VILNIAUS UNIVERSITETAS

Santa Račkauskienė

DZETA FUNKCIJŲ SU PERIODINIAIS KOEFICIENTAIS JUNGTINIS UNIVERSALUMAS

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2012

Disertacija rengta 2009-2012 metais Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

Prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Nariai:

Prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P);

Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P);

Prof. dr. Roma Kačinskaitė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P);

Doc. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Oponentai:

Doc. dr. Virginija Garbaliauskienė (Šiaulių Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P);

Prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2012 m. gruodžio 12 d., 13 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto 203 auditorijoje.

Adresas: Akademijos g. 4, LT-08663, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2012 m. lapkričio ... d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Santa Račkauskienė

JOINT UNIVERSALITY OF ZETA-FUNCTIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, mathematics (01 P)

Vilnius, 2012

Doctoral dissertation was prepared at the Institute of Mathematics and Informatics of Vilnius University in 2009–2012.

Scientific Supervisor:

Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)

The thesis is defended in the Council of Mathematics at the Institute of Mathematics and Informatics of Vilnius University:

Chairman:

Prof. Dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P).

Members:

Prof. Dr. Habil. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics - 01P);

Prof. Dr. Habil. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P);

Prof. Dr. Roma Kačinskaitė (Šiauliai University, Physical Sciences, Mathematics - 01P);

Doc. Dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P).

Opponents:

Doc. Dr. Virginija Garbaliauskienė (Šiauliai University, Physical Sciences, Mathematics - 01P);

Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Mathematics in the auditorium number 203 at the Institute of Mathematics and Informatics of Vilnius University, at 13 p. m. on 12 of December 2012.

Address: Akademijos str. 4, LT-08663, Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on November ..., 2012.
The dissertation in available at the Library of Vilnius University.

DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

Mokslinė problema ir tyrimo objektas. Tyrimo objektas yra periodinių Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcijų rinkiniai. Mokslinė problema - šių rinkinių jungtinis universalumas.

Tikslas ir uždaviniai. Tikslas yra įrodyti jungtinį universalumą naujoms dzeta funkcijų klasėms. Darbo uždaviniai yra šie:

1. Atsisakius rango sąlygos, įrodyti jungtinę universalumo teoremą periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms.
2. Susilpninti sąlygą išplėstoje jungtinėje universalumo teoremoje (kiekvieną parametrą atitinka periodinių sekų rinkinys) periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms.
3. Įrodyti mišrią jungtinę universalumo teoremą Rymano dzeta funkcijai ir periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms.
4. Įrodyti mišrią jungtinę universalumo teoremą normuotų tikrinių Hekės (Hecke) parabolinių formų dzeta funkcijai ir periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms.

Aktualumas. Universalumas yra svarbi ir naudinga dzeta ir L funkcijų savybė, turinti visą eilę teorinių ir praktinių pritaikymų. Universalumas yra pagrindinė sudėtinė dzeta ir L funkcijų funkcinės nepriklausomybės įrodymo dalis, yra naudojamas nulių pasiskirstymo ir momentų problemose, padeda įrodyti įvairias reikšmių tirštumo teoremas ir, žinoma, atlieka pagrindinį vaidmenį analizinių funkcijų aproksimavimo teorijoje. Integralų pagal sudėtingas analizines kreives, naudojamų kvantinėje mechanikoje, vertinimas yra vienas iš galimų praktinių universalumo pritaikymų. Visa tai yra motyvacija universalių funkcijų klasės išplėtimui.

Praktikoje dažnai tenka aproksimuoti ir įvertinti analizinių funkcijų sistemas. Ši problema gali būti sėkmingai sprendžiama remiantis dzeta funkcijų jungtiniu universalumu. Dauguma dzeta ir L funkcijų turi artutines funkcines lygtis, todėl, naudojant jungtinį universalumą, analizinių funkcijų reikšmės įvertinamos pakankamai paprastų Dirichlė polinomų įvertinimu. Tai yra ženklus universalumo indėlis į analizinių funkcijų teoriją.

Po puikaus S. M. Voronino (S. M. Voronin) darbo [31], daugelis žinomų skaičių teorijos specialistų toliau tęsė dzeta funkcijų universalumo tyrimus. Tarp jų B. Bagčis (B. Bagchi), H. Baueris (H. Bauer), R. Garunkštis, S. M. Gonekas (S. M. Gonek), A. Laurinčikas, K. Matsumotas (K. Matsumoto), J. Štoidingas (J. Steuding) ir daugelis jaunų Lietuvos, Japonijos, Vokietijos, Lenkijos matematikų, kurių vardai ir rezultatai aiškiai rodo universalumo problemos aktualumą dzeta ir L funkcijų teorijoje.

Tyrimų metodai. Jungtinio universalumo teoremų įrodymai remiasi dzeta funkcijų analizine teorija bei silpnojo tikimybinių matų konvergavimo teorija. Šis metodas taip pat apima mato teorijos elementus ir analizinių funkcijų aproksimavimo teoriją.

Naujumas ir praktinė vertė. Visi disertacijos rezultatai yra nauji. Jie patikslina ir išplečia periodinių Hurvico dzeta funkcijų jungtinio universalumo rezultatus.

Problemos istorija ir rezultatai. 1975 m. S. M. Voroninas [31] atrado Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, universalumą. Jis įrodė, kad kiekviena tolydi, nelygi nuliui analizinė funkcija juostos $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ kompaktiniuose poaibiuose gali būti tolygiai aproksimuota norimu tikslumu postūmiais $\zeta(s + it)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Simboliu meas $\{A\}$ žymėsime mačiosios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą.

A teorema. *Tegul K yra juostos D kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį. Tarkime, kad funkcija $f(s)$ tolydi ir nelygi nuliui aibėje K, ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Voronino įrodytoje teoremoje aibė K yra skritulys $\left|s - \frac{3}{4}\right| \leq r$, $0 < r < \frac{1}{4}$. A teorema parodo, kad funkcija $f(s)$ yra aproksimuojama Rymano dzeta funkcijos postūmiais bendresnėje aibėje negu skritulys, be to, kad aibės postūmių, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją, apatinis tankis yra griežtai teigiamas. A teoremos įrodymas, skirtingai nuo pirmojo Voronino įrodymo, remiasi ribine teorema apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje. Pastarasis metodas buvo pasiūlytas B. Bagčio darbe [1] ir išvystytas [14], [22] ir [30] monografijose.

Vėliau buvo pastebėta, kad ir kitos dzeta ir L funkcijos taip pat yra universalios. Parabolinių formų dzeta funkcijos yra vienos iš Voronino prasme universalių funkcijų. Primename, kad funkcija $F(z)$ yra svorio κ parabolinė forma pilnos modulinės grupės

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} :\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

atžvilgiu, jei $F(z)$ yra holomorfinė funkcija viršutinėje puspokštumėje $\mathrm{Im}z > 0$, su kuriuo nors $\kappa \in 2\mathbb{N}$ ir visais $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ tenkina funkcinę lygtį

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\kappa} F(z)$$

ir begalybėje turi skleidinį Furjė eilute

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}.$$

Be to, laikome, kad svorio κ parabolinė forma $F(z)$ yra Hekės tikrinė forma, t.y., ji yra visų Hekės operatorių

$$(T_n f)(z) = n^{\kappa-1} \sum_{d|n} d^{-\kappa} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{nz+bd}{dz}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

tikrinė funkcija. Tuomet yra žinoma, kad $c(1) \neq 0$. Todėl forma $F(z)$ gali būti normuojama laikant $c(1) = 1$.

Su normuota Hekės tikrine paraboline forma galima susieti dzeta funkciją $\zeta(s,F)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ yra apibrėžiama

$$\zeta(s,F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

čia $\alpha(p)$ ir $\beta(p)$ su pirminiais p yra tokie jungtiniai kompleksiniai skaičiai, kad $\alpha(p) + \beta(p) = c(p)$. Funkcija $\zeta(s,F)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, t.y., ji yra sveikoji funkcija.

Modulinių formų teorija yra išdėstyta daugelyje monografijų, pavyzdžiui [6] ir [3].

Tyrimai apie funkcijos $\zeta(s,F)$ universalumą buvo pradėti [10] darbe, o universalumas pilnai įrodytas [23] straipsnyje. Tegul $D_\kappa = \left\{s \in \mathbb{C} :\ \frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}\right\}$. Tada B teorema yra A teoremos analogas funkcijai $\zeta(s,F)$.

B teorema. *Tarkime, kad $K \subset D_\kappa$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, ir kad $f(s)$ yra tolydi ir nelygi nuliui aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0,T] :\ \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau, F) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Įdomesnis ir sudėtingesnis už dzeta funkcijų universalumo savybę yra jų jungtinis universalumas. Pirmuosius jungtinio universalumo rezultatus taip pat gavo S. M. Voroninas. Jis įrodė [32], [13] jungtinę universalumo teoremą Dirichlė L funkcijoms. Primename, kad du Dirichlė charakteriai χ_1 ir χ_2

yra ekvivalentūs, jei jie yra generuojami to paties primityvaus charakterio. Dirichlė L funkcijų teorija yra aiškiai pateikiama, pavyzdžiui, [28] ir [12] monografijose. Formuluojame šiuolaikinę Voronino teoremos versiją.

C teorema. *Tarkime, kad $\chi_1, \dots, \chi_r$ yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai ir $L(s, \chi_1)$, $\dots, L(s, \chi_r)$ yra atitinkamos Dirichlė L funkcijos. Kai $j = 1, \dots, r$, tegul $K_j \subset D$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, ir tegul funkcija $f_j(s)$ yra tolydi nelygi nuliui aibėje K_j ir analizinė aibės K_j viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Kitokią C teoremos versiją savo darbuose gavo S. M. Gonekas [4] ir B. Bagči [1], [2]. C teorema yra pateikta [21] straipsnyje.

C teoremoje analizinės funkcijos yra vienu metu aproksimuojamos Dirichlė L funkcijų postūmiais. Ši procedūra, reikalauja tam tikros L funkcijų rinkinio nepriklausomybės, kuri yra išreiškiama Dirichlė charakterių neekvivalentumu. Žinomos kitų dzeta funkcijų jungtinio universalumo teoremos taip pat remiasi nepriklausomumo reikalavimais. Tai aiškiai atspindi Hurvico dzeta funkcijos jungtinio universalumo teorema. Pirmiausia priminsime Hurvico dzeta funkcijos apibrėžimą.

Tegul α, $0 < \alpha \le 1$, yra fiksuotas parametras. Tada Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Hurvico dzeta funkcijos savybių tyrimas yra gana įdomus, nes jos priklauso nuo aritmetinės parametro α prigimties. Funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ galioja tokia universalumo teorema.

D teorema. *Tarkime, kad skaičius α yra transcendentusis arba racionalusis $\neq 1, \frac{1}{2}$. Tegul $K \subset D$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, ir tegul $f(s)$ yra tolydi funkcija aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

D teoremą skirtingais metodais įrodė S. M. Gonekas [4] ir B. Bagčis [1] ir [29]. Matome, kad aproksimuojama funkcija $f(s)$, skirtingai nuo A teoremos, yra nebūtinai nelygi nuliui aibėje K. Taip yra todėl, kad Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ D teoremos atveju neturi Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius. Turime, kad $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ ir

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\zeta(s),$$

todėl funkcijos $\zeta(s, 1)$ ir $\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right)$ yra taip pat universalios, tačiau aproksimuojama funkcija $f(s)$ turi būti nelygi nuliui aibėje K.

Algebrinio iracionaliojo parametro α atvejis lieka neišspręstas iki šiol.

Dabar pateiksime jungtinę universalumo teoremą Hurvico dzeta funkcijoms. Tegul $0 < \alpha_j \le 1$, $j = 1, \dots, r$, ir

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, \quad j = 1, \dots, r\}.$$

E teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Kai $j = 1, \dots, r$, tegul $K_j \subset D$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, ir tegul $f_j(s)$ yra tolydi funkcija aibėje K_j ir yra analizinė aibės K_j viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

E teoremos įrodymas yra pateiktas [18] darbe. Skaičiams $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, kurie yra algebriškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_r$ nėra jokio polinomo $p(x_1, \dots, x_r) \not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais šaknys), kitoks E teoremos įrodymas yra pateiktas [27] straipsnyje.

Periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$, kuri yra klasikinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ apibendrinimas, universalumas yra įrodytas [7] straipsnyje. Tegul $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $k \in \mathbb{N}$, o α, $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras. Tada periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Iš sekos $\mathfrak{a}$ periodiškumo, kai $\sigma > 1$, išplaukia lygybė

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=0}^{k-1} a_l \zeta\left(s, \frac{l + \alpha}{k}\right).$$

Kadangi klasikinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra analizinė visoje kompleksinėje plokštumoje, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1, tai pastaroji lygybė parodo periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą su galimu paprastuoju poliumi taške $s = 1$, o reziduumas tame taške yra lygus

$$a \overset{def}{=} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} a_l.$$

Jei $a = 0$, tai periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ yra sveikoji funkcija.

[7] ir [8] darbuose yra gauta universalumo teorema Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ su transcendenčiuoju parametru α.

F teorema. *Tarkime, kad skaičius α yra transcendentusis. Tegul $K \subset D$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, ir tegul $f(s)$ yra tolydi funkcija aibėje K ir yra analizinė aibės K viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

F teorema yra panaši į D teoremą su transcendenčiuoju parametru α.

Periodinių Hurvico dzeta funkcijų jungtinis universalumas buvo pradėtas nagrinėti [16] darbe. Kai $j = 1, \dots, r$, tegul $\mathfrak{a}_j = \{a_{mj} : m \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $k_j \in \mathbb{N}$, α_j, $0 < \alpha_j \leq 1$, yra fiksuotas parametras, o $\zeta(s, \alpha_j; \mathfrak{a}_j)$ yra atitinkama periodinė Hurvico dzeta funkcija. Tegul k yra periodų $k_1, \dots, k_r$ mažiausias bendras kartotinis, ir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} \end{pmatrix}.$$

[16] straipsnyje yra įrodyta, kad jei $k_j = k$, $\alpha_j = \alpha$, kai $j = 1, \dots, r$, α yra transcendentusis ir $\text{rank}(A) = r$, tada periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}_r)$ galioja jungtinis universalumas. [17] darbe nebeliko reikalavimo, kad $k_j = k$, kai $j = 1, \dots, r$. Galiausiai, [9] straipsnyje yra įrodyta tokia jungtinė universalumo teorema.

G teorema. *Tarkime, kad skaičiai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, ir kad* $\text{rank}(A) = r$. *Kai $j = 1, \dots, r$, tegul K_j ir $f_j(s)$ yra tokios pat kaip ir E teoremoje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Pirmame disertacijos skyriuje G teoremos rango sąlygos buvo atsisakyta ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų jungtinio universalumo teorema įrodyta be matricos A. Gauname tokį sutrumpintą 1.1 teoremos tvirtinimą.

1.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Kai $j = 1, \dots, r$, tegul K_j ir $f_j(s)$ yra tokios pačios kaip ir G teoremoje. Tada yra teisingas G teoremos tvirtinimas.*

Periodinių Hurvico dzeta funkcijų jungtinis universalumas turi bendresnę formą, kai prie kiekvieno parametro α_j yra pridedamas periodiškų sekų rinkinys. Pirmasis toks jungtinio universalumo išplėtimas buvo pateiktas [24] darbe. Ankščiau minėta idėja periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms yra pritaikyta [19] darbe. Tegu l_j, $j = 1, \dots, r$, yra teigiamas sveikasis skaičius. Kiekvienam $l = 1, \dots, l_j$, tegul $\mathfrak{a}_{jl} = \{a_{mjl} : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $k_{jl} \in \mathbb{N}$. Kai $j = 1, \dots, r$, tegul α_j yra fiksuotas parametras, $0 < \alpha_j \le 1$, ir pusplokštumėje $\sigma > 1$,

$$\zeta(s, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl}}{(m + \alpha_j)^s}.$$

Tegul k yra periodų $k_{11}, \dots, k_{1l_1}, \dots, k_{r1}, \dots, k_{rl_r}$ mažiausias bendras kartotinis. Apibrėžiame matricą

$$B = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} & \dots & a_{11l_1} & a_{122} & \dots & a_{12l_2} & \dots & a_{1r1} & a_{1r2} & \dots & a_{1rl_r} \\ a_{211} & a_{212} & \dots & a_{21l_1} & a_{222} & \dots & a_{22l_2} & \dots & a_{2r1} & a_{2r2} & \dots & a_{2rl_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k11} & a_{k12} & \dots & a_{k1l_1} & a_{k22} & \dots & a_{k2l_2} & \dots & a_{kr1} & a_{kr2} & \dots & a_{krl_r} \end{pmatrix},$$

ir pažymime

$$\kappa = \sum_{j=1}^{r} l_j.$$

Tada [19] darbe yra gautas toks rezultatas.

H teorema. *Tarkime, kad sistema $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, ir tegul* $\operatorname{rank}(B) = \kappa$. *Kiekvienam $j = 1, \dots, r$ ir $l = 1, \dots, l_j$, tegul K_{jl} yra kompaktinis juostos D poaibis su jungiuoju papildiniu, ir tegul $f_{jl}(s)$ yra tolydi funkcija aibėje K_{jl} ir analizinė aibės K_{jl} viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \le j \le r} \sup_{1 \le l \le l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Antrame disertacijos skyriuje yra susilpninama rango sąlyga H teoremoje. Tegul k_j yra periodų $k_{j1}, k_{j2}, \dots, k_{jl_j}$, $j = 1, \dots, r$, mažiausias bendras kartotinis. Apibrėžiame matricą

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{1j1} & a_{1j2} & \dots & a_{1jl_j} \\ a_{2j1} & a_{2j2} & \dots & a_{2jl_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_j j1} & a_{k_j j2} & \dots & a_{k_j jl_j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Tada antrasis pagrindinis disertacijos rezultatas yra tokia teorema.

2.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, ir* $\operatorname{rank}(B_j) = l_j$, $j = 1, \dots, r$. *Tegul K_{jl} ir f_{jl} yra tokios pat, kaip ir H teoremoje. Tada teisingas H teoremos tvirtinimas.*

2.1 teoremoje, skirtingai nuo H teoremos, yra naudojama informacija, susijusi tik su α_j, $j = 1, \dots, r$.

Visos anksčiau minėtos dzeta ir L funkcijų jungtinio universalumo teoremos yra to paties tipo. Pavyzdžiui, C teoremoje gautas jungtinis funkcijų, kurios turi Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius, universalumas, tuo tarpu, jungtinio universalumo teoremos periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms sudaro grupę dzeta funkcijų, kurios neturi Oilerio sandaugos. H. Mišu (H. Mishou) gavo [26] jungtinį universalumą dzeta funkcijoms, kurios turi ir neturi Oilerio sandaugos. Tokį universalumą vadiname mišriuoju universalumu. [26] straipsnyje jis įrodė jungtinę universalumo teoremą Rymano bei Hurvico dzeta funkcijoms.

I teorema. *Tarkime, kad skaičius α yra transcendentusis. Tegul $K_1 \subset D, K_2 \subset D$ yra kompaktiniai poaibiai su jungiaisiais papildiniais, $f_1(s)$ yra tolydi ir nelygi nuliui funkcija aibėje K_1 ir analizinė aibės K_1 viduje, ir tegul $f_2(s)$ yra tolydi funkcija aibėje K_2 ir analizinė aibės K_2 viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T]: \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \right.$$
$$\left. \sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f_2(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

I teoremos apibendrinimas pateiktas [11] darbe. Tegul $\mathfrak{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $l \in \mathbb{N}$. Tada periodinė dzeta funkcija $\zeta(s;\mathfrak{b})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s;\mathfrak{b}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s}.$$

Iš sekos $\mathfrak{b}$ periodiškumo randame, kad srityje $\sigma > 1$,

$$\zeta(s;\mathfrak{b}) = \frac{1}{l^s}\sum_{j=1}^{l} b_j \zeta\left(s, \frac{j}{l}\right).$$

Ši lygybė duoda funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{b})$ meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą su galimu paprastuoju poliumi taške $s = 1$ ir su reziduumu

$$b \overset{def}{=} \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} b_j.$$

Jei $b = 0$, tai $\zeta(s;\mathfrak{b})$ yra sveikoji funkcija.

Primename, kad seka $\mathfrak{b}$ yra multiplikatyvioji, jei $b_1 = 1$ ir $b_{mn} = b_m b_n$ su visais tarpusavyje pirminiais skaičiais $m, n \in \mathbb{N}$. Funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{b})$ universalumas su multiplikatyviąja seka $\mathfrak{b}$ gautas [25] darbe. Šiuo atveju turime teoremą, panašią į A teoremą.

[11] straipsnyje yra įrodytas funkcijų $\zeta(s;\mathfrak{b})$ ir $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ jungtinis universalumas.

J teorema. *Tarkime, kad seka $\mathfrak{b}$ yra multiplikatyvi, kiekvienam pirminiam skaičiui p,*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|b_{p^l}|}{p^{\frac{l}{2}}} \le c < 1,$$

ir skaičius α yra transcendentusis. Tegul K_1, K_2 ir $f_1(s)$, $f_2(s)$ yra tos pačios, kaip ir I teoremoje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T]: \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau;\mathfrak{b}) - f_1(s)| < \varepsilon, \right.$$
$$\left. \sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f_2(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

J teoremos daugiamatis variantas buvo gautas [20] darbe, t.y., buvo įrodytas jungtinis dzeta funkcijų $\zeta(s;\mathfrak{b}_1),\dots,\zeta(s;\mathfrak{b}_{r_1})$ ir $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}_1),\dots,\zeta(s,\alpha_{r_2};\mathfrak{a}_{r_2})$ universalumas.

K teorema [20]. *Tarkime, kad su visais $j=1,\dots,r_1$ seka $\mathfrak{b}_j$ yra multiplikatyvi, su kiekvienu pirminiu skaičiumi p*

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{|b_{p^l j}|}{p^{\frac{l}{2}}}\le c_j<1,$$

ir skaičiai $\alpha_1,\dots,\alpha_2$ yra algebriškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Visiems $j=1,\dots,r_1$, tegul $K_j\subset D$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, ir tegul $f_j(s)$ yra tolydi nelygi nuliui funkcija aibėje K_j ir analizinė aibės K_j viduje. Visiems $j=1,\dots,r_2$, tegul $\widehat{K_j}\subset D$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, ir tegul $\widehat{f}_j(s)$ yra tolydi funkcija aibėje $\widehat{K_j}$ ir analizinė aibės $\widehat{K_j}$ viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon>0$

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{meas}\Big\{\tau\in[0,T]:\ \sup_{1\le j\le r_1}\sup_{s\in K_j}|\zeta(s+i\tau;\mathfrak{b}_j)-f_j(s)|<\varepsilon,$$
$$\sup_{1\le j\le r_2}\sup_{s\in\widehat{K_j}}|\zeta(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_j)-\widehat{f}_2(s)|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Disertacijos 3 skyriuje apibendriname 2.1 teoremą, prie funkcijų $\zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_{11}),\dots,\zeta(s,\alpha_1;\mathfrak{a}_{1l_1}),\dots,$ $\zeta(s,\alpha_r;\mathfrak{a}_{r1}),\dots,\zeta(s,\alpha_r;\mathfrak{a}_{rl_r})$ pridėdami Rymano dzeta funkciją $\zeta(s)$.

3.1 teorema. *Tarkime, kad skaičiai $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, $\mathrm{rank}(B_j)=l_j$, $j=1,\dots,r$, o aibės K_{jl} ir funkcijos $f_{jl}(s)$ yra tos pačios kaip ir 2.1 teoremoje. Tegul $K\subset D$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, ir tegul $f(s)$ yra tolydi nelygi nuliui funkcija aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{meas}\Big\{\tau\in[0,T]:\ \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon,$$
$$\sup_{1\le j\le r}\sup_{1\le l\le l_j}\sup_{s\in K_{jl}}|\zeta(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl})-f_{jl}(s)|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Disertacijos 4 skyriuje įrodytos 3.1 teoremos analogas su funkcija $\zeta(s,F)$ vietoje $\zeta(s)$. Tai yra žymiai sudėtingesnis atvejis, nes funkcijos $\zeta(s,F)$ ir $\zeta(s,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl})$ yra universalios skirtingose juostose D_κ ir D. Primename, kad $\zeta(s,F)$ yra normuotos svorio κ Hekės tikrinės formos F dzeta funkcija.

4.1 teorema. *Tarkime, kad F yra normuota svorio κ Hekės tikrinė parabolinė forma pilnosios modulinės grupės atžvilgiu, skaičiai $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, o $\mathrm{rank}(B_j)=l_j$, $j=1,\dots,r$. Tegul $K\subset D_\kappa$ yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, $f(s)$ yra tolydi nelygi nuliui funkcija aibėje K_κ ir analizinė aibės K_κ viduje, o visos aibės K_{jl} ir funkcijos $f_{jl}(s)$ yra tos pačios, kaip ir 2.1 teoremoje. Tada su kiekvienu $\varepsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{meas}\Big\{\tau\in[0,T]:\ \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,F)-f(s)|<\varepsilon,$$
$$\sup_{1\le j\le r}\sup_{1\le l\le l_j}\sup_{s\in K_{jl}}|\zeta(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl})-f_{jl}(s)|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Universalumo istoriją galima rasti labai informatyviame [5] straipsnyje, bei [30], [15], [24] darbuose.

Visi jungtinio universalumo teoremų įrodymai remiasi tikimybiniu metodu ir naudoja ribines teoremas apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje bei ribinio mato atramų tose teoremose pavidalą.

Išvados.

1. Periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_r)$ su parametrais $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, kurioms aibė $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{\log(m+\alpha_j) : \ m \in \mathbb{N}_0, \quad j = 1, \dots, r\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, yra teisinga jungtinė universalumo teorema.

2. Periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})$ su aibe $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir rango sąlyga, susijusia tik su parametru α_j, $j = 1, \dots, r$, galioja jungtinė universalumo teorema.

3. Rymano dzeta funkcijai $\zeta(s)$ ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų rinkiniui $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})$ su algebriškai nepriklausomais virš $\mathbb{Q}$ parametrais $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ir rango sąlyga, susijusia tik su fiksuotu α_j, $j = 1, \dots, r$, galioja jungtinė universalumo teorema.

4. Normuotos Hekės tikrinės formos F pilnos modulinės grupės atžvilgiu dzeta funkcijai $\zeta(s, F)$ ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})$ rinkiniui su algebriškai nepriklausomais virš kūno $\mathbb{Q}$ parametrais $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ir rango sąlyga, susijusia tik su fiksuotais α_j, $j = 1, \dots, r$, galioja jungtinė universalumo teorema.

Aprobacija. Disertacijos rezultatai buvo pristatyti Lietuvos matematikos draugijos konferencijose (2009-2012), 10^{th} International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics (2010, birželio 28-liepos 2, Vilnius), Pirmojoje jaunųjų mokslininkų konferencijoje "Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai" (2011, vasario 8 d., Vilnius), 16^{th} International Conference Mathematical Modelling and Analysis (2011, gegužės 25-28, Sigulda, Latvia), 8^{th} International Algebraic Conference in Ukraine (2011, liepos 5-12, Lugansk, Ukraina), International Conference 27^{th} Journées Arithmétiques (2011, birželio 27-liepos 1, Vilnius), 17^{th} International Conference on Mathematical Modelling and Analysis (2012, birželio 6-9, Talinas, Estija), taip pat Matematikos ir informatikos instituto doktorantų seminaruose bei Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto seminaruose.

Dėkoju moksliniam vadovui prof. habil. dr. Antanui Laurinčikui už paramą rengiant disertaciją. Esu dėkinga Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto Skaičiavimo metodų skyriaus ir Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto nariams už diskusijas ir moralinę paramą.

Publikacijų disertacijos tema sąrašas

Straipsniai recenzuojamuose moksliniuose leidiniuose:

1. A. Laurinčikas, S. Skerstonaitė, A joint universality theorem for periodic Hurvitz zeta-functions. II, *Lith. Math. J.* Vol. 49, No 3, 287-296 (2009).

2. A. Laurinčikas, S. Skerstonaitė, Joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions. II, in: *New Directions in Value-Distribution Theory of Zeta and L-Functions*, Würzburg Conference, 6-10 October (2008), R. Steuding and J. Steuding (Eds.), Shaker Verlag, Aachen, 161-169 (2009).

3. S. Račkauskienė, D. Šiaučiūnas, Joint universality of some zeta functions. I, *Lietuvos Matematikos Rinkinys*. T. 51, 45-50 (2010).

4. J. Genys, R. Macaitienė, S. Račkauskienė, D. Šiaučiūnas, A mixed joint universality theorem for zeta-functions. *Mathematical Modelling and Analysis*, Vol. 15, No 4, 431-446 (2010).

5. S. Račkauskienė, D. Šiaučiūnas, A mixed joint universality theorem for zeta-functions. II, (*Pateiktas leidiniui*).

Konferencijų pranešimų tezės:

1. S. Račkauskienė, Joint universality of periodic Hurvitz zeta-functions, 10th International Vilnius conference on probability and mathematical statistics: 28 June - 2 July, 2010, Vilnius, Lithuania: Abstracts of communications. Vilnius: TEV, 2010 p. 244.

2. S. Račkauskienė, D. Šiaučiūnas, Joint universality for zeta-functions of cusp forms and periodic Hurwitz zeta-functions/ Mathematical modelling and analysis: 16th International Conference, May 25-28, 2010, Sigulda, Latvia: Abstracts. p. 100.

3. S. Račkauskienė, Įvairių dzeta funkcijų jungtinė universalumo teorema, Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai: pirmosios LMA Jaunųjų mokslininkų konferencijos pranešimų santraukos, Vilnius, 2011.02.
   28. Vilnius: LMA leidykla, 2011. p. 12.

4. S. Račkauskienė, D. Šiaučiūnas, Joint Universality of some zeta-functions, Book of Abstracts of the 8th International Algebraic Conference in Ukraine, Dedicated to the Memory of Proffesor Vitaliy Mikhaylovich Usenko, July 5-12, 2012, Lugansk, Taras Shevchenko National University, p. 44.

5. S. Račkauskienė, D. Šiaučiūnas, Joint Universality of certain zeta-functions, 27th Journées Arithmétiques, 2011 06 27 - 07 01, Vilnius, Lithuania: Programme and abstract book. p. 61.

6. S. Račkauskienė, Universality of zeta-functions with periodic coefficients, Mathematical Modelling and Analysis: 17th International Conference, June 6-9, 2012, Tallinn, Estonia: Abstracts. p. 97.

Cituota literatūra

1. B. Baghchi, *The statistical behaviour and universality properties of The Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta (1981).

2. B. Bagchi, A joint universality theorem for Dirichlet L-functions, *Math. Z.*, **181** (3) (1982), 319–334.

3. R. Garunkštis, Modulinių formų įvadas: [vadovėlis], *TEV*, Vilnius, 2007.

4. S. M. Gonek, *Analytic properties of zeta and L-functions*, Ph. D. Thesis, University of Michigan (1979).

5. K. G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 345–381.

6. H. Iwaniec and E. Kowalski *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ., Vol. **53**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2004).

7. A. Javtokas and A. Laurinčikas, On the periodic Hurwitz zeta-function, *Hardy-Ramanujan J.* **29** (2006), 18–36.

8. A. Javtokas and A. Laurinčikas, The universality of the periodic Hurwitz zeta-function, *Integral Transforms Spec. Funct.* **17** (10) (2006), 711–722.

9. A. Javtokas and A. Laurinčikas, A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta-functions, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **78** (2008), 13–33.

10. A. Kačėnas and A. Laurinčikas, *On Dirichlet series related to certain cusp forms*, Liet. Matem. Rink. **38** (1) (1998), 82–97 (in Russian)=*Lith. Math. J.* **38** (1) (1998), 64–76.

11. R. Kačinskaitė and A. Laurinčikas, The joint distribution of periodic zeta-functions, *Studia, Sci. Math. Hungarica* 48 (2) (2011), 257–279.

12. A. A. Karatsuba, *Principles of Analytic Number Theory*, Nauka, Moskow, (1983) (in Russian).

13. A. A. Karatsuba and S. M. Voronin *The Riemann Zeta-Function*, de Gruyter, New York, (1992).

14. A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London (1996).

15. A. Laurinčikas, The universality of zeta-functions, *Acta Appl. Math.* **78** (1–3) (2003), 251–271.

16. A. Laurinčikas, The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions, *Analysis* (Munich) **26** (3) (2006), 419–428.

17. A. Laurinčikas, Voronin-type theorem for periodic Hurwitz zeta-functions, *Mat. Sb.* **198** (2) (2007), 91–102 (in Russian) = *Sb. Math.* **198** (2) (2007), 231–242.

18. A. Laurinčikas, The joint universality of Hurwitz zeta-functions, *Šiauliai Math. Semin.* **3** (11) (2008), 169-187.

19. A. Laurinčikas, The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions, *Izv. RAN, Ser. Mat.* **72** (4) (2008), 121–140 (in Russian) = *Izv. Math.* **72** (4) (2008), 741–760.

20. A. Laurinčikas, Joint universality of zeta-functions with periodic coefficients, Izv. RAN, Ser. Matem., **74** (3) (2010), 79–102 (in Russian)≡*Izv. Math*, **74** (3) (2010), 515–539.

21. A. Laurinčikas, On joint universality of Dirichlet L-functions, Chebysh. Sb. **12** (1) (2011), 124–139.

22. A. Laurinčikas and R. Garunkštis *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (2002).

23. A. Laurinčikas and K. Matsumoto, The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms, *Acta Arith.*, **98** (2001), 345–359.

24. A. Laurinčikas and K. Matsumoto, Joint value distribution theorems on Lerch zeta-functions. III, in: *Anal. Probab. Methods Number Theory*, A. Laurinčikas and E. Manstavičius (Eds.), TEV, Vilnius, (2007), 87–98.

25. A. Laurinčikas and D. Šiaučiūnas, Remarks on the universality of the periodic zeta-function, *Matem. zametki* **80** (4) (2006), 561–568 (in Russian)= *Math. Notes* **80** (3–4) (2006),532–538.

26. H. Mishou, The joint value distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions, *Lith. Math. J.* **47** (2007), 32–47.

27. T. Nakamura, The existence and the non-existence of joint t-universality for Lerch zeta-functions, *J. Number theory* **125** (2) (2007), 424–441.

28. K. Prachar, Distribution of Prime Numbers, Mir, Moscow, (1967) (in Russian).

29. J. Sander and J. Steuding, *Joint universality for sums and products of Dirichlet L-functions*, Analysis (Munich) **26** (2006), 295–312.

30. J. Steuding, *Value-Distribution of L-Functions*, Lecture Notes Math., **1877**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (2007).

31. S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.*, **39** (3) (1975), 475–486 (in Russian) = *Math. USSR Izv.*, **9** (3) (1975), 443–453.

32. S. M. Voronin, On the functional independence of Dirichlet L-functions, *Acta Arith.* **27** (1975), 493–503 (in Russian).

Summary

Let $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers. The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$, $s = \sigma + it$, with parameter α, $0 < \alpha \leq 1$, is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. Moreover, let $\zeta(s)$ denote the Riemann zeta-function, and let $\zeta(s, F)$ be the zeta-function attached to a normalized Hecke eigen cusp form of weight κ for the full modular group.

In Chapter 1, the joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_r)$ with parameters $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ such that the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{\log(m + \alpha_j) : \ m \in \mathbb{N}_0, \quad j = 1, \dots, r\}$ is linearly independent over field of rational numbers $\mathbb{Q}$ is obtained.

In Chapter 2, the joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1})$, $\dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})$ with the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ linearly independent over $\mathbb{Q}$ and a rank condition related only to each fixed α_j, $j = 1, \dots, r$, is proved.

In Chapter 3, the mixed joint universality for a collection $\zeta(s)$, $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})$ with algebraically independent over $\mathbb{Q}$ parameters $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ and a rank condition related only to each fixed α_j, $j = 1, \dots, r$, is obtained.

In Chapter 4, the mixed joint universality for a collection $\zeta(s, F)$, $\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \dots,$ $\zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})$ with algebraically independent over $\mathbb{Q}$ parameters $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ and a rank condition related only to each fixed α_j, $j = 1, \dots, r$, is proved.

All results of thesis are new. They improve or extend joint universality results for periodic Hurwitz zeta-functions.

Trumpos žinios apie autorę

Gimimo data ir vieta

1983 m. rugpjūčio 2 d., Venta, Akmenės rajonas.

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

2002 m. Akmenės rajono Ventos vidurinė mokykla.

2007 m. Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, baigus Matematikos ir informatikos studijų programą, suteiktas matematikos bakalauro ir matematikos bei informatikos mokytojo kvalifikacinis laipsnis.

2009 m. Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, baigus Matematikos studijų programą, suteiktas matematikos magistro kvalifikacinis laipsnis.

Darbo patirtis

2007–2010 m. Šiaulių universiteto Matematikos katedros administratorė.

Nuo 2008 m. Šiaulių universiteto Matematikos katedros asistentė.

Short information about the author

Birth date and place

August 2, 1983, Venta, Akmenė region.

Education:

2002 Akmenė region Venta secondary school.
2007 Šiauliai University, Faculty of Mathematics and Informatics, bachelor of mathematics and informatics.
2009 Šiauliai University, Faculty of Mathematics and Informatics, master of mathematics.

Working experience:

2007–2010 Šiauliai University, Department of Mathematics, administrator.
Since 2008 Šiauliai University, Department of Mathematics, assistant.