VILNIAUS UNIVERSITETAS

AIDAS BALČIŪNAS

DIRICHLĖ L FUNKCIJŲ MELINO TRANSFORMACIJOS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2014 metai

Disertacija parengta 2010 - 2014 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

Prof. dr. Vasilij Bernik (Baltarusijos MA Matematikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. habil. dr. Algimantas Jonas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Doc. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2014 m. spalio mėn. 28 d. 11 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto 203 auditorijoje.

Adresas: Akademijos 4, LT-08663 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2014 m. rugsėjo mėn. 26 d.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

AIDAS BALČIŪNAS

MELLIN TRANSFORMS OF DIRICHLET L-FUNCTIONS

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2014

The dissertation was prepared during years 2010 - 2014 at Vilnius University.

Scientific supervisor:

Prof. dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, physical sciences, mathematics - 01P)

The council for the defence of the doctoral thesis:

Chairman:

Prof. Dr. Habil. Artūras Dubickas (Vilnius University, physical sciences. mathematics - 01P)

Members:

Prof. Dr. Vasilii Bernik (Belarus MA Math. Institute, physical sciences. mathematics - 01P)

Prof. Dr. Habil. Algimantas Jonas Bikelis (Vytautas Magnus University, physical sciences. mathematics - 01P)

Doc. Dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, physical sciences. mathematics - 01P)

Prof. Dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, physical sciences. mathematics - 01P)

The doctoral thesis will be defended at a public meeting of the council on October 28th, 2014 in Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics 203 a., at 11 a.m.

Adress: Akademijos 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed in 26 of September, 2014.

The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Tarkime, $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o χ Dirichlė charakteris moduliu q, tai yra, apverčiamų liekanų klasių grupės $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ moduliu q homomorfizmas į kompleksinių skaičių moduliu 1 grupę. Dirichlė L funkcijos $L(s,\chi)$ yra gerai žinomos analizinėje skaičių teorijoje Rymano dzeta funkcijos apibendrinimas. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ jos yra apibrėžiamos Dirichlė eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

ir yra meromorfiškai pratęsiamos į visą kompleksinę plokštumą.

Temos aktualumas

Dirichlė L funkcijų reikšmė skaičių teorijoje yra ne mažesnė nei visiems gerai žinomos Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$. 1837 m. P.G.L. Dirichlė (Dirichlet) panaudojo L funkcijas tiriant pirminių skaičių pasiskirstymą aritmetinėse progresijose. Naudodamasis šių funkcijų analizinėmis savybėmis jis parodė, kad kiekvienoje aritmetinėje progresijoje $m \equiv a \mod q$, $(a,q) = 1$, yra be galo daug pirminių skaičių. Funkcijos

$$\pi(x;a,q) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \bmod q}} 1$$

asimptotinės formulės, kai $x \to \infty$, tikslumas iš esmės priklauso nuo Dirichlė L funkcijų savybių. Dirichlė L funkcijos turi daug svarių pritaikymų sprendžiant ir kitas svarbias šiuolaikinės skaičių teorijos problemas. Todėl daugelis pasaulyje žinomų skaičių teorijos specialistų, tarp kurių R. Balasubramanianas (Balasubramanian), E. Bombieris (Bombieri), B.Conris (Conrey), J.Friedlanderis (Friedlander), A.Fudžis (Fujii) , P.X. Gallagcheris (Gallagher), A.A. Karacuba (Karatsuba), M.Kacurada (Katsurada), S.M. Gonekas (Gonek), S. Kanemitsus (Kanemitsu) , E. Kovalskis (Kowalski), A. Laurinčikas, Yu.V. Linikas (Linnik), K. Macumotas, (Matsumoto), H.L.Montgomeris (Montgomery), Y. Motochašis (Motohashi), M.J. Narlikaras (Narlicar), K. Ramačandra (Ramachandra), P. Sarnakas (Sarnak), K. Soundararajanas (Soundararajan), J. Štoidingas (Steuding), K. Titčmaršas (Titchmarsh), A.I. Vinogradovas (Vinogradov), S.M.Voroninas (Voronin), V. Žangas (Zhang) ir kiti, tyrinėjo šių funkcijų reikšmių pasiskirstymą.

Svarbų vaidmenį Dirichlė L funkcijų teorijoje vaidina šių funkcijų momentai. 1995m. japonų matematikas Y. Motohašis pastebėjo, kad tyrinėjant Rymano dzeta funkcijos momentus

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} dt, k \ge 0$$

sėkmingai gali būti taikomos šios funkcijos modifikuotosios Melino transformacijos. Tam buvo skirta keletas A. Ivičiaus (Ivič), M. Jutilos (Jutila), Y. Motohašio ir M. Lukarinen (Lukkarinen) darbų. Pastaroji autorė taip pat pradėjo tyrinėti Melino transformacijas, atitinkančias Dirichlė L funkcijų antrojo momento vidurkius

$$\sum_{\chi(\bmod q)} \int_0^T \left| L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right) \right|^2 dt,$$

kai sumuojama pagal visus charakterius moduliu q.

Sunkesnis uždavinys yra L funkcijų individualaus antrojo momento

$$\int_0^T \left| L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right) \right|^2 dt$$

tyrimas. Svarbius rezultatus apie šį momentą yra gavęs ir Y. Motahašis [3]. Šiai problemai spręsti, kaip ir funkcijos $\zeta(s)$ atveju, gali būti taikomos individualios modifikuotos Melino transformacijos

$$\mathcal{Z}_1(s,\chi) \stackrel{def}{=} \int_1^\infty \left| L\left(\frac{1}{2}+ix,\chi\right) \right|^2 x^{-s} dx.$$

Todėl yra svarbu išnagrinėti šių transformacijų analizines savybes.

Tikslai ir uždaviniai

Disertacijos tikslas yra gauti funkcijos $\left| L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right) \right|^2$ modifikuotosios Melino transformacijos meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą. Su tuo susiję šie uždaviniai:

1. Gauti funkcijos $\left| L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right) \right|^2$ Laplaso transformacijos formules pagrindiniam charakteriui χ_0 ir primityviajam charakteriui χ.
2. Įrodyti transformacijos formules specialioms funkcijoms, į kurių išraiškas įeina daliklių funkcija $d(m)$.
3. Gauti Melino transformacijų $\mathcal{Z}_1(s,\chi)$ meromorfinius tęsinius į visą kompleksinę plokštumą pagrindiniam charakteriui χ_0 ir Dirichlė charakteriui χ.

Tyrimų metodai

Disertacijos rezultatų įrodymui yra naudojami įvairūs kompleksinėje analizėje taikomi metodai. Tarp jų, kontūrinio integravimo, reziduumų teorijos, transformacijų ir kiti metodai.

Naujumas

Visi disertacijoje gauti rezultatai yra nauji. Anksčiau modifikuotosios Melino transformacijos, atitinkančios individualius Dirichlė L funkcijų momentus, niekur nebuvo nagrinėjamos.

Problemos apžvalga ir pagrindiniai rezultatai

Vertinant dzeta funkcijų momentus, paprastai yra naudojamasi artutine funkcine lygtimi. Pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcijos antrojo momento

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \right|^2 dt$$

asimptotinė formulė yra nesunkiai gaunama naudojantis artutine funkcine lygtymi, pateikta [5]

$$\zeta(s) = \sum_{m\le x} \frac{1}{m^s} + \chi(s) \sum_{m\le y} \frac{1}{m^{1-s}} + O\left(x^{-\sigma}\right) + O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}\right),$$

kuri yra teisinga juostoje $0 < \sigma < 1$,

$$\chi(s) = 2^{-s}\pi^{-s-1} \sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s),$$

o x, y ir t yra susieti sąryšiu $2\pi xy = t$, $x, y > c > 0$. Paėmę šioje lygtyje $x = \frac{t}{2\pi\sqrt{\log t}}$ ir $y = \sqrt{\log t}$, bei atsižvelgę į įvertį $\chi\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(1)$, gauname, kad

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \sum_{m\le x} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+it}} + O\left(x^{-\sigma}\right) + O\left(\log^{\frac{1}{4}} t\right).$$

Todėl pakanka gauti asimptotinę formulę

$$\int_0^T \left| \sum_{m\le x} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+it}} \right|^2 dt \sim T\log T,$$

kai $T \to \infty$, kas yra visai paprasta. Tačiau artutinės funkcinės lygties aukštesniems Rymano dzeta funkcijos laipsniams $\zeta^k(s)$ tampa vis sudėtingesnės, ir iškyla problemos jų taikymui. Todėl imta ieškoti naujų metodų dzeta funkcijų momentams tirti.

1995 m. Y. Motohašis pasiūlė [4] Rymano dzeta funkcijos momentų tyrimui naudoti modifikuotąsias Melino transformacijas. Primename, kad klasikinė funkcijos $f(x)$ Melino transformacija yra apibrėžiama integralu

$$F(s) = F(s, f) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

srityje, kurioje šis integralas egzistuoja. Jei funkcija $f(x)$ yra tolydi ir $f(x)x^{\sigma-1}$ yra integruojama pustiesėje $(0, \infty)$, tai šiai transformacijai yra teisinga atvirkštinė formulė

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^{-s}ds. \tag{1}$$

Y. Motohašis pasiūlė Rymano dzeta funkcijos laipsniams modifikuotąją Melino transformaciją. Tegul pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0(k) > 1$

$$\mathcal{Z}_k(s) \stackrel{def}{=} \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^{2k} x^{-s}dx, k > 0.$$

Tuomet pritaikę (1) formulę su $c > 1$, turime, kad

$$\begin{aligned}\int_1^\infty f\left(\frac{x}{T}\right)\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^{2k} dx &= \int_1^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(F(s)\left(\frac{T}{x}\right)^s ds\right) \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^{2k} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)T^s \mathcal{Z}_k(s)ds.\end{aligned}$$

Taigi, turėdami pakankamą informaciją apie modifikuotąją Melino transformaciją $\mathcal{Z}_k(s)$, galime įvertinti ir integralą

$$\int_1^\infty f\left(\frac{x}{T}\right)\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^{2k} dx.$$

Dabar tinkamai parinkę funkciją $f(x)$, galime įvertinti momentą

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^{2k} dt.$$

Šis pavyzdys atskleidžia plačią modifikuotųjų Melino transformacijų taikymo galimybę analizinėje skaičių teorijoje.

Tegul $F_1(s)$ yra funkcijos $f(x)$ modifikuotoji Melino transformacija

$$F_1(s,f) \stackrel{def}{=} \int\limits_1^\infty f(x)x^{-s}dx.$$

Dažnai ši transformacija yra patogesnė už klasikinę transformaciją $F(s)$, kadangi nekyla konvergavimo problemų taške $x=0$. Be to, egzistuoja paprastas sąryšis tarp modifikuotosios ir įprastinės Melino transformacijų. Tegul

$$f_1(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & \text{jei} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0 & \quad\quad \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Tuomet A. Ivičius [1] įrodė, kad teisinga lygybė

$$F_1(s,f) = F\left(s, \frac{1}{x}f_1(x)\right).$$

Istoriškai, pirmiausia Rymano dzeta funkcijos ketvirtojo laipsnio momento tyrimui buvo panaudota funkcija $\mathcal{Z}_2(s)$. Šią funkciją pradėjo tirti Y. Motohašis. Jis įrodė, kad pusplokštumėje $\sigma > 0$ transformacija $\mathcal{Z}_2(s)$ turi penktos eilės polių taške $s=1$, paprastuosius polius taškuose $s = \frac{1}{2} \pm i\kappa_j$, $\kappa_j = \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}}$, čia $\left\{\lambda_j = \kappa_j^2 + \frac{1}{4}\right\} \cup \{0\}$ yra diskretus neeuklidinio Laplasiano

$$\triangle = -y^2\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right),$$

veikiančio automorfinių formų pilnosios modulinės grupės $SL(2,\mathbb{Z})$ atžvilgiu erdvėje, spektras, bei polius taškuose $s = \frac{\rho}{2}$, čia ρ yra kompleksiniai funkcijos $\zeta(s)$ nuliai. Remiantis funkcijos $\mathcal{Z}_2(s)$ savybėmis, buvo gauti nauji Rymano dzeta funkcijos ketvirtojo momento įverčiai. Tegul

$$\int\limits_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt = TP_4(\log T) + E_2(T),$$

čia $P_4(y)$ yra ketvirtojo laipsnio polinomas. Y. Motohašis parodė, kad $E_2(T) = \Omega_\pm(T^{\frac{1}{2}})$. Čia $f(x) = \Omega_+(g(x))$ reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $c>0$, kad $f(x) > cg(x)$ sekai $x = x_n$, $\lim x_n = \infty$, $f(x) = \Omega_-(g(x))$ reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad $f(x) < -cg(x)$ sekai $x = x_n$, $\lim x_n = \infty$, ir $f(x) = \Omega_\pm(g(x))$ reiškia, kad abu įverčiai $f(x) = \Omega_+(g(x))$ ir $f(x) = \Omega_-(g(x))$ galioja. Be to, buvo gauti įverčiai

$$E_2(T) \ll T^{\frac{2}{3}} \log^{C_1} T,$$

$$\int_0^T E_2^2(T) \ll T^2 \log^{C_2} T,$$

ir

$$\int_0^T E_2(T) \ll T^{\frac{3}{2}}.$$

su efektyviomis konstantomis C_1 ir C_2. Čia simbolis " $\ll$ " yra simbolio "$O(...)$" analogas.

Vėliau A. Ivičius ir M. Jutila savo darbuose parodė, kad srityje $\sigma > -\frac{1}{2}$ transformacija $\mathcal{Z}_2(s)$ turi polius tik taškuose $s = \frac{\rho}{2}$, čia, kaip ir anksčiau ρ yra kompleksiniai funkcijos $\zeta(s)$ nuliai. Taip pat buvo įrodyta, kad egzistuoja tokia konstanta $b = b(\sigma) > 0$, kad juostoje $\varepsilon - \frac{1}{2} \le \sigma \le 1 - \varepsilon$ teisingas įvertis su kiekvienu $0 < \epsilon < \frac{3}{4}$

$$\mathcal{Z}_2(s) \ll (1 + |t|)^b.$$

Minėti autoriai pradėjo tyrinėti ir funkciją $\mathcal{Z}_1(s)$. Buvo gautas jos meromorfinis pratęsimas į pusplokštumę $\sigma > -\frac{3}{4}$. Jie įrodė, kad transformacija $\mathcal{Z}_1(s)$ yra reguliari pusplokštumėje $\sigma > -\frac{3}{4}$, išskyrus antros eilės polių taške $s = 1$, ir

$$\mathcal{Z}_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma_0 + \log 2\pi}{s-1} + ...$$

Šiek tiek vėliau M. Jutila, naudodamas kitus metodus, pastebėjo, kad pusplokštumėje $\sigma < 0$ transformacija $\mathcal{Z}_1(s)$ gali turėti daugiausia antros eilės polių taškuose $s = -k$, $k \in \mathbb{N}$. Galiausiai M. Lukarinen įrodė, kad funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ turi tik paprastuosius polius taškuose $s = -(2k-1), k \in \mathbb{N}$, ir jokių kitų ypatingų taškų ji neturi. Be to, ji apskaičiavo, kad

$$\operatorname*{Res}_{\substack{s=-(2k-1)\\ k\in\mathbb{N}}} \mathcal{Z}_1(s) = \frac{i^{-2k}(1 - 2^{1-2k})B_{2k}}{2k},$$

čia B_k yra k-asis Bernulio skaičius. Minėti autoriai gavo funkcijos $\mathcal{Z}_1(s)$ įverčius juostoje $0 \le \sigma \le 1, t \ge t_0 > 0$:

$$\mathcal{Z}_1(s) \ll_\varepsilon t^{1-\sigma+\varepsilon}$$

ir

$$\int_1^T |\mathcal{Z}_1(\sigma + it)|^2 \, dt \ll_\varepsilon \begin{cases} T^{3-4\sigma+\varepsilon}, & \text{jei} \quad 0 \le \sigma \le \frac{1}{2}, \\ T^{2-2\sigma+\varepsilon}, & \text{jei} \quad \frac{1}{2} < \sigma \le 1. \end{cases}$$

M. Jutila šiuos įverčius patikslino iki įverčių

$$\mathcal{Z}_1(\sigma + it) \ll \begin{cases} (|t|+1)^{1-4\sigma/3+\varepsilon}, & \text{jei} \quad 0 \le \sigma \le \frac{1}{2}, \\ (|t|+1)^{5/6-\sigma+\varepsilon}, & \text{jei} \quad \frac{1}{2} < \sigma \le 1. \end{cases}$$

Pasirodė, kad eliminuoti ε daugiklį yra gana sunku. Galiausiai M. Lukarinen įrodė, kad kai $0 \le \sigma \le 1$, $|t| \ge 2$, teisingas įvertis

$$\mathcal{Z}_1(\sigma + it) \ll |t|^{1-\sigma} \log^2 |t| \,,$$

kuris mažoms σ reikšmėms yra šiek tiek tikslesnis už M. Jutilos įvertį.

Eilėje A. Laurinčiko straipsnių buvo nagrinėjamos modifikuotos Melino transformacijos

$$\mathcal{Z}_1(s, \rho) = \int_1^{\infty} \left| \zeta\left(\rho + ix\right) \right|^2 x^{-s} dx,$$

kai ρ yra fiksuotas skaičius, $\frac{1}{2} < \rho < 1$. Juose buvo gautas šios transformacijos meromorfinis pratęsimas ir kai kurie įverčiai. M. Lukarinen savo disertacijoje trumpai užsiminė apie modifikuotąsias Melino ransformacijas Dirichlė L funkcijoms

$$\hat{\mathcal{Z}}_1(s, \chi) = \sum_{\chi \bmod q} \int_1^{\infty} \left| L\left(\frac{1}{2} + ix, \chi\right) \right|^2 x^{-s} dx,$$

kai sumuojama pagal visus charakterius χ moduliu q, o taip pat nurodė būdą, kaip galima gauti šios transformacijos meromorfinį pratęsimą į pusplokštumę $\sigma > 0$.

Disertacijoje yra nagrinėjama individuali modifikuotoji Dirichlė L funkcijos Melino transformacija

$$\mathcal{Z}_1(s, \chi) = \int_1^{\infty} \left| L\left(\frac{1}{2} + ix, \chi\right) \right|^2 x^{-s} dx$$

ir yra gaunamas šios transformacijos meromorfinis pratęsimas į visą kompleksinę plokštumą. Pastebime, kad funkcijos $\mathcal{Z}_1(s, \chi)$ tyrimas yra sudėtingesnis, nei transformacijos $\hat{\mathcal{Z}}_1(s, \chi)$, nes sumavimas pagal visus charakterius supaprastina uždavinį.

Pirmame disertacijos skyriuje gautos Dirichlė L funkcijų Laplaso transformacijų $\mathfrak{L}(w, \chi)$ formulės. Šis skyrius yra pagalbinis, vėliau jo rezultatais yra naudojamasi trečiajme disertacijos skyriuje. Primename, kad funkcijos $f(x)$ Laplaso transformacija yra apibrėžiama integralu

$$\mathfrak{L}(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx,$$

jeigu jis konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$ su kuriuo nors σ_0. Yra žinoma, kad Laplaso transformacija taip pat gali būti taikoma dzeta funkcijų momentams tirti. Tai gerai iliustruoja paprastas pavyzdys iš [5]. Tegul $f(x) \ge 0$, kai $x \ge 0$, ir su duotuoju $k > 0$

$$\int_0^\infty f(x)e^{-\delta x}dx \sim \frac{1}{\delta}\log^k \frac{1}{\delta}$$

kai $\delta \longrightarrow 0$. Tuomet

$$\int_0^T f(x)dx \sim T\log^k T,$$

kai $T \longrightarrow \infty$. Pirmoji Laplaso transformacijos formulė funkcijai $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2$ buvo gauta monografijoje [5]. Buvo įrodyta, kad pakankamai mažiems $|s|$ ir $\sigma > 0$ su atitinkama laipsnine eilute

$$\int_0^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 e^{-2sx}dx = 2\pi e^{is}\sum_{m=1}^\infty d(m)e^{2\pi ime^{2is}} + \sum_{m=0}^\infty a_m s^m,$$

čia $d(m)$ kaip ir anksčiau yra daliklių funkcija. Tegul

$$\mathfrak{L}(s) = \int_0^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 e^{-sx}dx.$$

Tuomet M. Lukarinen [2] gavo tokią Laplaso transformacijos formulę.

A teorema *Tegul* $\{s \in \mathbb{C} : 0 < |\sigma| < \pi\}$. *Tuomet*

$$\mathfrak{L}(s) = ie^{is/2}\left(\gamma_0 - \log 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - s\right)i\right) + 2\pi e^{-is/2}\sum_{m=1}^\infty d(m)e^{-2\pi ime^{-is}} + \lambda(s),$$

be to funkcija $\lambda(s)$ *yra analizinė juostoje* $\{s \in \mathbb{C} : |\sigma| < \pi\}$ *ir, kai* $|\sigma| \leq \theta$, $0 < \theta < \pi$, *yra teisingas įvertis*

$$\lambda(s) = O((1+|s|))^{-1}.$$

Panaši formulė teisinga A. Laurinčiko nagrinėtai Laplaso transformacijai

$$\mathfrak{L}_\rho(s) = \int_0^\infty \left|\zeta\left(\rho+ix\right)\right|^2 e^{-sx}dx$$

su fiksuotu $\rho, \frac{1}{2} < \rho < 1$.

Apibrėžiame Dirichlė L funkcijos Laplaso transformaciją

$$\mathfrak{L}(s,\chi) \overset{def}{=} \int\limits_0^\infty \left| L\left(\frac{1}{2}+ix,\chi\right)\right|^2 e^{-sx}dx.$$

Pirmame disertacijos skyriuje yra gautos formulės funkcijai $\mathfrak{L}(s,\chi)$. Tegul,

$$G(\chi) = \sum_{l=1}^{q} \chi(l) e^{2\pi i l/q}$$

yra Gauso suma,

$$d(m) = \sum_{d|m} 1,$$

yra daliklių funkcija, $\mu(m)$ yra Miobiuso funkcija. Be to, tegul

$$b = \begin{cases} 0, & \text{jei} \quad \chi(-1) = 1, \\ 1, & \text{jei} \quad \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

$$\epsilon(\chi) = \frac{G(\chi)}{\sqrt{q}}, \qquad \epsilon_1(\chi) = -\frac{G(\chi)}{\sqrt{q}},$$

ir

$$E(\chi) = \begin{cases} \epsilon(\chi), & \text{jei} \quad b = 0, \\ \epsilon_1(\chi), & \text{jei} \quad b = 1. \end{cases}$$

1.1 teorema. *Tegul* $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < \pi\}$ *ir* χ *yra primityvusis charakteris moduliu* $q > 1$. *Tuomet teisinga lygybė*

$$\mathfrak{L}(s,\chi) = \frac{2\pi i^b e^{-\frac{is}{2}}}{\sqrt{q}E(\chi)} \sum_{m=1}^{\infty} d(m)\chi(m) \exp\left\{ -\frac{2\pi i m}{q} e^{-is} \right\} + \lambda(s,\chi),$$

čia funkcija $\lambda(s,\chi)$ *yra analizinė juostoje* $\{s \in \mathbb{C} : |\sigma| < \pi\}$ *ir, kai* $|\sigma| \le \theta, \quad 0 < \theta < \pi$, *yra teisingas įvertis*

$$\lambda(s,\chi) = O((1+|s|))^{-1}.$$

Antroji šio skyriaus teorema yra skirta Laplaso transformacijai $\mathfrak{L}(s,\chi_0)$ su pagrindiniu charakteriu.

1.2 teorema. *Tegul* $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < \pi\}$ *ir* χ_0 *yra pagrindinis charakteris moduliu* $q \ge 1$. *Tuomet yra teisinga lygybė*

$$\mathfrak{L}(s,\chi_0) = ie^{\frac{is}{2}} \prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{m|q} \mu(m) \left(\gamma_0 - \log 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - s\right) i + \sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1} + \log m \right)$$

$$-2\pi i e^{-\frac{is}{2}} \sum_{n|q} \sum_{m|q} \frac{\mu(m)\mu(n)}{m} \sum_{k=1}^{\infty} d(k) \exp\left\{ -\frac{2\pi i k n}{m} \right\} + \lambda(s,\chi_0),$$

čia funkcija $\lambda(s,\chi_0)$ turi tas pačias savybes, kaip ir 1.1 teoremoje.

Kai $q=1$, gauname Rymano dzeta funkcijos atvejį, t.y., turime A teoremą .

Antrasis disertacijos skyrius yra taip pat pagalbinis. Šiame skyriuje yra nagrinėjama transformacijos formulė funkcijai

$$\Phi\left(z;\frac{k}{l}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} d(m) e^{2\pi i m \frac{k}{l}} e^{-mz} - \frac{\gamma_0 - 2\log l - \log z}{lz},$$

čia k ir l yra tarpusavyje pirminiai teigiami skaičiai ir $\Im z \neq 0$, $\Re z > 0$, bei transformacijos formulės funkcijai

$$\begin{aligned}\Phi\left(z;\chi,q\right) =& \sum_{m=1}^{\infty} d(m)\chi(m) e^{-2\pi i m/q} e^{-mz} \\ & - \frac{1}{G(\overline{\chi})} \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) \frac{(q,a-1)}{qz} \left(\gamma_0 - 2\log\frac{q}{(q,a-1)} - \log z\right),\end{aligned}$$

čia χ yra Dirichlė charakteris moduliu q.

Prieš gautųjų rezultatų formulavimą primename transformacijos formulę, naudotą Melino transformacijai $\mathcal{Z}_1(s)$ [2]. Tegul

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \Im z > 0, \\ -1, & \text{jei} \quad \Im z < 0, \end{cases}$$

$\Im z \neq 0$ ir $\Re z > 0$, ir

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} d(m) e^{-mz} - \frac{\gamma_0 - \log z}{z}.$$

B teorema. *Tegul $1 < b < 2$. Tuomet funkcijai $\Phi(z)$ teisinga transformacijos formulė*

$$\begin{aligned}\Phi(z^{-1}) =& -2\pi i\delta z \sum_{m=1}^{\infty} d(m) e^{-4\pi^2 mz} + \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} (2\pi)^{1-2w}\, \Gamma(w) \zeta^2(w) \\ & \times \left(\cot\left(\frac{\pi w}{2}\right) + \delta i\right) z^{1-w} dw + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Apibrėžiame funkciją

$$I(z,b) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^{1-2w} \Gamma(w) \Bigg((\sin(\pi w))^{-1} E\left(w; \frac{\overline{k}}{l}, 0\right)$$
$$+ (\cot(\pi w) + \delta i) E\left(w; -\frac{\overline{k}}{l}, 0\right) \Bigg) z^{1-w} dw$$

ir funkcijas, priklausančias nuo Dirichlė charakterio,

$$I(z;\chi,b) = \frac{1}{2\pi i G(\overline{\chi})} \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{1-2w} \Gamma(w)$$
$$\times \Bigg\{ \sin^{-1}(\pi w) E\left(w; \frac{\overline{\left(\frac{a-1}{(q,a-1)}\right)}}{\frac{q}{(q,a-1)}}, 0\right) (q,a-1)^{1-2w} + \cot(\pi w)$$
$$\times E\left(w; -\frac{\overline{\left(\frac{a-1}{(q,a-1)}\right)}}{\frac{q}{(q,a-1)}}, 0\right) (q,a-1)^{1-2w} + \delta i E\left(w; \frac{\frac{(a-1)}{(q,a-1)}}{\frac{q}{(q,a-1)}}, 0\right) \Bigg\} z^{1-w} dw$$

ir

$$\widetilde{I}(z;\chi,b) = \frac{1}{2\pi i G(\overline{\chi})} \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(\frac{2\pi(q,a-1)}{q}\right)^{1-2w} \Gamma(w)$$
$$\times \Bigg\{ \sin^{-1}(\pi w) E\left(w; \frac{\overline{\left(\frac{a-1}{(q,a-1)}\right)}}{\frac{q}{(q,a-1)}}, 0\right) + (\cot(\pi w) + \delta i) E\left(w; -\frac{\overline{\left(\frac{a-1}{(q,a-1)}\right)}}{\frac{q}{(q,a-1)}}, 0\right) \Bigg\} z^{1-w} dw,$$

čia $E\left(s; \frac{k}{l}, \alpha\right)$, $l > 1$, $(k,l) = 1$, yra Estermano dzeta funkcija, kuri pusplokštumėje $\sigma > \max(1 + Re\alpha, 1)$ apibrėžiama eilute

$$E(s, \frac{k}{l}, \alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)}{m^s} \exp\{2\pi i m \frac{k}{l}\},$$

o $\overline{k}$ yra susietas su k lyginiu $k\overline{k} \equiv 1(\mod l)$. Tarkime, kad a_0^+ ir a_0^- yra Estermano dzeta funkcijų $E\left(s; \frac{\overline{k}}{l}, 0\right)$ ir $E\left(s; -\frac{\overline{k}}{l}, 0\right)$ Lorano skleidinių atitinkami pastovieji nariai. Tuomet disertacijoje gauti rezultatai yra pateikti tokiose teoremose.

2.1 teorema. *Tegul* $\Re z > 0$ *ir* $\Im z \neq 0$. *Tuomet funkcijai* $\Phi\left(z; \frac{k}{l}\right)$ *teisinga transformacijos formulė*

$$\Phi\left(z^{-1}; \frac{k}{l}\right) = -\frac{2\pi i \delta z}{l} \sum_{m=1}^{\infty} d(m) e^{-2\pi i m \frac{\overline{k}}{l}} e^{-\frac{4\pi^2 m z}{l^2}} + \frac{l}{2\pi^2}\left(a_0^+ - a_0^-\right) + \frac{1}{4} + I(z,b).$$

2.2 teorema. *Tegul $\Re z > 0$ ir $\Im z \neq 0$, o χ primityvus Dirichlė charakteris moduliu q. Tuomet funkcijai $\Phi\left(z;\chi,q\right)$ teisinga transformacijos formulė*

$$\Phi\left(z^{-1};\chi,q\right) = -\frac{2\pi i\delta z}{q}\sum_{m=1}^{\infty} d(m)\chi(m)e^{-2\pi i m/q}e^{-\frac{4\pi^2 mz}{q^2}}$$
$$+\frac{q}{2\pi^2 G(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\frac{\overline{\chi}(a)}{(q,a-1)}\left(a_{0a}^{+}-a_{0a}^{-}\right)+I(z;\chi,b).$$

2.3 teorema. *Tegul $\Re z > 0$ ir $\Im z \neq 0$, o χ primityvus Dirichlė charakteris moduliu q. Tuomet funkcijai $\Phi\left(z;\chi,q\right)$ teisinga transformacijos formulė*

$$\Phi\left(z^{-1};\chi,q\right) = -\frac{2\pi i\delta z}{G(\overline{\chi})q}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)(q,a-1)\sum_{m=1}^{\infty} d(m)e^{-2\pi i m\frac{\overline{(a-1)/(q,a-1)}}{q/(q,a-1)}}e^{-\frac{4\pi^2 m(q,a-1)^2 z}{q^2}}$$
$$+\frac{q}{2\pi^2 G(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\frac{\overline{\chi}(a)}{(q,a-1)}(a_{0a}^{+}-a_{0a}^{-})+\widetilde{I}(z;\chi,b).$$

Trečiame disertacijos skyriuje, remiantis pirmųjų dviejų skyrių rezultatais, Melino transformacijos $\mathcal{Z}_1(s,\chi_0)$ ir $\mathcal{Z}_1(s,\chi)$ yra meromorfiškai pratęsiamos į visą kompleksinę plokštumą. Tegul

$$a(q) = \sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1},$$

o $\varphi(m)$, kaip įprasta, yra Oilerio funkcija.

3.1 teorema. *Funkcija $\mathcal{Z}_1(s,\chi_0)$ yra meromorfiškai prątesiama į visą kompleksinę plokštumą. Ji turi antrosios eilės polių taške $s = 1$, o jos pagrindinė Lorano eilutės dalis yra*

$$\mathcal{Z}_1(s,\chi_0) = \frac{\varphi(q)}{q}\left(\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{2\gamma_0+2a(q)-\log 2\pi}{s-1}\right)+\ldots.$$

Kiti funkcijos $\mathcal{Z}_1(s,\chi_0)$ ypatingieji taškai yra paprastieji poliai taškuose $s = -(2j-1)$, $j\in\mathbb{N}$, ir

$$\operatorname*{Res}_{\substack{s=-(2j-1)\\ j\in\mathbb{N}}}\mathcal{Z}_1(s,\chi_0) = \frac{\varphi(q)i^{-2j}(1-2^{1-2j})B_{2j}}{2jq}.$$

Tarkime, kad χ yra primityvus Dirichlė charakteris moduliu q.

3.2 teorema. *Funkcija $\mathcal{Z}_1(s,\chi)$ yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą.*

1. *Jei $c(q) \neq 0$, ji turi antros eilės polių taške $s = 1$, o jos pagrindinė Lorano eilutės dalis šiame taške yra*

$$\mathcal{Z}_1(s,\chi) = \frac{i^b}{q}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)(q,a-1)\left(\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma_0 + \log{(q,a-1)^2/2\pi q}}{s-1}\right) + \dots.$$

Kiti funkcijos $\mathcal{Z}_1(s,\chi)$ ypatingi taškai yra paprastieji poliai taškuose $s = -(2j-1), j \in \mathbb{N}$, ir

$$\operatorname*{Res}_{\substack{s=-(2j-1)\\ j\in\mathbb{N}}} \mathcal{Z}_1(s,\chi) = \frac{i^{b-2j}(1-2^{1-2j})B_{2j}}{2jq}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)(q,a-1).$$

2. *Jei $c(q) = 0$, funkcija $\mathcal{Z}_1(s,\chi)$ yra sveikoji funkcija.*

Išvados

Disertacijoje gauti šie tvirtinimai:

1. Modifikuotoji Melino transformacija $\mathcal{Z}_1(s,\chi_0) = \int\limits_1^\infty \left| L\left(\frac{1}{2}+ix,\chi_0\right)\right|^2 x^{-s}dx$ yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Ji turi antrosios eilės polių taške $s = 1$, o kiti funkcijos $\mathcal{Z}_1(s,\chi_0)$ ypatingieji taškai yra paprastieji poliai taškuose $s = -(2j-1), j \in \mathbb{N}$.
2. Modifikuotoji Melino transformacija $\mathcal{Z}_1(s,\chi)$ su primityviuoju charakteriu $\chi \mod q$ taip pat turi meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą.
3. $\mathcal{Z}_1(s,\chi)$ poliai priklauso nuo sumos $c(q) = \sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)(q,a-1)$:

   jei $c(q) \neq 0$, tai ji turi tuos pačius polius, kaip ir funkcija $\mathcal{Z}_1(s,\chi_0)$;

   jei $c(q) = 0$ tuomet $\mathcal{Z}_1(s,\chi)$ yra sveikoji funkcija.

Rezultatų aprobavimas

Diseratcijos rezultatai buvo pristatyti Lietuvos Matematikų draugijos konferencijose (2011-2014), 17-oje tarptautinėje konferencijoje Mathematical Modelling and Analysis, vykusioje 2012 metų birželio 6-9 dienomis Taline, 18-oje tarptautinėje konferencijoje Mathematical Modelling and Analysis ir 4-oje konferencijoje Approximation Methods and Orthogonal Expansions, vykusiose 2013 metų gegužės 27-30 dienomis Tartu, 19-oje tarptautinėje konferencijoje Mathematical Modelling and Analysis, vykusioje 2014 metų gegužės 26-29 dienomis Druskininkuose, XII tarptautinėje konferencijoje Algebra ir skaičių teorija: šiuolaikinės problemos ir taikymai, skirtoje profesoriaus V. N. Latyševo aštuoniasdešimtmečiui, vykusioje Tūloje (Rusija) 2014 balandžio 21-25 dienomis, Matematikos ir informatikos instituto doktorantų konferencijose, bei Vilniaus universiteto matematikos ir informatikos fakulteto tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros seminaruose.

Pagrindinių publikacijų sąrašas

1. A.Balčiūnas, *A transformation formula related to Dirichlet L-functions with principal character*, Lietuvos matematikos rinkinys **53**(A)(2012), 13-18.

2. A.Balčiūnas, *Mellin transform of Dirichlet L-functions with principal character*, Šiauliai mathematical Seminar **8**(16) (2013), 7-26.

3. A.Balčiūnas , *A transformation formula with primitive character*, Lietuvos matematikos rinkinys **54**(A)(2013), 6-11 .

4. A.Balčiūnas, *Mellin transforms of Dirichlet L-functions* , Proceeding XII International Conference Algebra and Number Theory: Modern Problems and Application, Tula (2014), 13-16.

5. A.Balčiūnas, A. Laurinčikas,*The Laplace transform of Dirichlet L-functions*, Nonlinear analysis : Modelling and Control **17**(2) (2012), 127-138.

Kitos publikacijos

1. A. Balčiūnas, *The Laplace and Mellin transforms of Dirichlet L-functions*, Mathematical modelling and analysis : 17th International Conference, June 6-9, 2012, Tallinn, Estonia: Abstracts. Tallinn. Tallinn University of Technology, 2012. p.18.

2. A. Balčiūnas, *Mellin transform of Dirichlet L-functions with principal character.* 18th International Conference : Mathematical Modelling and Analysis and Fourth International Conference : Approximation Methods and Orthogonal Expansions, May 27 - 30, 2013, Tartu, Estonia: Abstracts. Tartu. University of Tartu, 2013. p.16.

Literatūra

[1] A. Ivič, On some conjectures and results for the Riemann zeta-function and Hecke series, Acta Arith. 99, (2001), No. 2, 115-145.

[2] M. Lukkarinen, The Mellin transform of the square of Riemann's zeta-function and Atkinson's formula, Ann. Acad. Scie. Fenn. Math. Diss. 140, Suomalainen Tiedeakatemia, Helsinki, 2005.

[3] Y. Motohashi, A note on the mean value of the zeta and L-functions, Proc. Japan Acad. Math. Sci. No. 61(A),(1985), 313-316.

[4] Y. Motohashi, A relation between the Riemann zeta-function and the hyperbolic Laplacian, Ann. Sc. Norm. Super, Pisa,Cl. Sci. 22(4) (1995), 299-313.

[5] E.C. Titchmarsh, The Theory of Riemann Zeta- Function,2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Clarendor Press, Oxford, 1986.

Summary

Let χ be a Dirichlet character modulo q, and $s = \sigma + it$ be a complex variable. The Dirichlet L-function $L(s, \chi)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

and is meromorphically continued to the whole complex plane.

In the thesis, the modified Mellin transforms

$$\mathcal{Z}_1(s,\chi) = \int_1^{\infty} \left| L\left(\frac{1}{2} + ix, \chi\right) \right|^2 x^{-s} dx$$

are investigated, and meromorphic continuation is obtained. More precisely, it is proved that the function $\mathcal{Z}_1(s, \chi_0)$ with the principal character modulo q can be meromorphically continued to the whole complex plane, it has a double pole at the point $s = 1$, and simple poles at the points $s = -(2j-1), j \in \mathbb{N}$.

The function $\mathcal{Z}_1(s, \chi)$ with primitive character modulo q also can be continued meromorphically to the whole complex plane. Let

$$c(q) = \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a)(q, a-1).$$

If $c(q) \neq 0$, then the function $\mathcal{Z}_1(s, \chi)$ has the same poles as $\mathcal{Z}_1(s, \chi_0)$. If $c(q) = 0$, then the function $\mathcal{Z}_1(s, \chi)$ is entire one.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:

1969 m.birželio 3 d., Šiauliai.

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1976-1987 m. - Šiaulių 15-oji vidurinė mokykla.

1987-1992 m. - Vilniaus Universitetas. Matematikos fakultetas.

2004-2006 m. - Vilniaus universitetas,Tarptautinio verslo mokykla. Vadybininko profesinė kvalifikacija.

2008-2010 m. - Vilniaus pedagoginis universitetas, Magistro kvalifikacinis laipsnis.

2010-2014 m. - Vilniaus Universitetas, Matematikos ir Informatikos Institutas
Matematikos krypties doktorantūros studijos.

Darbo patirtis: 2011 m. - Matematikos fakultetas, asistentas.

2011-2012 m. -Vilniaus kolegija, lektorius.

2013-2014 m. -Vilniaus Gedimino technikos Universitetas, asistentas.