniam Brown'o judesiui kvadratinės variacijos atveju gautas Aazizi ir Es-Sebaiy.

Procesai su lokalia variacija

Disertacijoje įrodoma, kad darbe gauta funkcinė centrinė ribinė teorema dalinių sumų procesams yra pritaikoma procesams su lokalia variacija. Tiksliau, kad teisinga tokia teorema:

5.11 Teorema. *Tegu $T > 0$ ir $G := \{G_t,\ t \in [0, T]\}$ yra nulinio vidurkio Gauso procesas iš klasės $\mathcal{LSI}(\rho)$ su kuria nors $\rho \in R[0, T]$, $H \in \mathcal{F}_0$. Visiems $n \ge 1$ apibrėžkime funkcijas $Y^n : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ su reikšmėmis*

$$Y_t^n(G, H) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \left[H\left(X_{i,n}\right) - \mathbf{E}H(Z)\right]$$

$t \in [0, 1]$. Tegu

(*a*) *egzistuoja baigtinė konstata $C_1 > 0$, tokia, kad visiems $(s, t) \in [0, T]^2$*

$$C_1 \rho(|t - s|) \le \sigma_G(s, t);$$

(*b*) *teisinga*

$$\sup_n \left\{ \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{E}\left(\frac{\Delta_i^n G \Delta_j^n G}{\sigma_G(t_i^n, t_{i-1}^n)\sigma_G(t_j^n, t_{j-1}^n)}\right)\right]^2 \right\} < \infty;$$

(*c*) *visiems sveikiesiems $m \ge 2$ egzistuoja realusis skaičius Ψ_m, toks, kad egzistuoja riba*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{y_n} [\eta(k, n)]^m = \Psi_m$$

kiekvienai didėjančiai ir neaprėžtai sveikųjų skaičių sekai $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tenkinančiai $y_n \le n - 2$ su visais $n \in \mathbb{N}$;

(*d*) *visiems* $p \geq 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n[\rho(1/n)]^{2p}} \sum_{i,j=2}^{n} \left|\square_{i,j}^{n} \left[\Gamma_G - 2^{-1}\tilde{\rho}\right]\right|^p = 0,$$

čia $\tilde{\rho}(s,t) := -\rho^2(|t-s|)$, $(s,t) \in [0,T]^2$.

Tuomet erdvėje $\mathcal{D}[0,1]$ *su Skorochodo topologija*

$$Y^n(G,H) \Rightarrow \lambda_{G,H} W \text{ kai } n \to \infty,$$

čia

$$\lambda_{G,H}^2 := T \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_{H,m}^2}{m!} \left(1 + 2\Psi_m\right).$$

6 Darbo mokslinis naujumas ir aktualumas

Dauguma disertacijoje pristatytų rezultatų yra originalūs ir atitinka dviejų mokslinių publikacijų (žr. skyrių „Pagrindinės publikacijos”) turinį. Likę keletas rezultatų yra arba gerai žinomos lemos, kurias įrodome darbo pilnumo vardan, arba nedideli nepublikuoti pastebėjimai. Disertacijoje gauti rezultatai buvo sėkmingai pristatyti tarptautinėse konferencijose ir seminaruose srities specialistams (žr. skyrių „Rezultatų sklaida“).

7 Darbo struktūra ir apimtis

Disertacija parašyta anglų kalba. Disertaciją sudaro 6 skyriai: įvadas, naudojamos sąvokos ir rezultatai, 3 moksliniams rezultatams paskirti skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Bendra darbo apimtis yra 84 puslapiai.

8 Pagrindinės publikacijos

Pristatomos disertacijos rezultatai publikuojami 2 moksliniuose straipsniuose:

1. R. Malukas. A Berry-Esséen bound for H-variation of a Gaussian process. *to appear in Lith. Math. J.*

2. R. Malukas and R. Norvaiša. A central limit theorem for a weighted power variation of a Gaussian process. *Lith. Math. J.*, 54(3):323–344, 2014.

9 Rezultatų sklaida

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose ir seminaruose:

1. *6th Graduate Student Probability Conference*, Džordžijos Technologijos institutas, Atlanta, JAV, 2012 m. balandžio 27–29 d.

2. *11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, Vilniaus universitetas, Vilnius, Lietuva, 2014 m. birželio 30 – liepos 4 d.

3. *37th Conference on Stochastic Processes and their Applications*, Buenos Airių universitetas, Buenos Airės, Argentina, 2014 m. liepos 28 – rugpjūčio 1 d.

4. *38th Conference on Stochastic Processes and their Applications*, Oksfordo universitetas, Oksfordas, Didžioji Britanija, 2015 m. liepos 13–17 d.

10 Summary

In the thesis H-variations of Gaussian processes are investigated. The results are of theoretic nature and are divided into 3 chapters.

In the second chapter we investigate the special case of power variations of Gaussian processes having a local variance. We obtain a central limit theorem for these variations.

In the third chapter we consider general sequences of standard Gaussian vectors and the weighted H-sums of these vectors. We prove a Berry-Esséen bound for three distances between these H-sums and a standard Gaussian random variable. In this chapter we also consider partial sum processes corresponding to these H-sums and prove a functional central limit theorem for them.

In the fourth chapter we apply the results obtained in the previous chapters to fractional Brownian motion, processes with stationary increments, subfractional Brownian motion, bifractional Brownian motion and processes having a local variance.

The thesis also contains an introduction, background on the techniques used, conclusions and bibliography. Aditionally to the thesis, an extensive summary in Lithuanian is provided. Aditionally to the summary in Lithuanian, a summary of the summary is provided in English within the summary in Lithuanian.

11 Trumpos žinios apie autorių

Išsilavimas

2005 Klaipėdos Smeltės vidurinė mokykla (su pagyrimu)

2011 Vilniaus universiteto *Cum laude* statistikos magistras

Mokslinio darbo patirtis

2012 – 2014 Vilniaus universiteto projekto jaunesnysis mokslinis darbuotojas

2011 – Matematikos ir informatikos instituto specialistas

Pedagoginio darbo patirtis

2015 – Vilniaus universiteto lektorius

2011 – 2015 Vilniaus universiteto asistentas