VILNIAUS UNIVERSITETAS

Monika Vilkienė

PUSGRUPIŲ APROKSIMACIJŲ TIKSLUMO TYRIMAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2011

Disertacija rengta 2006–2010 metais Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas:

habil. dr. Vidmantas BENTKUS (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas
prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Nariai:
prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
prof. habil. dr. Juozas Augutis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Oponentai:
doc. dr. Mečislovas Meilūnas (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
doc. dr. Saulius Norvidas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2011 m. balandžio mėn. 6 d. 11 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto 203 kab. Adresas: Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2011 m. kovo mėn. 1 d.
Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Monika Vilkienė

INVESTIGATIONS OF THE ACCURACY OF APPROXIMATIONS OF SEMIGROUPS

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, mathematics (01 P)

Vilnius, 2011

The dissertation was prepared at Institute of Mathematics and Informatics in 2006–2010.

Scientific supervisor

$\boxed{\text{Dr. Habil. Vidmantas BENTKUS}}$ (Institute of Mathematics and Informatics, physical sciences, mathematics – 01P).

The Council:

Chairman
Prof. Dr. Habil. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

Members:
Prof. Dr. Habil. Alfredas Račkauskas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)
Prof. Dr. Habil. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)
Prof. Dr. Habil. Juozas Augutis (Vytautas Magnus University, physical sciences, mathematics – 01P)
Prof. Dr. Habil. Algimantas Bikelis (Vytautas Magnus University, physical sciences, mathematics – 01P)

Opponents:
Doc. Dr. Mečislovas Meilūnas (Vilnius Gediminas Technical University, physical sciences, mathematics – 01P)
Doc. Dr. Saulius Norvidas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council at 11:00 on April 6, 2011 in Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics, Room 203. Address: Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on March 1st, 2011.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Turinys

1 Įvadas **6**

2 Pusgrupių aproksimacijų asimptotiniai skleidiniai ir konvergavimo greitis **12**

2.1 Eulerio aproksimacijų asimptotiniai skleidiniai 12

2.2 Kitas metodas 15

2.3 Josidos aproksimacijų konvergavimo greitis 18

2.4 Josidos aproksimacijų asimptotiniai skleidiniai 21

3 Išvados **24**

Summary **25**

Literatūra **27**

1 Įvadas

Disertacijos tikslas - ištirti kai kurių pusgrupių aproksimacijų tikslumą. Darbe nagrinėjamos operatorių pusgrupių Eulerio ir Josidos aproksimacijos. Buvo sukonstruoti Eulerio aproksimacijų asimptotiniai skleidiniai ir rasti šių skleidinių liekamųjų narių optimalūs įverčiai. Pateiktos įvairios šių skleidinių koeficientų analizinės išraiškos. Taip pat buvo tiriamas operatorių pusgrupių Josidos aproksimacijų konvergavimas. Buvo gauti du optimalūs konvergavimo greičio įverčiai su optimaliomis konstantomis, taip pat pateikti Josidos aproksimacijų asimptotiniai skleidiniai su optimaliais liekamųjų narių įverčiais.

Disertacijos rezultatai atspausdinti šiuose straipsniuose:

1. M. Vilkienė. Optimal convergence rate for Yosida approximations of bounded holomorphic semigroups. Lithuanian Mathematical Journal, 49(2): 234—239, 2009.

2. M. Vilkienė. Asymptotic expansions for Yosida approximations of semigroups. Liet. Matem. Rink., 48/49(spec. nr.):78—83, 2008.

3. M. Vilkienė. Another approach to asymptotic expansions for Euler's approximations of semigroups. Lithuanian Mathematical Journal, 46(2): 217—232, 2006.

4. M. Vilkienė. Explicit formulas in asymptotic expansions for Euler's approximations of semigroups. Liet. Matem. Rink., 46(spec. nr.): 64—69, 2006.

Operatorių pusgrupės

Tarkime, X yra Banacho erdvė, $L(X)$ - aprėžtų tiesinių operatorių, veikiančių erdvėje X, algebra. Tegul $\|\cdot\|$ žymi normą erdvėse X ir $L(X)$, I - vienetinis operatorius.

1.1 apibrėžimas. *Funkcija* $S : \mathbb{R}_+ \mapsto L(X)$ *vadinama pusgrupe, jei visiems* $t, s \geq 0$ *galioja lygybės*

1) $S(t+s) = S(t)S(s)$,

2) $S(0) = I$.

1.2 apibrėžimas. *Pusgrupė* $S(t)$ *vadinama stipriai tolydžia, jei*

$$\lim_{t\downarrow 0} S(t)x = x \qquad \textit{su visais} \quad x \in X.$$

Pusgrupė $S(t)$ vadinama *tolygiai tolydžia*, jei

$$\lim_{t\downarrow 0} \|S(t) - I\| = 0.$$

Pusgrupė vadinama *aprėžta*, jei su visais $t \geq 0$

$$\|S(t)\| \leq M.$$

Jei $M = 1$, pusgrupė $S(t)$ vadinama *sutraukiančiąja.*

1.3 apibrėžimas. *Stipriai tolydžios pusgrupės $S(t)$ generatorius A yra operatorius*

$$Ax := \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(S(h)x - x),$$

kurio apibrėžimo sritis

$$D(A) = \{x \in X : \text{ egzistuoja } \lim_{h\downarrow 0}(S(h)x - x)/h.\}$$

Teiginys. A yra uždaras operatorius, o $D(A)$ - tiršta erdvėje X. Generatorius A vienareikšmiškai nusako pusgrupę $S(t)$.

Teiginys. $S(t)$ yra tolygiai tolydi pusgrupė tada ir tik tada, kai jos generatorius A yra aprėžtas operatorius.

1.4 apibrėžimas. *Operatoriaus A (nebūtinai aprėžto) rezolventine aibe $\rho(A)$ vadinama aibė visų $\lambda \in \mathbb{C}$, su kuriais $\lambda I - A$ yra apverčiamas. Šeima*

$$R(\lambda) = (I - \lambda A)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(A)$$

vadinama operatoriaus A rezolvente.

Pusgrupių klasės

Stipriai tolydžių pusgrupių $S(t)$, $t \geq 0$ su generatoriumi A erdvėje X orbitos $S(t)x$ yra diferencijuojamos su visais $t \geq 0$, jei $x \in D(A)$. Jei $x \in D(A)$, tai $S(t)x \in D(A)$ ir

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Taigi, orbitos diferencijuojamos su visais $x \in X$ tik jei generatorius A yra aprėžtas (ir $D(A) = X$).

Apibrėšime klasę stipriai tolydžių pusgrupių, kurių orbitos yra diferencijuojamos su visais $x \in X$, bet ne su visais t.

1.5 apibrėžimas. *$S(t)$ vadinama diferencijuojama, jei funkcija $t \to S(t)x$ diferencijuojama su visais $t > 0$.*

Teisingas teiginys: jei $S(t)$ diferencijuojama, tai ji diferencijuojama be galo daug kartų tolygiojoje topologijoje ir

$$S^{(n)}(t) = A^n S(t), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

1.6 apibrėžimas. *Tarkime, $\Sigma_\theta = \{z : |\arg z| < \theta\}$, $\theta > 0$ - sektorius erdvėje $\mathbb{C}$ ir $S(z) \in L(X)$ su visais $z \in \Sigma_\theta$. Šeima $S(z)$, $z \in \Sigma_\theta$ vadinama holomorfine pusgrupe sektoriuje Σ_θ, jei :*

(i) funkcija $z \mapsto S(z)$ yra analizinė sektoriuje Σ_θ,

(ii) $S(0) = I$ ir $lim_{z \to 0, z \in \Sigma_\theta} S(z)x = x$ su kiekvienu $x \in X$,

(iii) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ su visais $z_1, z_2 \in \Sigma_\theta$.

$S(t)$, $t \geq 0$ vadinama holomorfine, jei ji yra holomorfinė kokiame nors sektoriuje Σ_θ.

1.7 apibrėžimas. *$S(t)$, $t \geq 0$ vadinama aprėžta holomorfine pusgrupe sektoriuje Σ_θ jei ji turi aprėžtą holomorfinį plėtinį sektoriuose $\Sigma_{\theta'}$ su visais $\theta' \in (0, \theta)$. $S(t)$, $t \geq 0$ vadinama aprėžta holomorfine pusgrupe, jei ji yra aprėžta holomorfinė pusgrupė kokiame nors sektoriuje Σ_θ, $\theta > 0$.*

Pastaba. Jei $S(t)$ yra aprėžta pusgrupė, kuri yra holomorfinė, tai ji nebūtinai yra aprėžta holomorfinė pusgrupė. Pvz., $X = \mathbb{C}$ ir $S(t) = e^{it}$ $(t \geq 0)$.

Pusgrupių aproksimacijos

Šiame paragrafe supažindinsime su pusgrupių Eulerio ir Josidos aproksimacijomis. Daugeliu svarbių atvejų neaprėžto operatoriaus A ir jo generuotos pusgrupės tyrimai yra labai sudėtingi, todėl šiais atvejais dažnai praverčia jų aproksimacijos. Yra žinoma daugybė generuojančiųjų teoremų, kurios naudoja įvairias aproksimacijas ([8], [1], [6], [10], [12]). Eulerio ir Josidos aproksimacijos naudojamos diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis teorijoje evoliucinių lygčių sprendiniams aproksimuoti ([10], [6], [7], [9]).

Jei pusgrupė tolygiai tolydi, tai ją galima užrašyti eksponentine eilute

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Eilutė konverguoja, nes A - aprėžtas operatorius. Stipriai tolydžioms pusgrupėms ši eilutė dažniausiai nekonverguoja, nes A yra neaprėžtas, todėl šioms pusgrupėms nusakyti dažnai naudojamos įvairios "eksponentinės formulės", gautos aproksimacijų pagalba. Nemažai jų galima rasti [8] knygoje.

Eulerio aproksimacijos. Tarkime, $S(t)$ - stipriai tolydi pusgrupė su generatoriumi A ir rezolvente $R(\lambda)$.

1.8 apibrėžimas. *Apibrėžkime* $E(\lambda) := (1/\lambda)R(1/\lambda)$*. Funkcijos*

$$E^n(t/n) = (n/t)^n R^n(n/t) = (I - tA/n)^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

vadinamos pusgrupės $S(t)$ *Eulerio aproksimacijomis.*

Vienmačiu atveju iš matematinės analizės gerai žinome Eulerio eksponentinę formulę:

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{tA}{n} \right)^{-n},$$

Hille įrodė, kad ši lygybė galioja ir stipriai tolydžioms pusgrupėms (žr. [8], [6]), t.y.

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty} E^n(t/n)x.$$

Josidos aproksimacijos. Naudodami Eulerio aproksimacijas pusgrupę aproksimuojame aprėžto operatoriaus (rezolventės) laipsniais. Kitas būdas - generatorių A aproksimuoti "paprastesniais" operatoriais.

Tarkime, A yra sutraukiančiosios pusgrupės generatorius. Operatoriaus A Josidos aproksimatorius yra

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda > 0.$$

A_λ generuoja tolygiai tolydžią sutraukiančiąją pusgrupę

$$S_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Teisinga tokia teorema :

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x, \quad x \in X.$$

$S_\lambda(t)$, $\lambda > 0$ vadinamos pusgrupės $S(t)$ *Josidos aproksimacijomis.*

Pusgrupių aproksimacijų tikslumo tyrimai

Eulerio aproksimacijos konvergavimo paklaidą $\Delta_n = \|E^n(t/n) - S(t)\|$ bandė įvertinti įvairūs matematikai. Pavyzdžiui, m-sektorinėms pusgrupėms Hilberto erdvėse Cachia ir Zagrebnov 2001 m. gavo įvertį $\Delta_n = O(n^{-1}\ln n)$. 2003 m. Paulauskas pasiūlė naują idėją, kuri remiasi tikimybiniais metodais, ir pagerino Cachia ir Zagrebnovo įvertį iki $\Delta_n = O(n^{-1})$. Aprėžtoms holomorfinėms pusgrupėms Banacho erdvėse Cachia 2003 m. gavo įvertį $O(n^{-1}\ln n)$. Bentkus [3] straipsnyje pasiūlė naują metodą paklaidoms Centrinėje ribinėje teoremoje ir aproksimacijoms palydinčiaisiais dėsniais tirti. Naudodami šį metodą, Bentkus ir Paulauskas [5] straipsnyje gavo optimalius konvergavimo greičius kai kurioms operatorių aproksimacijoms, tame tarpe pagerino Cachia 2003 m. įvertį iki $O(n^{-1})$. [2], [13] straipsniuose buvo pateikti nauji paklaidos įverčio $\Delta_n = O(n^{-1})$ įrodymai kvazi-sektorinėms sutraukiančiosioms pusgrupėms.

Tyrimo metodas

Pusgrupių aproksimacijų tikslumo tyrimui naudojome metodą, pasiūlytą [3], [5]. Tarkime, mums reikia įvertinti skirtumą $a - b$. Naudodami šį metodą, skirtumą $a - b$ užrašome multiplikatyviojoje formoje: 1) parenkame kreivę $\gamma(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, jungiančią du objektus a ir b taip, kad $\gamma(0) = a$ ir $\gamma(1) = b$; 2) skirtumą $a - b$ išreiškiame integralu naudodami Niutono–Leibnico formulę:

$$b - a = \int_0^1 \gamma'(\tau) d\tau.$$

Pavyzdžiui, Eulerio aproksimacijoms parinkome $\gamma(\tau) = E^n(\tau t/n)S(t(1-\tau))$ (kaip ir [5] str.):

$$E^n(t/n) - S(t) = \frac{1}{n}\int_0^1 \tau(tA)^2 E^{n+1}(\tau t/n) S(t(1-\tau))\, d\tau. \tag{1.1}$$

Bentkus ir Paulauskas [5] naudodami (1.1) išraišką, gavo optimalų Eulerio aproksimacijų paklaidos įvertį pusgrupėms, tenkinančioms (1) ir (2) sąlygas:

$$\|E^n(t/n) - S(t)\| \le 4K^3/n.$$

Savo darbe mes panaudojome šį metodą tirti Eulerio ir Josidos aproksimacijų konvergavimo paklaidoms bei asimptotiniams skleidiniams rasti.

Josidos aproksimacijoms tirti naudojome dvi skirtingas kreives $\gamma_1(\tau)$ ir $\gamma_2(\tau)$:

1. $\gamma_1(\tau) = S_\lambda((1-\tau)t)S(\tau t)$,
2. $\gamma_2(\tau) = S_{\lambda/\tau}(t)$.

Antruoju atveju gavome geresnius įverčius nei pirmuoju.

2 Pusgrupių aproksimacijų asimptotiniai skleidiniai ir konvergavimo greitis

2.1 Eulerio aproksimacijų asimptotiniai skleidiniai

Tarkime, X yra Banacho erdvė, $L(X)$ - aprėžtų tiesinių operatorių, veikiančių erdvėje X, algebra. Tarkime, kad $S(t) = \exp\{tA\}$, $t \geq 0$ yra stipriai tolydi operatorių iš erdvės $L(X)$ pusgrupė su generatoriumi A ir $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ yra operatoriaus A rezolventė. Pažymėkime

$$E(\lambda) := (1/\lambda)R(1/\lambda).$$

Apibrėžkime funkcijas

$$E^n(t/n) = (n/t)^n R^n(n/t) = (I - tA/n)^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

vadinamas pusgrupės $S(t)$ *Eulerio aproksimacijomis.*

Mūsų tikslas - sukonstruoti Eulerio aproksimacijų asimptotinius skleidinius

$$E^n(t/n) = S(t) + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{kai} \quad n \to \infty, \tag{2.1}$$

su koeficientais a_k priklausančiais nuo pusgrupės $S(t)$ ir nepriklausančiais nuo n. Taip pat sukonstruosime atvirkštinius asimptotinius skleidinius

$$S(t) = E^n(t/n) + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{kai} \quad n \to \infty, \tag{2.2}$$

čia b_k yra funkcijų $t \mapsto (tA)^m E^n(t/n)$ tiesiniai dariniai su koeficientais, nepriklausančiais nuo n. Pateiksime optimalius liekamųjų narių įverčius (2.1) ir (2.2) išraiškose.

Asimptotiniams skleidiniams ir liekamųjų narių įverčiams gauti naudojome metodą, kurį aprašėme įvade. T.y., skirtumą $D_0 = E^n(t/n) - S(t)$ išreiškėme tapatybe

$$D_0 = E^n(t/n) - S(t) = \frac{1}{n}\int_0^1 \tau(tA)^2 E^{n+1}(\tau t/n) S(t(1-\tau))\, d\tau. \tag{2.3}$$

Pakartotinai taikydami šią tapatybę gavome Eulerio aproksimacijų $E^n(t/n)$ ir pusgrupės $S(t)$ asimptotinius skleidinius.

Tegul $\sum_{\alpha}^{*}$ žymi sumą pagal visas vektorių $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ sveikąsias komponentes, tenkinančias tam tikras sąlygas. Pažymėkime

$$c_{m,1} = \frac{1}{m+1} \quad \text{ir} \quad c_{m,j} = \frac{1}{m+j} \sum_{i}^{*} \frac{1}{i_2 i_3 \dots i_j}, \qquad j = 2, \dots, m, \tag{2.4}$$

čia $i = (i_2, i_3, \dots, i_j)$ tenkina nelygybes $2 \le i_j \le m-j+2$ ir $i_{n+1}+2 \le i_n \le m+j-2(n-1)$, kai $n = 2, 3, \dots, j-1$. Tada koeficientus a_m (2.1) lygybėje galime išreikšti tokia formule

$$a_m = \sum_{j=1}^{m} c_{m,j} (tA)^{m+j} S(t). \tag{2.5}$$

Pavyzdžiui, pirmieji trys koeficientai yra tokie

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(tA)^2}{2} S(t), \\ a_2 &= \frac{(tA)^3}{3} S(t) + \frac{(tA)^4}{8} S(t), \\ a_3 &= \frac{(tA)^4}{4} S(t) + \frac{(tA)^5}{6} S(t) + \frac{(tA)^6}{48} S(t). \end{aligned}$$

Nesunku įrodyti, kad koeficientus $c_{m,j}$ taip pat galime užrašyti tokia išraiška

$$c_{m,j} = \frac{1}{j!} \sum_{i_1+\dots+i_j=m+j} \frac{1}{i_1 i_2 \dots i_j},$$

čia $i_1, i_2, \dots, i_j \ge 2$ ir $1 \le j \le m$. $\sum\limits_{i_1+\dots+i_n=k}$ žymi sumavimą pagal visus skirtingus sutvarkytus n teigiamų sveikųjų skaičių $i_1, \dots, i_n$ rinkinius, kurių elementų suma lygi k.

Taip pat įveskime funkcijas

$$\sigma_{k,j} = \sigma_{k,j}(\tau_1, \dots, \tau_j) = \tau_1^{k+j} \sum_{i}^{*} \tau_2^{i_2} \dots \tau_j^{i_j}, \qquad j = 2, \dots, k+1, \tag{2.6}$$

čia $i = (i_2, i_3, \dots, i_j)$ tenkina nelygybes $1 \le i_j \le k-j+2$ ir $i_{n+1}+2 \le i_n \le k+j-2(n-1)$ su visais $n = 2, 3, \dots, j-1$. Kai $j = 1$, tai $\sigma_{k,1} = \tau_1^{k+1}$.

2.1 teorema. *Tarkime, $S(t)$ yra diferencijuojama pusgrupė. Tada*

$$E^n(t/n) = S(t) + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_k}{n^k} + D_k, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{2.7}$$

čia koeficientai a_m išreikšti (2.5) *formule. Liekamasis narys*

$$D_k = \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^{k+1} D_{k,j}, \tag{2.8}$$

čia

$$D_{k,j} = \int_0^1 \dots \int_0^1 \sigma_{k,j} (tA)^{k+j+1} E^{n+1}(\tau_1 \dots \tau_j t/n) S(t(1 - \tau_1 \dots \tau_j)) d\tau_1 \dots d\tau_j;$$

koeficientai $\sigma_{k,j}$ apibrėžti (2.6) *išraiškoje.*

Tarkime, kad egzistuoja konstanta K, nepriklausanti nuo n ir t, tokia, kad

$$n \| tA(I - tA)^{-n} \| \leq K \tag{2.9}$$

ir

$$\|S(t)\| \leq K, \qquad \|tAS(t)\| \leq K \tag{2.10}$$

su visais $n = 1, 2, \dots$ ir $t \geq 0$. Liekamąjį narį D_k skleidinyje (2.7) įvertinsime tokioms pusgrupėms, kurios tenkina (2.9) ir (2.10) sąlygas. Pagal teoremas 2.5.2 ir 2.5.3 knygoje [10], aprėžtos holomorfinės pusgrupės tenkina šias sąlygas.

2.2 teorema. *Tarkime, kad egzistuoja konstanta K, nepriklausanti nuo n ir t, tokia, kad* (2.9) *ir* (2.10) *sąlygos teisingos su visais $n = 1, 2, \dots$ ir $t \geq 0$. Tada liekamasis narys D_k asimptotiniame skleidinyje* (2.7) *tenkina nelygybę*

$$\|D_k\| \leq \frac{C_k}{n^{k+1}} K^{2k+2}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

čia C_k yra teigiama konstanta, priklausanti tik nuo k.

Toliau pateiksime atvirkštinius asimptotinius skleidinius. Pažymėkime

$$h_0 = 1, \qquad h_m = -\sum_{j=1}^{m} d_j h_{m-j}, \tag{2.11}$$

čia

$$d_m = \sum_{i=1}^{m} c_{m,i} (tA)^{m+i}, \tag{2.12}$$

su $c_{m,i}$ apibrėžtais formule (2.4). Tada koeficientus b_m (2.2) skleidinyje galima išreikšti lygybėmis

$$b_m = h_m E^n(t/n), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.13}$$

Pastebėsime, kad h_m galima išreikšti formule

$$h_m = (-1)^m \sum_{i=1}^{m} c_{m,i}(-tA)^{m+i}.$$

Pavyzdžiui, pirmieji trys koeficientai yra tokie

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{(tA)^2}{2}E^n(t/n),\\
b_2 &= -\frac{(tA)^3}{3}E^n(t/n) + \frac{(tA)^4}{8}E^n(t/n),\\
b_3 &= -\frac{(tA)^4}{4}E^n(t/n) + \frac{(tA)^5}{6}E^n(t/n) - \frac{(tA)^6}{48}E^n(t/n).
\end{aligned}$$

2.3 teorema. *Tarkime, $S(t)$ yra diferencijuojama pusgrupė. Tada*

$$S(t) = E^n(t/n) + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_k}{n^k} + \Delta_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.14}$$

čia b_m išreikšti (2.13) *formulėmis. Liekamasis narys*

$$\Delta_k = -\sum_{j=0}^{k} \frac{h_{k-j}}{n^{k-j}} D_j, \tag{2.15}$$

čia h_m apibrėžtas (2.11) *formulėje, D_m, $m = 1, \ldots, k$, -* (2.8) *formule, o D_0 apibrėžtas* (2.3) *lygybe.*

2.4 teorema. *Tarkime, kad egzistuoja konstanta K, nepriklausanti nuo n ir t, su kuria teisingos* (2.9) *ir* (2.10) *sąlygos, kai $n = 1, 2, \ldots$ ir $t \geq 0$. Tada asimptotinio skleidinio* (2.14) *liekamasis narys Δ_s tenkina nelygybę*

$$\|\Delta_s\| \leq \frac{C_s}{n^{s+1}} K^{2s+3}, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

čia C_s - teigiama konstanta, priklausanti tik nuo s.

2.2 Kitas metodas

Bentkus 2009 m. straipsnyje [4] pasiūlė kitą įdomų būdą Eulerio aproksimacijų paklaidų įverčiams ir asimptotiniams skleidiniams rasti. Naudodamas Laplaso transformacijas jis šiuos uždavinius išsprendė panaudodamas žinomus tikimybių teorijos rezultatus.

Tarkime, $\mathcal{B}$ yra Banacho algebra su norma $\|\cdot\|$.

2.1 apibrėžimas. *Banacho algebros $\mathcal{B}$ elementų šeima $S(t)$, $t > 0$ vadinama pusgrupe, jei visiems $t, s > 0$ galioja lygybė*

$$S(t+s) = S(t)S(s).$$

2.2 apibrėžimas. *Pusgrupės $S(t)$ rezolvente $R(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ vadinama Laplaso transformacija*

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt.$$

Apibrėžkime

$$f(\lambda) = R(1/\lambda)/\lambda, \qquad E_n(t) = f^n(t/n).$$

Funkcijos $t \mapsto E_n(t)$ vadinamos pusgrupės $S(t)$ *Eulerio aproksimacijomis.*

Bentkus Eulerio aproksimacijų konvergavimo paklaidų radimo problemą suvedė į didžiųjų skaičių dėsnio paklaidų radimo problemą. Diferencijuojamos pusgrupėms, tenkinančioms sąlygą

$$\sup_{t>0} \|tS'(t)\| \leq K, \tag{2.16}$$

Bentkus įrodė tokią nelygybę

$$\|E_n(t) - S(t)\| \leq \frac{4K^2}{n-1},$$

$n = 2, 3, \ldots$. Šis įvertis padengia ir patikslina visus žinomus įverčius šiai Banacho erdvės pusgrupių klasei.

Taip pat naudodamas tuos pačius tikimybinius modelius jis gavo asimptotinius skleidinius ir jų liekamųjų narių įverčius. Mes radome šių skleidinių koeficientų išraiškas.

2.5 teorema. *(Bentkus 2009) Jei pusgrupė S yra diferencijuojama ir $K < \infty$, tai Eulerio aproksimacijas $E_n(t)$ galima išskleisti asimptotiniu skleidiniu*

$$E_n(t) = S(t) + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k} + r_k, \quad kai \quad n \geq 2. \tag{2.17}$$

Skleidinio liekamieji nariai r_k tenkina nelygybę $\|r_k\| \leq c_k(1 + K^{2k+2} n^{-k-1}$, čia c_k - teigiama konstanta, priklausanti tik nuo k.

Mes suradome (2.17) skleidinio koeficientų analizines išraiškas.

2.1 lema. *Skleidinio* (2.17) *koeficientai:*

$$a_m = \sum_{j=m+1}^{2m} c_{m,j-m} S^{(j)}(t) t^j,$$

kai $m = 1, 2, \ldots$. *Čia*

$$c_{k,j} = \frac{1}{j!} \sum_{i_1+\cdots+i_j=k+j} \frac{1}{i_1 i_2 \ldots i_j}, \tag{2.18}$$

kai $i_1, i_2, \ldots, i_j \geq 2$ *ir* $1 \leq j \leq k$.

Pavyzdžiui, pirmieji trys koeficientai yra tokie

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{t^2}{2} S^{(2)}(t), \\
a_2 &= \frac{t^3}{3} S^{(3)}(t) + \frac{t^4}{8} S^{(4)}(t), \\
a_3 &= \frac{t^4}{4} S^{(4)}(t) + \frac{t^5}{6} S^{(5)}(t) + \frac{t^6}{48} S^{(6)}(t).
\end{aligned}$$

2.6 teorema. *(Bentkus 2009) Tarkime, kad pusgrupė S yra diferencijuojama ir $K < \infty$. Tegul $n \geq 2$. Tada išvestines $S^{(s)}(t)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, galima išskleisti asimptotiniu skleidiniu*

$$t^s S^{(s)}(t) = t^s E_n^{(s)}(t) + \frac{t^s b_1^{(s)}}{n} + \cdots + \frac{t^s b_k^{(s)}}{n^k} + r. \tag{2.19}$$

Skleidinio liekamieji nariai r tenkina nelygybę $\|r\| \leq C_{k,s}(1 + K^{s+2k+2} n^{-k-1}$, čia $C_{k,s}$ - teigiama konstanta, priklausanti tik nuo k ir s.

Mes surадome šių skleidinių koeficientų išraiškas.

2.2 lema. *Skleidinio* (2.19) *koeficientai:*

$$b_0^{(s)} = E_n^{(s)}(t), \qquad b_m^{(s)} = -\sum_{l=1}^{m} \sum_{j=l+1}^{2l} c_{l,j-l} \sum_{i=0}^{\min(s,j)} \frac{j!}{(j-i)!} C_s^i t^{j-i} b_{m-l}^{(j+s-i)},$$

kai $s = 0, 1, 2, \ldots$*; čia koeficientai* $c_{k,j}$ *apibrėžti* (2.18) *formulėmis.*

Pavyzdžiui, pirmieji trys skleidinio

$$S(t) = E_n(t) + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_k}{n^k} + r, \qquad n \geq 2, \tag{2.20}$$

(t.y. kai $s = 0$) koeficientai yra tokie

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{t^2}{2} E_n^{(2)}(t), \\
b_2 &= \frac{t^2}{2} E_n^{(2)}(t) + \frac{2t^3}{3} E_n^{(3)}(t) + \frac{t^4}{8} E_n^{(4)}(t), \\
b_3 &= -\frac{t^2}{2} E_n^{(2)}(t) - 2t^3 E_n^{(3)}(t) - \frac{3t^4}{2} E_n^{(4)}(t) - \frac{t^5}{3} E_n^{(5)}(t) - \frac{t^6}{48} E_n^{(6)}(t).
\end{aligned}
$$

Stipriai tolydžių diferencijuojamų pusgrupių atvejų radome paprastesnes koeficientų b_m išraiškas. Priminsime, kad stipriai tolydžios diferencijuojamos pusgrupės išvestinė yra tokia:

$$S'(t) = AS(t), \tag{2.21}$$

čia A yra pusgrupės $S(t)$ generatorius.

Pažymėkime

$$h_m = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i c_{m,i} (At)^{m+i}, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.22}$$

2.3 lema. *Jei $S(t)$ yra stipriai tolydi diferencijuojama pusgrupė, tenkinanti* (2.16) *sąlygą su $K < \infty$, tai ją galima išskleisti* (2.20) *asimptotiniu skleidiniu, kurio koeficientai:*

$$b_m = h_m E_n(t), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

čia h_m apibrėžti (2.22) *formule.*

2.3 Josidos aproksimacijų konvergavimo greitis

Tarkime, X yra Banacho erdvė, $L(X)$ aprėžtų tiesinių operatorių erdvėje X algebra. Tarkime, operatorius A yra stipriai tolydžios sutraukiančiosios pusgrupės $S(t)$ generatorius. Apibrėžkime operatoriaus A Josidos aproksimatorių tokia išraiška:

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1},$$

su visais $\lambda > 0$.

Operatorius A_λ yra tolygiai tolydžios sutraukiančiosios pusgrupės $S_\lambda(t)$ generatorius. Be to,

$$S(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda(t)x, \quad x \in X. \tag{2.23}$$

Funkcijas $S_\lambda(t)$, $\lambda > 0$ vadiname pusgrupės $S(t)$ Josidos aproksimacijomis.

Mūsų tikslas - gauti Josidos aproksimacijų paklaidų

$$\|S_\lambda(t)x - S(t)x\|, \qquad x \in D(A), \quad t \geq 0 \quad \text{ir} \quad \lambda > 0,$$

ir

$$\|S_\lambda(t) - S(t)\|, \qquad t > 0 \quad \text{ir} \quad \lambda > 0$$

įverčius bei asimptotinius skleidinius.

Paklaidų įverčiams ir asimptotiniams skleidiniams gauti naudojome multiplikatyviųjų reprezentacijų metodą, aprašytą įvade. Priminsime, kad naudodami Niutono-Leibnico formulę, skirtumą $b - a$ išreiškiame per integralą

$$b - a = \int_0^1 \gamma'(\tau)d\tau, \tag{2.24}$$

čia $\gamma(\tau)$ yra kokia nors glodi kreivė, jungianti $a = \gamma(0)$ ir $b = \gamma(1)$. Toliau uždavinys susiveda į integralo (2.24) lygybėje įvertinimą. Josidos aproksimacijų atveju tyrėme, kaip šis metodas veikia parinkus dvi skirtingas kreives $\gamma(\tau)$: $\gamma_1(\tau)$ ir $\gamma_2(\tau)$.

1 būdas. Parinkime

$$\gamma_1(\tau) = S_\lambda((1-\tau)t)S(\tau t).$$

Tada $b = \gamma_1(0) = S_\lambda(t)$, $a = \gamma_1(1) = S(t)$ ir Josidos aproksimacijos paklaidą galime užrašyti tokia lygybe:

$$D_0 := S_\lambda(t) - S(t) = -\int_0^1 \gamma_1'(\tau)d\tau = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 tAA_\lambda\gamma_1(\tau)d\tau. \tag{2.25}$$

2 būdas. Kreivę γ_2 parenkame taip:

$$\gamma_2(\tau) := S_{\lambda/\tau}(t) = \exp\left\{tA\frac{\lambda}{\tau}\left(\frac{\lambda}{\tau}I - A\right)^{-1}\right\} = \exp\left\{tA\lambda(\lambda I - \tau A)^{-1}\right\}. \tag{2.26}$$

Tada $\gamma_2(1) = S_\lambda(t)$ ir $\gamma_2(0)x = \lim_{\tau\downarrow 0} S_{\lambda/\tau}(t)x = S(t)x$, su visais $x \in X$. Gavome tokią integro-diferencialinę tapatybę:

$$D_0 = S_\lambda(t) - S(t) = \int_0^1 \gamma_2'(\tau)d\tau = \frac{1}{\lambda t}\int_0^1 (tA_{\lambda/\tau})^2 S_{\lambda/\tau}(t)d\tau. \tag{2.27}$$

Antruoju atveju pavyko gauti geresnius paklaidų įverčius ir trumpesnius įrodymus.

Tarkime, kad egzistuoja teigiama konstanta K, nepriklausanti nuo n, λ ir t, tokia, kad

$$\|tAS(t)\| \leq K, \tag{2.28}$$

ir

$$(n+1)\|A\lambda^n(\lambda I - A)^{-n-1}\| \leq K, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.29}$$

su visais $\lambda > 0$, $t \geq 0$.
Pagal 2.5.2 teoremą [10] knygoje, aprėžtos holomorfinės pusgrupės tenkina (2.28) nelygybę. Kai $n = 0$, (2.29) sąlyga seka iš nelygybės $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1$, kuri teisinga, kai A yra sutraukiančiosios pusgrupės generatorius (1.3.1 teorema, [10]). Aprėžtos holomorfinės pusgrupės tenkina (2.29) nelygybę, kai $n = 1, 2, \ldots$ (2.5.5 teorema, [10]).
Įrodėme tokią lemą:

2.4 lema. *Tarkime, kad A yra sutraukiančiosios pusgrupės generatorius ir egzistuoja teigiama konstanta K, nepriklausanti nuo n, λ ir t, tokia, kad su visais $\lambda > 0$, $t \geq 0$ ir $n = 0, 1, 2, \ldots$ teisingos* (2.28) *ir* (2.29) *sąlygos. Tada Josidos aproksimacijos tenkina nelygybę*

$$\|tA_\lambda S_\lambda(t)\| \leq K, \tag{2.30}$$

su visais $\lambda > 0$ ir $t \geq 0$.

Nesunku įrodyti, kad jei teisingos (2.28) ir (2.30) nelygybės, tai

$$\|(tA)^m S(t)\| \leq m^m K^m \quad \text{ir} \quad \|(tA_\lambda)^m S_\lambda(t)\| \leq m^m K^m, \tag{2.31}$$

su visais $t \geq 0$, $\lambda > 0$ ir $m = 1, 2, \ldots$ (2.1 lema, [11]).

2.7 teorema. *Tarkime, kad sutraukiančioji pusgrupė $S(t)$ tenkina* (2.28) *ir* (2.30) *sąlygas. Tada su visais $\lambda > 0$ teisinga nelygybė:*

$$\|S_\lambda(t)x - S(t)x\| \leq \frac{\ln(4)K\|Ax\|}{\lambda}, \qquad x \in D(A). \tag{2.32}$$

Įvertį (2.32) gavome naudodami (2.25) tapatybę. Naudodami (2.27) tapatybę, gauname kitokio tipo skirtumo $D_0 = S_\lambda(t) - S(t)$ įvertį (su optimalia konstanta). Taip pat konstantą nelygybėje (2.32) patikslinome iki optimalios.

2.8 teorema. *Tarkime, kad sutraukiančioji pusgrupė $S(t)$ tenkina* (2.28) *ir* (2.30) *sąlygas. Tada konvergavimo greitis* (2.23) *riboje tenkina nelygybę:*

$$\|S_\lambda(t) - S(t)\| \leq \frac{4K^2}{\lambda t}, \tag{2.33}$$

su visais $t > 0$ ir $\lambda > 0$. Be to, su visais $x \in D(A)$ teisinga nelygybė:

$$\|S_\lambda(t)x - S(t)x\| \leq \frac{K\|Ax\|}{\lambda}, \tag{2.34}$$

čia $t \geq 0$ ir $\lambda > 0$.

2.4 Josidos aproksimacijų asimptotiniai skleidiniai

Toliau sukonstruosime diferencijuojamos pusgrupės $S(t)$ Josidos aproksimacijų $S_\lambda(t)$ asimptotinius skleidinius:

$$S_\lambda(t) = S(t) + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \cdots + \frac{a_k}{\lambda^k} + D_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.35}$$

čia koeficientai a_m nepriklauso nuo λ, bei pateiksime šių skleidinių liekamųjų narių įverčius. Pažymėkime

$$d_{m,1,1} = 1, \ \ m = 1, 2, \ldots,$$

$$d_{m,m,j} = \frac{1}{m!}, \ \ m = 1, 2, \ldots, \ \ j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.36}$$

$$d_{m,k,j} = \sum_{i=1}^{j} d_{m-1,k,i}, \ \ m = 2, 3, \ldots, \ \ k = 1, 2, \ldots, m-1, \ \ j = 1, 2, \ldots, k.$$

2.9 teorema. *Tarkime, kad $S(t)$ yra diferencijuojama pusgrupė. Tada koeficientai a_m lygybėje (2.35) yra tokie:*

$$a_m = \sum_{k=1}^{m} d_{m,k,k} t^k A^{m+k} S(t), \tag{2.37}$$

o liekamieji nariai D_m yra tokie

$$D_m = D_{m,1} + D_{m,2}, \tag{2.38}$$

čia

$$D_{m,1} = \frac{1}{\lambda^{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} d_{m,k,j} t^k A^{m+j} A_\lambda^{k+1-j} S(t),$$

ir

$$D_{m,2} = \frac{1}{\lambda^{m+1}} \int\limits_0^1 \frac{\tau^m}{m!}(tAA_\lambda)^{m+1} S_\lambda((1-\tau)t)S(\tau t)d\tau.$$

Koeficientai $d_{m,k,j}$ apibrėžti (2.36) *formulėmis.*

Pavyzdžiui, pirmieji trys skleidinio koeficientai yra tokie:

$$\begin{aligned} a_1 =& tA^2S(t), \\ a_2 =& tA^3S(t) + \frac{t^2A^4}{2}S(t), \\ a_3 =& tA^4S(t) + t^2A^5S(t) + \frac{t^3A^6}{6}S(t). \end{aligned}$$

Rasime (2.35) skleidinio liekamųjų narių įverčius.

2.10 teorema. *Tarkime, kad sutraukiančioji pusgrupė $S(t)$ tenkina* (2.28) *ir* (2.30) *sąlygas. Tada* (2.35) *skleidinio liekamieji nariai D_m tenkina nelygybę*

$$\|D_m x\| \le \frac{C_m(1+K^{m+1})\|A^{m+1}x\|}{\lambda^{m+1}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

su visais $\lambda > 0$, $x \in D(A^{m+1})$. Čia C_m - teigiama konstanta, priklausanti tik nuo m.

Toliau sukonstruosime atvirkštinius asimptotinius skleidinius:

$$S(t) = S(t)_\lambda + \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{b_k}{\lambda^k} + d_k, \tag{2.39}$$

Taip pat rasime optimalius liekamųjų narių d_k įverčius.

Pažymėkime

$$h_{m,1} = m!, \qquad h_{m,m} = 1, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

ir

$$h_{m,k} = (m+k-1)h_{m-1,k} + h_{m-1,k-1}, \;\; m = 3, 4, \dots, \;\; k = 2, \dots, m-1. \tag{2.40}$$

2.11 teorema. *Tarkime, kad $S(t)$ yra diferencijuojama pusgrupė. Tada* (2.39) *skleidinio koeficientai b_m yra tokie:*

$$\frac{b_m}{\lambda^m} = \frac{(-1)^m}{m!}\gamma_2^{(m)}(1), \tag{2.41}$$

o liekamieji nariai d_m išreiškiami lygybe

$$d_m = (-1)^{m+1} \int\limits_0^1 \frac{\tau^m}{m!} \gamma_2^{(m+1)}(\tau) d\tau, \tag{2.42}$$

čia kreivė $\gamma_2(\tau)$ apibrėžta (2.26) formulėje, o $\gamma_2^{(m)}(\tau)$ yra jos m-oji išvestinė, kuri lygi

$$\gamma_2^{(m)}(\tau) = \frac{1}{\lambda^m} \sum_{k=1}^{m} h_{m,k} t^k A_{\lambda/\tau}^{m+k} S_{\lambda/\tau}(t),$$

čia koeficientai $h_{m,k}$ apibrėžti (2.40) formulėmis.

Pavyzdžiui, pirmieji trys skleidinio koeficientai yra tokie:

$$\begin{aligned} b_1 =& - tA_\lambda^2 S_\lambda(t), \\ b_2 =& tA_\lambda^3 S_\lambda(t) + \frac{t^2 A_\lambda^4}{2} S_\lambda(t), \\ b_3 =& - tA_\lambda^4 S_\lambda(t) - t^2 A_\lambda^5 S_\lambda(t) - \frac{t^3 A_\lambda^6}{6} S_\lambda(t). \end{aligned}$$

2.12 teorema. *Tarkime, kad sutraukiančioji pusgrupė $S(t)$ tenkina (2.28) ir (2.30) sąlygas. Tada asimptotinio skleidinio(2.39) liekamieji nariai d_m tenkina nelygybes:*

$$\|d_m\| \leq \frac{c_m(1 + K^{2m+2})}{(t\lambda)^{m+1}}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

su visais $\lambda > 0$ ir $t > 0$. Čia c_m - teigiama konstanta, priklausanti tik nuo m.

3 Išvados

Disertacijoje buvo tiriamos pusgrupių Eulerio ir Josidos aproksimacijų tikslumas.

1. Sukonstravome stipriai tolydžių diferencijuojamų pusgrupių Eulerio aproksimacijų asimptotinius skleidinius. Taip pat surademe ir atvirkštinius asimptotinius skleidinius.

2. Pateikėme šių skleidinių optimalius liekamųjų narių įverčius aprėžtoms holomorfinėms pusgrupėms.

3. Surademe pusgrupių Eulerio aproksimacijų asimptotinių skleidinių koeficientus, naudodami alternatyvų metodą, kurį pasiūlė Bentkus [4] straipsnyje. Šie rezultatai teisingi ne tik operatorių pusgrupėms, bet ir pusgrupėms abstrakčiose Banacho algebrose.

4. Pateikėme du skirtingo tipo aprėžtų holomorfinių pusgrupių Josidos aproksimacijų paklaidų įverčius su optimaliomis konstantomis.

5. Sukonstravome diferencijuojamų stipriai tolydžių pusgrupių Josidos aproksimacijų asimptotinius skleidinius ir gavome optimalius liekamųjų narių įverčius. Taip pat sukonstravome ir atvirkštinius asimptotinius skleidinius.

Summary

Let X be a complex Banach space and let $L(X)$ be the space of bounded linear operators on X. Let $S(t) = \exp\{tA\}$, $t \geq 0$ be a strongly continuous semigroup of operators from $L(X)$ with a generator A. Let $E^n(t/n) = (I - tA/n)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ be Euler's approximations of a semigroup $S(t)$. In this work we construct asymptotic expansions of Euler's approximations

$$E^n(t/n) = S(t) + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

with coefficients a_k depending on $S(t)$ and independent of n. We also obtain the so-called inverse asymptotic expansions, i.e. asymptotic expansions of the semigroup $S(t)$ via its Euler's approximations:

$$S(t) = E^n(t/n) + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

with b_k which are linear combinations of functions $t \mapsto (tA)^m E^n(t/n)$ with coefficients independent of n. We provide explicit and optimal bounds for the remainder terms in these expansions.

To obtain asymptotic expansions we use an approach which was used by Bentkus in [3] for analysis of errors in the Central Limit Theorem and in approximations by accompanying laws and applied by Bentkus and Paulauskas in [5] to derive optimal convergence rates in Chernoff–type lemmas and Euler's approximations of semigroups. We use this method to obtain optimal error bounds for Yosida approximations as well.

Let A be a generator of a strongly continuous semigroup of contractions $S(t)$. We define the Yosida approximant of A by

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1},$$

for all $\lambda > 0$. It can be shown that A_λ is the generator of a uniformly continuous semigroup of contractions $S_\lambda(t)$. We call $S_\lambda(t)$, $\lambda > 0$, Yosida approximations of contraction semigroup $S(t)$.

In our work we investigate the rate of convergence of Yosida approximations $S_\lambda(t)$ to the corresponding semigroup $S(t)$. In particular, for bounded holomorphic semigroups of contractions, we obtain optimal error bounds for

$$\|S_\lambda(t)x - S(t)x\|, \qquad \text{for} \quad x \in D(A), \quad t \geq 0 \quad \text{and} \quad \lambda > 0,$$

and

$$\|S_\lambda(t) - S(t)\|, \qquad \text{for} \quad x \in X, \quad t > 0 \quad \text{and} \quad \lambda > 0.$$

We also provide asymptotic expansions for Yosida approximations $S_\lambda(t)$ of differentiable semigroups $S(t)$, i.e. expansions of type

$$S_\lambda(t) = S(t) + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \cdots + \frac{a_k}{\lambda^k} + o\left(\frac{1}{\lambda^k}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

where coefficients a_m do not depend on λ. We also obtain the inverse expansions

$$S(t) = S_\lambda(t) + \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2}{\lambda^2} + \cdots + \frac{b_k}{\lambda^k} + o\left(\frac{1}{\lambda^k}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

here the coefficients b_k are the linear combinations of the derivatives $S_\lambda(t)$. We also provide optimal bounds for the remainder terms of these expansions in case of bounded holomorphic semigroups of contractions.

Another interesting approach to analysis of error bounds and asymptotic expansions for Euler's approximations of semigroups in general Banach algebras was proposed by Bentkus in [4]. This method is based on applications of the Fourier–Laplace transforms and a reduction of the problem to the convergence rates and asymptotic expansions in the Law of Large Numbers. We provide explicit formulas for the coefficients of the asymptotic expansions which were obtained using this method in [4].

Literatūra

[1] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander. *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, volume 96 of *Monographs in Mathematics*. Birkhauser Verlag, Basel, 2001.

[2] Yu. Arlinskii and V. Zagrebnov. Numerical range and quasi-sectorial contractions. *J.Math Anal.Appl.*, 336:33–43, 2010.

[3] V. Bentkus. A new method for approximations in probability and operator theories. *Lithuanian Mathematical Journal*, 43(4):367–388, 2003.

[4] V. Bentkus. Asymptotic expansions and convergence rates for Euler's approximations of semigroups. *Lithuanian Mathematical Journal*, 49(2):140–157, 2009.

[5] V. Bentkus and V. Paulauskas. Optimal error estimates in operator-norm approximations of semigroups. *Letters in Mathematical Physics*, 68(3):131–138, 2004.

[6] K.-J. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] L.C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1918.

[8] E. Hille and R.S. Phillips. *Functional analysis and semigroups*, volume 31 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society(AMS), New York, 1957.

[9] Susumu Ishii. An approach to linear hyperbolic evolution equations by the Yosida approximation method. *Proc. Japan Acad.*, 54(1):17–20, 1978.

[10] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[11] M. Vilkienė. Another approach to asymptotic expansions for Euler's approximations of semigroups. *Lithuanian Mathematical Journal*, 46(2):217–232, 2006.

[12] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer, Berlin, 1968.

[13] V. Zagrebnov. Quasi-sectorial contractions. *J. Funct. Anal.*, 254:2503–2511, 2008.