VILNIAUS UNIVERSITETAS

KRISTINA JAKUBĖLIENĖ

DVIMATĖS PARABOLINĖS LYGTIES SU INTEGRALINE SĄLYGA SPRENDIMAS BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODU

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius 2013

Disertacija rengta 2008–2012 metais Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Mifodijus Sapagovas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

VILNIUS UNIVERSITY

KRISTINA JAKUBĖLIENĖ

SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION BY THE FINITE-DIFFERENCE METHOD

Doctoral dissertation

Physical Sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius 2013

The dissertation was prepared at Institute of Mathematics and Informatics of Vilnius University in 2008–2012.

Scientific supervisor:

Prof. Dr. Habil. Mifodijus Sapagovas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)

Reziumė

Disertacijoje nagrinėjamas dvimatis parabolinis uždavinys su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis, šio uždavinio sprendimas baigtinių skirtumų metodu. Daugelis procesų veda prie neklasikinių parabolinių lygčių, kurios dažnai būna su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Tokių uždavinių sprendiniai dažniausiai gali būti apskaičiuoti tik naudojantis skaitiniais metodais. Atlikto darbo rezultatai papildo kitų mokslininkų gautus rezultatus sprendžiant diferencialinius uždavinius su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

Disertaciją sudaro įvadas, penki skyriai, bendrosios išvados, literatūros sąrašas ir autorės publikacijų sąrašas.

Įvadiniame skyriuje aprašyta tiriamoji problema ir temos objektas, išanalizuotas temos aktualumas, išdėstyti darbo tikslai, nagrinėjami uždaviniai, naudojama metodika, mokslinio darbo naujumas ir gautų rezultatų reikšmė, pateikti ginamieji teiginiai ir darbo rezultatų aprobavimas bei aptarta disertacijos struktūra.

Pirmajame skyriuje išnagrinėtas dvimačio parabolinio uždavinio su viena kraštine integraline sąlyga sprendimas baigtinių skirtumų metodu. Išskirtiniu uždavinio bruožu yra nelokaliosios sąlygos pavidalas - šia sąlyga ieškomas sprendinys kontūriniame taške susiejamas su sprendinio integralu visa sritimi. Sprendinys ieškomas kintamųjų krypčių Peaceman-Rachford metodu. Aprašomas sprendimo algoritmas ir jo ypatumai.

Antrajame skyriuje nagrinėjamas dvimačio parabolinio uždavinio sprendimas su dviem nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis, naudojant kintamųjų krypčių metodą.

Trečiajame ir ketvirtajame disertacijos skyriuose nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys. Trečiajame skyriuje analizuojama spektro struktūra diferencialiniam operatoriui, o ketvirtajame - spektro struktūra skirtuminiam operatoriui. Remiantis gautais spektro struktūros rezultatais, daromos išvados apie pirmajame skyriuje išnagrinėto metodo stabilumą.

Penktajame skyriuje teoriškai pagrindžiamas baigtinių skirtumų metodas stacionariam dvimačiam uždaviniui.

Abstract

In the dissertation a two-dimensional parabolic problem with nonlocal integral conditions is investigated, solving this kind of problem by the finite difference method. Many processes lead to non classical parabolic equations, whichs are often with nonlocal boundary conditions. Solutions of such problems can usually be found using numerical methods. The results of this dissertation supplement the work done previously by other researchers when solving differential problems with nonlocal boundary conditions.

The dissertation consists of an introduction, five chapters, conclusions, references and the author's list of publications.

In the introduction the research problem and its subject are defined, the goals and tasks of research are formulated, the methodology used, the scientific novelty and significance of the results are presented, hypotheses and approval of the work results, as well the structure of the dissertation, are discussed.

In the first chapter, a finite difference method for solving a two-dimensional parabolic equation with one integral boundary condition has been analyzed. An exclusive point of this problem is the type of the nonlocal condition. Employing this condition the solution at the contour point is associated with integral in the whole domain. The solution was obtained by the alternating direction Peaceman-Rachford method. The peculiarities of the numerical algorithm are described.

In the second chapter solution of the two-dimensional parabolic problem with two nonlocal conditions is analyzed.

In the third and fourth chapters of the dissertation, the eigenvalue problem is investigated. In the third chapter, the structure of the spectrum for the differential operator, and in the fourth chapter the structure of the spectrum for the difference oprerator is analyzed. The results obtained on the structure of the spectrum lead to conclusions about the stability of the method.

In the fifth chapter, the finite difference method for a stationary two-dimensional problem is theoretically grounded.

Turinys

Lentelių sąrašas

Įvadas

Problemos formulavimas

Diferencialinių lygčių plėtrą nuo XVII a. iki pat šių dienų skatina fizikos, mechanikos ir gamtos mokslų raida, kadangi diferencialinės lygtys yra viena iš gana plačiai kitose mokslo srityse taikomų matematikos mokslo šakų. Kai kompiuteriai tapo lengviau prieinami mokslininkams (maždaug nuo 1960 m.), buvo pradėta vis plačiau naudotis skirtuminiais metodais, sprendžiant diferencialinius uždavinius. Diferencialinių lygčių sprendimas skaitiniais metodais šiuo metu yra viena aktualiausių taikomosios matematikos plėtros sričių.

Per paskutiniuosius kelis dešimtmečius išaugo poreikis rasti diferencialinių uždavinių su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis sprendinius. Nelokalioji sąlyga apibrėžia sąryšį tarp sprendinio reikšmių intervalo kraštuose ir vidiniuose taškuose, o jeigu vietoje kraštinių sąlygų yra duotos nelokaliosios sąlygos ir jose yra kraštinis taškas, tai tada turime nelokaliąsias kraštines sąlygas.

Disertacijoje nagrinėjamas dvimačio parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis sprendimas baigtinių skirtumų metodu.

Darbo aktualumas

Vis dažniau matematiniai modeliai praktiniams uždaviniams spręsti yra sudaromi naudojantis diferencialinėmis lygtimis ir pastaruoju metu tokie uždaviniai tampa vis sudėtingesni. Vienas šio sudėtingumo rodiklių yra nelokaliosios kraštinės sąlygos. Diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis salygomis sprendimo skaitiniais metodais plėtrą smarkiai skatina ir šiuolaikiniai taikymai.

Nelokaliųjų kraštinių sąlygų terminą vienas pirmųjų panaudojo N. I. Ionkinas 1977 metais [39]. Jis taip pat buvo vienas pirmųjų, pradėjęs sistemingai nagrinėti parabolines lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis. Uždavinyje nelokaliosios sąlygos atsiranda tada, kai funkcijos arba išvestinės reikšmės kraštiniuose taškuose yra susijusios su jos reikšmėmis srities viduje, arba, paprasčiau tariant, kada negalima tiesiogiai išmatuoti duomenų nagrinėjamo uždavinio srities krašte. 1963 metais J. R. Cannon [9] suformulavo vienmatį parabolinį uždavinį su integraline sąlyga, kuris dabar ir yra vadinamas nelokaliuoju uždaviniu.

Didelę įtaką susidomėjimui uždaviniais su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis padarė A. V. Bitsadzė ir A. A. Samarskis [5], parašydami darbą, kuriame nagrinėjamas elipsinis dvimatis uždavinys su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Vieni pirmųjų darbų, kuriuose nagrinėjami uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis buvo tokie: [22, 30, 55, 69, 78]. Gana plačiai tokie uždaviniai buvo analizuojami elipsinėms lygtims [4, 32, 36, 37, 68, 70, 96] ir parabolinėms lygtims [6, 12, 17, 23, 24, 28, 29, 40, 50, 53, 72, 98] bei kitoms lygtims (hiperbolinėms, pseudoparabolinėms, paprastosioms diferencialinėms lygtims).

Didelis susidomėjimas tokio tipo uždaviniais yra ir Lietuvoje. Pirmieji tokias problemas pradėjo nagrinėti M. Sapagovas ir R. Čiegis [68, 77, 78]. Dabartiniu metu Lietuvoje diferencialinius uždavinius su nelokaliosiomis sąlygomis nagrinėja daugelis mokslininkų: V. Būda, R. Čiegis, R. Čiupaila, F.Ivanauskas, J. Jachimavičienė, Ž. Jokšienė (Jesevičiūtė), S. Pečiulytė, S. Roman, M.Sapagovas, S. Sajavičius, A. Štikonas, O. Štikonienė, N. Tumanova ir kiti [3, 7, 14, 15, 18, 19, 41, 42, 46, 47, 49, 61, 63, 64, 65, 66, 74, 75, 76, 86, 89, 91, 93, 94, 95]. Tai yra gana plati tyrinėjimo sritis ir dėl to diferencialiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis dar tikrai nėra visiškai išsamiai išnagrinėti.

Šioje disertacijoje nagrinėjamas dvimatės parabolinės lygties su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis sprendimas skirtuminiais metodais. Plačiau aptarsime mokslinėje literatūroje kitų matematikų atspausdintus rezultatus.

Y. Lin, S. Xu ir H-M. Yin straipsnyje [54] analizavo išreikštines ir neišreikštines skirtumines schemas tokiam uždaviniui

$$
\begin{aligned}
&u_t - \triangle u = 0 \quad (x, y) \in Q_t,\\
&u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,\\
&u(x, y, t) = \int\limits_{\Omega} K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta, t) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta, \quad (x, y) \in \partial\Omega \times [0, T),
\end{aligned}
$$

čia $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\varphi(x, y) \not\equiv 0$. Pagrindinė prielaida yra, kad branduolys $K(x, y, \xi, \eta)$ tenkina sąlygą

$$
\int\limits_{\Omega} \mid K(x, y, \xi, \eta) \mid \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \leqslant \rho \leqslant 1, \quad (x, y) \in \partial\Omega.
$$

Darbe autoriai įrodė, kad abi schemos išreikštinė ir neišreikštinė išlaiko maksimumo principo savybes ir sprendinio monotoniškumą, o visiškai neišreikštinė schema dar yra ir griežtai monotoniška. Taip pat, įrodė, kad sprendžiant uždavinį baigtinių skirtumų metodu sprendinių paklaida artėja į nulį, kai $t \to \infty$. Disertacijos pirmajame skyriuje yra nagrinėjamas analogiškas uždavinys, su šiek tiek supaprastina nelokaliąja sąlyga, šio uždavinio sprendimui naudojamas kintamųjų krypčių metodas, kuris nebuvo naudojamas [54] straipsnyje. Be to, disertacijoje branduoliui $K(x, y, \xi, \eta)$ taikomi kur kas mažesni apribojimai.

M. Sapagovo, G. Kairytės, O. Štikonienės ir A. Štikono straipsnyje [79] nagrinėjamas kintamųjų krypčių neišreikštinis metodas dvimatei parabolinei lygčiai stačiakampėje srityje su Bicadzės ir Samarskio nelokaliąja sąlyga

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t), \quad t \in (0, T),\\
&u(x, 0, t) = w_e(x, t), \quad x \in [0, L_x],\\
&u(x, L_y, t) = w_r(x, t), \quad x \in [0, L_x],\\
&u(0, y, t) = v_e(y, t), \quad y \in [0, L_y],\\
&u(L_x, y, t) = \gamma u(\xi, y, t) + v_r(y, t), \quad y \in [0, L_y],\\
&u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D} = \{0 \leqslant x \leqslant L_x, 0 \leqslant y \leqslant L_y\}.
\end{aligned}
$$

Šiame darbe yra gautos pakankamos stabilumo sąlygos sprendžiant uždavinį Peaceman ir Rachford kintamųjų krypčių metodu. Autoriai įrodė, kad kintamųjų krypčių metodo stabilumui didelę įtaką turi ξ ir γ reikšmės nelokaliojoje kraštinėje sąlygoje. Jeigu ξ yra fiksuotas dydis, tada kintamųjų krypčių metodas yra stabilus pakankamai dideliam γ reikšmių intervalui.

Pirmajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas dvimatės parabolinės lygties stačiakampėje srityje sprendimas analogišku kintamųjų krypčių metodu, kada vienos stačiakampio kraštinės taškuose yra duota integralinė sąlyga, kurios bendrasis pavidalas:

$$u(x,0,t) = \gamma(x) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 u(\xi,\eta,t) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \mu_4(x,t), \tag{1}$$

čia $x \in (0,1)$, $t \in (0,T]$.

Naudojant kintamųjų krypčių metodą, sprendžiami du vienmačiai skirtuminiai uždaviniai. Pirmasis gaunamas su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis, taigi jo sprendinys randamas pritaikius perkelties algoritmą. Antrąjį skirtuminį uždavinį reikia spręsti su nelokaliąja kraštine sąlyga, susiejančia sprendinį kontūriniame taške su sprendinio reikšmėmis visoje dvimatėje srityje, todėl šis uždavinys sprendžiamas du kartus taikant perkelties algoritmą: pirmą kartą naudojamas įprastas perkelties algoritmas, o antrą kartą - jau modifikuotas.

Metodika, kai du kartus taikomas perkelties algoritmas, pirmą kartą buvo panaudota R. Čiegio darbe [13], kuriame yra sprendžiamas uždavinys:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k_\alpha(X,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q(X,t)u + f(X,t), \quad (X,t) \in \Theta_t,$$

$$u(0,x_2,t) = \mu_1(x_2,t), \quad u(1,x_2,t) = \mu_2(x_2,t), \qquad x_2 \in [0,1], t > 0,$$

$$u(x_1,0,t) = \mu_0(t)\mu_3(x_1), \quad u(x_1,1,t) = \mu_4(x_1,t), \qquad x_1 \in [0,1], t > 0,$$

$$u(x_1,x_2,0) = u_0(x_1,x_2), \qquad (x_1,x_2) \in [0,1] \times [0,1],$$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{d(x_1)} \rho(x_1,x_2)u(x_1,x_2,t)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = M(t), \qquad t \in [0,T],$$

čia $\mu_0(t)$ yra nežinoma funkcija. Pirmajame Disertacijos skyriuje ši R. Čiegio metodika apibendrinta (1) nelokaliąjai sąlygai. Dėl šios nelokaliosios sąlygos tenka papildomai spręsti neaukštos eilės tiesinių algebrinių lygčių sistemą.

2002 metais Y. Wang parašė darbą [96], kuriame analizuojama elipsinė lygtis su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis:

$$
\begin{aligned}
&Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) = f(x,u), \quad x \in \Omega,\\
&u\,|_{\partial\Omega} = \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Šiame darbe išnagrinėtas ir atitinkamas tikrinių reikšmių uždavinys bei įrodoma skirtuminių lygčių sistemos sprendinio egzistencija, išanalizuota sprendinio paklaida tiesinėms ir silpnai netiesinėms lygtims.

Disertacijos antrajame skyriuje analizuojamas dvimatės parabolinės lygties sprendimas stačiakampėje srityje, kai nelokalioji integralinė kraštinė sąlyga duota dviejų ar visų keturių stačiakampio kraštinių taškuose:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,t), \qquad x,y \in \Omega, \quad t \in (0,T],\\
&u(x,y,t) = \iint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \mu, \qquad x,y \in \Gamma, \quad t \in (0,T],\\
&u(x,y,0) = \varphi(x,y), \qquad x,y \in \Omega,
\end{aligned}
$$

čia $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $\Gamma = \{y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1;\ y = 1, 0 \leqslant x \leqslant 1;\ x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1;\ x = 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Kad būtų galima išspręsti šį uždavinį yra taikomas kintamųjų krypčių metodas ir sprendžiami du vienmačiai skirtuminiai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis. Sprendžiant gautajį vienmatį uždavinį yra sudaroma tiesinė lygčių sistema, ji gaunama iš nelokaliųjų sąlygų ir sprendžiama Gauso eliminavimo metodu.

C. V. Pao darbe [58] pateikia keletą iteracinių metodų netiesinėms vienmatėms reakcijos-difuzijos lygtims su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis spręsti:

$$
\begin{aligned}
&u_t - (D(x)u_x)_x + w(x)u_x = f(x,t,u), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,\\
&u(0,t) - \alpha_0 u_x(0,t) = \int\limits_0^l K^0(x)u(x,t)\mathrm{d}x + g^0(t), \quad t > 0,\\
&u(l,t) + \alpha_1 u_x(l,t) = \int\limits_0^l K^1(x)u(x,t)\mathrm{d}x + g^1(t), \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \Psi(x), \quad 0 < x < l,
\end{aligned}
$$

čia D, w, f, K, g, Ψ-tolygios funkcijos, o α_0, α_1 yra neneigiamos konstantos, bei $D(x) > 0$. Autorius įrodė sprendinio egzistavimą bei išnagrinėjo sprendinio elgseną priklausomai nuo pradinių ir kraštinių sąlygų.

R. Čiegis, A. Štikonas, O.Štikonienė, O.Subοč darbe [16] analizuoja uždavinio

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,b)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,t)u + f(x,t,u), \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T],\\
&u(0,t) = \gamma_0\left(\alpha_0(t)u(a_0(t),t) + \int\limits_0^1 \beta_0(x,t)\mathrm{d}x\right) + f_0(t), \quad t \in (0,T],\\
&u(1,t) = \gamma_1\left(\alpha_1(t)u(a_1(t),t) + \int\limits_0^1 \beta_1(x,t)\mathrm{d}x\right) + f_1(t), \quad t \in (0,T],\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1]
\end{aligned}
$$

sprendimą. Straipsnyje surastos pakankamosios sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygos, bei gautos sąlygos, kada sprendinys yra neneigiamas ir stabilus tolygioje normoje. Šio straipsnio tyrimo metodika ir rezultatai yra artimesni, disertacijoje naudojamai metodikai ir rezultatams, nagrinėjant dvimates parabolines lygtis, lyginant su kitų autorių darbais.

M. Sapagovas, T. Meškauskas, F. Ivanauskas darbe [83] nagrinėja skirtuminio operatoriaus spektrą, kuris atitinka diferencialinį tikrinių reikšmių uždavinį:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad 0 < x < 1, \\
&\theta_1 u(0) - \sigma_1 \frac{du(0)}{dx} = \gamma_1 \int\limits_0^1 \alpha(x) u(x) \mathrm{d}x, \\
&\theta_2 u(1) + \sigma_2 \frac{du(1)}{dx} = \gamma_2 \int\limits_0^1 \beta(x) u(x) \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

čia θ, σ, γ yra duotos konstantos, o $\alpha(x), \beta(x)$-duotos funkcijos. Autoriai nustatė, kaip skirtuminių schemų stabilumas priklauso nuo nelokaliųjų sąlygų parametrų.

Trečiajame ir ketvirtajame disertacijos skyriuose yra analizuojami tikrinių reikšmių uždaviniai diferencialiniam operatoriui su integraline sąlyga ir atitinkamai skirtuminiam opreatoriui su nelokaliąja kraštine sąlyga. Ketvirtajame skyriuje skirtuminio operatoriaus spektro tyrimo rezultatai susiejami su pirmajame skyriuje nagrinėjamos skirtuminės schemos stabilumu.

Įvairiuose procesuose moksle atsiranda neklasikinių diferencialinių uždavinių, kuriuose nelokaliosios integralinės sąlygos yra papildomos sąlygos.

Paprastai, tokio tipo uždaviniuose parabolinėje lygtyje yra nežinoma argumento t funkcija, kuri turi būti rasta, kartu su lygties sprendiniu. Tokie uždaviniai yra vadinami atvirkštiniais paraboliniais uždaviniais. Šie uždaviniai plačiai nagrinėjami matematinėje literatūroje, juos nagrinėja taip pat ir Lietuvos matematikai [51]. Kai kurie nagrinėjami uždaviniai parabolinei lygčiai su nelokaliąja integraline sąlyga irgi gali būti priskirti atvirkštiniams paraboliniams uždaviniams, tik nežinoma papildoma funkcija gali būti ne lygtyje, o kraštinėje sąlygoje.

Tokio tipo uždavinys pirmą kartą buvo išnagrinėtas R. Cannon, Y. Lin, A.Matheson straipsnyje [11]. Jie išanalizavo dvimatės difuzijos lygties sprendimą baigtinių skirtumų metodu, kai uždavinio vienoje kraštinėje sąlygoje yra nežinoma funkcija $\mu(t)$, kurią taip pat reikia surasti. Dėl šios priežasties yra formuluojama papildoma nelokalioji sąlyga, kuri jų analizuojamame uždavinyje yra tokia

$$\int_0^1 \int_0^{s(x)} u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = m(t), \quad 0 < t \leqslant T.$$

Autoriai darbe pateikia ir skirtuminį metodą, kurio praktinio sprendimo rezultatai parodė, kad sprendinio paklaida konverguoja į nulį mažinant žingsnį h. Tokie uždaviniai nagrinėjami ir kitų autorių darbuose. Lokaliai vienmatis skirtuminis metodas bei kintamųjų krypčių metodas tokio tipo uždaviniams nagrinėjamas R. Čiegio [12, 13] ir M. Dehghan [25, 26, 27] darbuose.

Analogiškas uždavinys elipsinei lygčiai su papildoma integraline sąlyga ir nežinomu parametru kraštinėje sąlygoje yra išnagrinėtas baigtinių skirtumų metodu penktajame disertacijos skyriuje. Disertacijoje pateikiamo sprendinio radimo algoritmo esmė ta, kad du kartus sprendžiamas paprastesnis uždavinys: pirmą kartą vietoje nežinomo parametro laisvai imant konstantą λ_1, o antrą kartą λ_2. Ši metodika yra pritaikoma ir sprendžiant analogišką parabolinį uždavinį.

Tyrimo objektas

Disertacijos tyrimo objektas yra parabolinės diferencialinės lygtys su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis, šių uždavinių skirtuminės schemos, algoritmai sprendiniams rasti.

Darbo tikslas ir uždaviniai

Disertacijos tikslas – išnagrinėti baigtinių skirtumų metodą dvimatei parabolinei lygčiai stačiakampėje srityje su integraline kraštine sąlyga, sudaryti skirtuminių schemų realizavimo algoritmą kintamųjų krypčių metodo pagrindu, išnagrinėti šio algoritmo stabilumą, atlikti skaitinį eksperimentą. Siekiant numatyto tikslo, buvo sprendžiami šie uždaviniai:

- išnagrinėti dvimačio parabolinio uždavinio su viena nelokaliąja kraštine sąlyga sprendimo algoritmą, kai nelokaliojoje sąlygoje yra dvilypis integralas;

- išnagrinėti dvimatės parabolinės lygties stačiakampėje srityje sprendimo algoritmą, kai nagrinėjamos srities kraštuose yra duotos kelios nelokaliosios integralinės sąlygos;
- ištirti vienmačių diferencialinių lygčių sistemos su nelokaliąja integraline sąlyga spektro struktūrą;
- išanalizuoti vienmačių skirtuminių lygčių sistemos su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga spektro struktūrą, panaudojant šiuos rezultatus skirtuminės schemos stabilumui tirti;
- išanalizuoti dvimačio elipsinio uždavinio sprendimo algoritmą, kai viena kraštinė sąlyga yra neišreikštinė ir dėl šios priežasties įvesta papildoma nelokalioji integralinė sąlyga. Pritaikyti šį algoritmą analogiškam paraboliniam uždaviniui.

Tyrimo metodika

Disertacijoje taikomi skirtuminiai metodai dvimačių diferencialinių uždavinių sprendimui, naudojant kintamųjų krypčių arba lokaliai vienmatį metodą. Skirtuminės schemos stabilumui nagrinėti naudojama skirtuminio operatoriaus su nelokaliąja sąlyga spektro struktūros tyrimo metodika. Skaitinis eksperimentas atliktas naudojant Matlab paketą.

Darbo mokslinis naujumas ir jo reikšmė

Disertacijoje išnagrinėtas dvimačio parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis skirtuminis (skaitinis) sprendimo algoritmas. Atlikto darbo rezultatai papildo iki šiol kitų mokslininkų gautus rezultatus analizuojant tokių uždavinių sprendinių radimo problemą bei gali būti panaudoti sprendžiant ir sudėtingesnius neklasikinius diferencialinius uždavinius.

Pateiktas dvimatės parabolinės lygties su viena nelokaliąja integraline sąlyga sprendimo skirtuminiu metodu algoritmas, kuris toliau darbe yra pritaikomas (pakoregavus), sprendžiant analogišką uždavinį, tik jau su keliomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

Daugelis mokslininkų sprendžia diferencialinius uždavinius su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis skirtuminiais metodais.iačiau tik nedaugelyje darbų aptinkama algoritmų, skirtų spręsti uždavinius su integralinėmis kraštinėmis sąlygomis, kai nelokaliojoje kraštinėje sąlygoje yra dvilypis integralas.

Šioje disertacijoje, siekiant išanalizuoti nagrinėjamo diferencialinio uždavinio, sprendžiamo skirtuminiu metodu, stabilumą, yra ištiriama skirtuminio operatoriaus su nelokaliąja sąlyga spektro struktūra.

Pateiktas naujas uždavinio sprendinio radimo algoritmas elipsinei ir parabolinei lygtims, kai vienoje iš kraštinių uždavinio sąlygų yra nežinoma funkcija ar parametras ir dėl to uždavinio formulavime atsiranda papildoma nelokalioji sąlyga.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Disertacijoje gauti rezultatai gali būti panaudoti sprendžiant daugiamačius parabolinius uždavinius su nelokaliosiomis sąlygomis arba uždavinius su sudėtingomis kraštinėmis sąlygomis. Matematiniai tokio tipo uždavinių sprendimo algoritmai svarbūs sprendžiant biochemijos, ekologijos, fizikos, medicinos ir kitų mokslo sričių praktinius uždavinius.

Ginamieji teiginiai

- Diferencialinio parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis sprendinio radimo algoritmas, sprendžiant kintamųjų krypčių metodu.

- Vienmačių diferencialinių ir skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūra.

- Nagrinėjamo diferencialinio uždavinio skirtuminių schemų stabilumas.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai paskelbti penkiuose straipsniuose (1 ISI žurnale su citavimo indeksu, 1 ISI proceedings, 2 recenzuojamuose žurnaluose, 1 preprintas, 1 straipsnis įteiktas į ISI žurnalą su citavimo indeksu). Autorės publikacijos pateiktos sąraše "Autorės publikacijos disertacijos tema".

Disertacijos rezultatai pristatyti šiose mokslinėse konferencijose:

- R. Čiupaila, K. Jakubėlienė, M. Sapagovas. *Alternating direction method for the two-dimensional diffusion equation with nonlocal integral condition.* MMA2009, Daugavpils, Latvia, 2009 m., May 27-30.

- R. Čiupaila, K. Jakubėlienė, M. Sapagovas. *Kintamųjų krypčių metodas dvimatei difuzijos lygčiai su nelokaliąja sąlyga.* Lietuvos matematikų draugijos 50-oji konferencija, Vilnius, 2009 m., birželio 18-19 d.

- R. Čiupaila, K. Jakubėlienė, M. Sapagovas. *Alternating direction method for the two-dimensional diffusion equation with nonlocal integral condition.* Differential equations and their applications dedicated to professor M. Sapagovas 70th anniversary, Lithuania, Panevėžys, 2009 m., rugsėjo 10-12 d.

- M. Sapagovas, K. Jakubėlienė. *Alternating direction for the two- dimensional parabolic equation with nonlocal integral condition.* MMA 2010, Druskininkai, Lithuania, 2010, May 26-29.

- M. Sapagovas, K. Jakubėlienė. *Kintamųjų krypčių metodas dvimatei parabolinei lygčiai su integraline sąlyga* Lietuvos matematikų draugijos 51-oji konferencija, Šiauliai, 2010 m., birželio 17-18 d.

- M. Sapagovas, K. Jakubėlienė. *Two-dimensional parabolic equation with nonlocal integral conditions* MMA 2011, Sigulda, Latvija, 2011, May 25-28.

- K. Jakubėlienė, M. Sapagovas. *Dvimatės parabolinės lygties su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis sprendimas.* Lietuvos matematikų draugijos 52-oji konferencija, Vilnius, 2011 m., birželio 16-17 d.

- M. Sapagovas, K. Jakubėlienė. *Stability of diference schemes for two-dimensional parabolic equation with integral condition.* MMA 2012, Tallin, Estija.

- K. Jakubėlienė. *Tikrinių reikšmių uždavinys skirtuminiam operatoriui su integraline sąlyga.* Lietuvos matematikų draugijos 53-oji konferencija, Klaipėda, 2012 m., birželio 11 d.

Taip pat skaityti pranešimai Matematikos ir Informatikos instituto Skaičiavimo metodų skyriaus seminaruose.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, penki skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Skyriai yra suskirstyti į poskyrius. Disertacijoje naudojama numeracija "skyrius.teiginys", "skyrius.lentelė". Formulių numeracija yra atskira kiekviename skyriuje, tai yra "skyrius.numeris". Cituojant formulę ar lentelę iš kito skyriaus bus papildomai nurodytas skyrius.

Įvade aprašytas temos objektas, išanalizuotas problemos aktualumas, išdėstyti darbo tikslai, uždaviniai, tyrimų metodika, mokslinis darbo naujumas ir gautų rezultatų reikšmė, pateikti ginamieji teiginiai, darbo aprobacija ir aptarta disertacijos struktūra.

Pirmajame skyriuje suformuluotas dvimatis parabolinis uždavinys stačiakampėje srityje, kai vienos stačiakampio kraštinės taškuose yra nelokalioji integralinė sąlyga [81]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,t), \quad x,y \in \Omega = \{0 \leqslant x, y \leqslant 1\}, \quad 0 < t \leqslant T, \\
&u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 1, \\
&u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\
&u(1,y,t) = \mu_2(y,t), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\
&u(x,1,t) = \mu_3(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\
&u(x,0,t) = \gamma(x) \iint\limits_{\Omega} u(\xi,\eta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \mu_4(x,t), \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 1, \quad 0 < t \leqslant T.
\end{aligned}
$$

Pateikiamas skaitinis šio uždavinio sprendimo algoritmas, kurio esmė ta, kad du kartus pritaikius perkelties algoritmą yra sudaroma neaukštos eilės tiesinių lygčių sistema, iš kurios galima surasti trūkstamas sprendinio reikšmes kraštiniuose taškuose. Pateiktas algoritmas pritaikomas sprendžiant konkretų pavyzdį, iš skaičiavimo rezultatų nagrinėjama $\gamma(x)$ įtaka paklaidos dydžiui.

Antrajame disertacijos skyriuje pritaikyti pirmojo skyriaus rezultatai spręsti sudėtingesniam diferencialiniam uždaviniui, kai visuose nagrinėjamos srities kontūro taškuose yra duota nelokalioji integralinė kraštinė sąlyga [44]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,t), \quad x,y \in \Omega, \quad 0 < t \leqslant T, \\
&u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad x,y \in \Omega, \\
&u(x,y,t) = \iint\limits_{\Omega} \gamma(x,\xi,\eta)u(\xi,\eta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \mu, \quad x,y \in \Omega, \quad 0 < t \leqslant T,
\end{aligned}
$$

čia $\Omega = \{0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, $\Gamma = \{y = 0,\, 0 \leqslant x, y \leqslant 1\ y = 1,\, 0 \leqslant x, y \leqslant 1\ x = 0,\, 0 \leqslant x, y \leqslant 1\ \ x = 1,\, 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$. Disertacijoje pateikta išsami šio uždavinio sprendimo algoritmo analizė, kai pritaikius kintamųjų krypčių metodą yra sprendžiamos paprastesnės skirtuminės lygtys su nelokaliosiomis sąlygomis. Šis sprendimo algoritmas pritaikytas sprendžiant konkrečius pavyzdžius, aptariama γ funkcijos įtaka metodo stabilumui.

Trečiajame skyriuje suformuluotas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialinių lygčių sistemai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis [45]:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u_i}{dx^2} + \lambda u_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\
&u_i(0) = 0, \\
&u_i(1) = \gamma_i h \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_0^1 u_k(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

kad būtų galima ištirti skirtuminės schemos stabilumą, priklausomai nuo funkcijos $\gamma(x, \xi, \eta)$ savybių. Tiriama šio diferencialinio operatoriaus spektro struktūra.

Ketvirtame skyriuje nagrinėjamas analogiškas tikrinių reikšmių uždavinys skirtuminiu atveju [82]:

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{h^2} + \lambda u_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\
&u_{i0} = 0, \\
&u_{iN} = \gamma_i h^2 \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \rho_{ij} u_{ij}.
\end{aligned}$$

Ištirta skirtuminio operatoriaus spektro struktūra ir skirtuminės schemos stabilumas, priklausomai nuo funkcijos γ.

Paskutiniame disertacijos skyriuje suformuluotas dvimatis elipsinis uždavinys su nelokaliąja sąlyga [43]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = \{0 < x, y < 1\}, \\
&u(0, y) = g_0(y), \\
&u(1, y) = g_1(y), \\
&u(x, 1) = h_1(x), \\
&u(x, 0) = \mu h_0(x), \\
&\iint\limits_{\Omega} u(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = m,
\end{aligned}$$

čia μ - nežinoma konstanta. Suformuluotas skaitinis šio diferencialinio uždavinio sprendimo algoritmas, kuris pritaikytas analogiško diferencialinio uždavinio nestacionariu atveju sprendimui.

Disertacijos išvadose apibendrinti tyrimų rezultatai.

Padėka

Nuoširdžiai dėkoju darbo vadovui prof. habil. dr. Mifodijui Sapagovui už vadovavimą disertaciniam darbui, skirtą laiką ir energiją, taip pat dėkoju visam Vilniaus Universiteto Matematikos ir Informatikos instituto Skaičiavimo metodų skyriaus kolektyvui už pastabas bei pagalbą rašant disertaciją, Kauno Technologijos Universiteto Taikomosios matematikos katedros kolektyvui už moralinį palaikymą ir pagalbą. Ačiū visiems artimiesiems ir draugams už pagalbą, palaikymą ir supratingumą.

1 Kintamųjų krypčių metodas dvimatei parabolinei lygčiai su viena nelokaliąja integraline sąlyga

1.1 Parabolinių lygčių su nelokaliąja sąlyga sprendimas

Šiame skyriuje nagrinėjamas dvimačio parabolinio uždavinio su nelokaliąja sąlyga sprendimas. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai yra išspausdinti [81] straipsnyje.

Parabolinės lygtys su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis pastaruoju metu yra intensyviai nagrinėjama sritis tiek diferencialinių lygčių teorijoje, tiek skaitinėje analizėje. Straipsniuose [10, 12, 13, 27, 33, 41, 54, 79, 80, 90] tiesinės ir netiesinės parabolinės lygtys su nelokaliosiomis sąlygomis sprendžiamos baigtinių skirtumų metodu.

Šiame skyriuje nagrinėjamo dvimačio parabolinio uždavinio specifika yra ta, kad nelokaliojoje kraštinėje sąlygoje ieškomo sprendinio reikšmė srities kontūro taškuose yra susieta su dvimačiu, sprendinio pagal visą sritį, integralu. Tuo mūsų tyrimai ir skiriasi nuo tyrimų anksčiau išvardintuose straipsniuose, juose dvimačių parabolinių lygčių su tokio tipo nelokaliąja sąlyga sprendimas baigtinių skirtumų metodu yra gana mažai išnagrinėtas.

1.2 Uždavinio formulavimas

Nagrinėjamas pradinis uždavinys parabolinei lygčiai su integraline kraštine sąlyga:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,t), \quad x,y \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u(1,y,t) = \mu_2(y,t), \tag{1.2}$$

$$u(x,1,t) = \mu_3(x,t), \tag{1.3}$$

$$u(x,0,t) = \gamma(x) \iint\limits_{\Omega} u(\xi,\eta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \mu_4(x,t), \quad x \in \Gamma_1, \tag{1.4}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \tag{1.5}$$

čia $\Omega = \{0 < x,y < 1\}$, $\Gamma_1 = \{y = 0,\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, o $t \in (0,T]$.

Sąlyga (1.4) yra sąlygos

$$u(x,y,t) = \iint\limits_{\Omega} K(x,y,\xi,\eta) u(\xi,\eta,t) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta, \quad x,y \in \partial\Omega \tag{1.6}$$

atskirasis atvejis. Straipsnyje [54] lygtis (1.1) su $f = 0$ ir integraline sąlyga (1.6) sprendžiama stačiakampėje srityje baigtinių skirtumų metodu esant prielaidai:

$$\iint\limits_{\Omega} |K(x,y,\xi,\eta)| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta < \rho < 1. \tag{1.7}$$

Šio skyriaus pagrindinis rezultatas yra tas, kad parodoma, jog dvimatės parabolinės lygtys su (1.4) tipo nelokaliąja sąlyga gali būti sėkmingai sprendžiamos racionaliuoju kintamųjų krypčių metodu ir tam tikslui sąlyga (1.7) ne visuomet yra būtina.

1.3 Skirtuminio uždavinio formulavimas

Iš pradžių nagrinėkime kai kurias skirtuminiam uždaviniui, gautam aproksimuojant diferencialinį uždavinį (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) su bendro pavidalo nelokaliąja sąlyga (1.6), būdingas savybes. Užrašykime (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) diferencialinio uždavinio skirtuminę schemą, analogiškai kaip buvo padaryta [54] darbe:

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n}}{\tau} = \Lambda_1 u_{ij}^{n+1} + \Lambda_2 u_{ij}^{n+1} + f_{ij}^{n+1}, \tag{1.8}$$

$$u_{0j}^{n+1} = \mu_{1_j}^{n+1}, \tag{1.9}$$

$$u_{Nj}^{n+1} = \mu_{2_j}^{n+1}, \tag{1.10}$$

$$u_{iN}^{n+1} = \mu_{3_i}^{n+1}, \tag{1.11}$$

$$u_{i0}^{n+1} = \gamma_i h^2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \rho_i u_{kj}^{n+1} + g_{i0}^{n+1} + \mu_{3_i}^{n+1}. \tag{1.12}$$

Pabandykime atsakyti į klausimą, kaip galima būtų spręsti skirtuminę lygčių sistemą (1.8)-(1.12).

Kai sąlyga (1.7) teisinga, lygčių sistemos, užrašytos $(n+1)$-ame sluoksnyje

$$Au^{n+1} = F^n$$

matrica A - diagonaliai vyraujanti, todėl sistemą galima spręsti daugeliu būdų.

Kai (1.7) sąlyga nėra teisinga, apie matricą A galima pasakyti tik tiek,kad

- ji nėra diagonaliai vyraujanti,
- ji nėra simetrinė,
- apie šios matricos tikrines reikšmes literatūroje nėra rezultatų.

Uždavinį (1.1)-(1.5) spręsime Peaceman ir Rachford kintamųjų krypčių metodu [59]. Įvedamas pažymėjimas $u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n)$, $i, j = \overline{0, N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, M$, t.y. intervalą $[0, 1]$, x ašyje ir atitinkamai y ašyje daliname į N lygių dalių, intervalą $[0, T]$ - į M lygių dalių $h = 1/N$, o $\tau = T/M$. Atsižvelgiant į kintamųjų krypčių metodo pagrindinę idėją, užrašomi atskirai du vienmačiai skirtuminiai uždaviniai:

$$\frac{u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^n}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^n + f_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \quad i, j = \overline{1, N-1}, \tag{1.13}$$

$$u_{0j}^{n+\frac{1}{2}} = \mu_{1_j}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{1.14}$$

$$u_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} = \mu_{2_j}^{n+\frac{1}{2}} \tag{1.15}$$

ir

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{n+1} + f_{ij}^{n+1}, \quad i, j = \overline{1, N-1}, \tag{1.16}$$

$$u_{iN}^{n+1} = \mu_{3_i}^{n+1}, \tag{1.17}$$

$$u_{i0}^{n+1} = h^2 \gamma_i \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \rho_i u_{kj}^{n+1} + g_{i0}^{n+1} + \mu_{4_i}^{n+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{1.18}$$

čia

$$\rho_i = \begin{cases} 1, & i \neq 0, N, \\ 1/2, & i = 0, N, \end{cases}$$

$$\Lambda_1 u_{ij}^n = \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i+1,j}^n}{h^2},$$
$$\Lambda_2 u_{ij}^n = \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j+1}^n}{h^2}.$$

Lygybė (1.18) yra užrašyta pagal trapecijų formulę integralui apytikriai apskaičiuoti. Šioje formulėje dydis g_{i0}^{n+1} apibrėžiamas

$$g_{i0}^{n+1} = h^2\gamma_i \left(\sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \mu_{3i}^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} (\mu_{1j}^{n+1} + \mu_{2j}^{n+1}) \right). \tag{1.19}$$

Atkreipkime dėmesį, kad (1.16)-(1.18) uždavinys skiriasi nuo įprastų kintamųjų krypčių metodo paraboliniams uždaviniams. Būtent (1.16) sistemos negalime išspręsti atskirai vienai fiksuotai $i = 1, 2, \dots, N-1$ reikšmei - nelokaliojoje sąlygoje (1.18) visos u_{ij}^{n+1} reikšmės $i, j = \overline{1, N-1}$ yra susietos tarpusavyje.

1.4 Skirtuminių lygčių sistemos sprendimo algoritmas

Šiame poskyryje pateikiamas algoritmas, kaip surasti u_{ij}^{n+1}, kai žinomos ankstesnio sluoksnio reikšmės u_{ij}^{n}.

Pirmoji algoritmo dalis - (1.13)-(1.15) uždavinys yra realizuojamas klasikiniu perkelties algoritmu. Su kiekviena indekso j reikšme $j = 1, 2, \dots, N$ reikia išspręsti skirtuminių lygčių sistemą su tridiagonaline matrica.

Antroje algoritmo dalyje tenka spręsti (1.16)-(1.18) sistemą, kuri kaip buvo minėta aukščiau, dėl (1.18) sąlygos negali būti išspręsta atskirai kiekvienai indekso i reikšmei. Todėl ši (1.16)-(1.18) sistema sprendžiama modifikuotu perkelties algoritmu, aprašytu [13] darbe, kuriame šis algoritmas buvo taikomas skirtuminių lygčių sistemai su kitokio tipo nelokaliąja sąlyga.

Pirmiausia užrašoma (1.16) lygčių sistema

$$au_{i,j-1}^{n+1} - cu_{ij}^{n+1} + bu_{i,j+1}^{n+1} = F_{ij}^{n+1} \tag{1.20}$$

pavidalu, kuriame

$$\begin{aligned} a = b &= \frac{\tau}{2h^2}, \quad c = \frac{\tau}{h^2} + 1, \\ F_{ij}^{n+1} &= -\frac{\tau}{2}(\Lambda_1 u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + f_{ij}^{n+1}) - u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

čia a, b, c nepriklauso nuo i, j. Pagal modifikuotą perkelties algoritmą (1.16)-(1.18) sistemos sprendinį kiekvienai fiksuotai $i = 1, 2, \dots, N-1$ reikšmei užrašome

$$u_{ij}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{ij-1}^{n+1} + \tilde{\beta}_{ij}^{n+1}, \quad j = \overline{1, N-1} \tag{1.21}$$

pavidalu. Pastebėkime, kad bendru atveju koeficientas $\tilde{\alpha}_j$ irgi turėtų priklausyti nuo indeksų i ir n, tačiau atsižvelgiant į (1.16) lygties specifiką (koeficientai a, b, c lygtyje (1.20) nepriklauso nuo i, j) ir koeficientas $\tilde{\alpha}_j$ (1.21) formulėje nepriklausys nuo kitų indeksų. Iš (1.20) lygties ir (1.17) sąlygų klasikiniu perkelties algoritmu apskaičiuojame

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{b}{c - b\tilde{\alpha}_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{1.22}$$

$$\tilde{\beta}_{ij}^{n+1} = \frac{b\tilde{\beta}_{i,j+1}^{n+1} - F_{ij}^{n+1}}{c - b\tilde{\alpha}_{j+1}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{1.23}$$

Kadangi

$$u_{iN}^{n+1} = \mu_{3i}^{n+1}, \quad u_{iN}^{n+1} = \tilde{\alpha}_N u_{iN-1}^{n+1} + \tilde{\beta}_{iN}^{n+1},$$

tai

$$\tilde{\alpha}_N = 0, \quad \tilde{\beta}_{iN}^{n+1} = \mu_{3i}^{n+1}. \tag{1.24}$$

Toliau dar kartą kiekvienam $i = 1, 2, \ldots, N-1$ teoriškai naudojamas perkelties algoritmas, tik u_{ij}^{n+1} ieškome štai tokiu pavidalu:

$$u_{ij}^{n+1} = \alpha_j u_{i0}^{n+1} + \beta_{ij}^{n+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \tag{1.25}$$

kuriame $\alpha_0 = 1$, $\beta_{i0}^{n+1} = 0$, nes $u_{i0} = \alpha_0 u_{i0} + \beta_{i0}$. Iš (1.21) ir (1.25) išraiškų išvedame

$$\alpha_j = \tilde{\alpha}_j \alpha_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.26}$$

$$\beta_{ij}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j \beta_{ij-1}^{n+1} + \tilde{\beta}_{ij}^{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.27}$$

Pareikalaukime, kad (1.25) sprendinys tenkintų nelokaliąją sąlygą (1.18). Įrašę (1.25) išraišką į (1.18) sąlygą, gauname

$$u_{i0}^{n+1} = h^2 \gamma_i \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \rho_i (\alpha_j u_{k0}^{n+1} + \beta_{kj}^{n+1}) + g_{i0}^{n+1} + \mu_{4i}^{n+1} \tag{1.28}$$

su kiekviena indekso i reikšme $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Išraiškose (1.28) dydžiai u_{i0}^{n+1}, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ yra nežinomi. Šios reikšmės randamos išsprendus (1.28) tiesinių algebrinių lygčių sistemą, kurią perrašome tokiu pavidalu

$$Au_0^{n+1} = F, \tag{1.29}$$

kuriame

$$A = \begin{pmatrix} (1-h\gamma_1\alpha) & -h\gamma_1\alpha & \dots & -h\gamma_1\alpha \\ -h\gamma_2\alpha & (1-h\gamma_2\alpha) & \dots & -h\gamma_2\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -h\gamma_{N-1}\alpha & -h\gamma_{N-1}\alpha & \dots & (1-h\gamma_{N-1}\alpha) \end{pmatrix},$$

u_0^{n+1} yra $(N-1)$-eilės vektorius $u_0^{n+1} = \{u_{i0}^{n+1}\}$,

$$\alpha = h\sum_{j=0}^{N-1}\rho_j\alpha_j = h\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{N-1}\alpha_j\right). \tag{1.30}$$

Taigi, norint realizuoti kintamųjų krypčių metodo antrąją algoritmo dalį, t.y. išspęsti (1.16)-(1.18) lygčių sistemą su nelokaliąja sąlyga, pirmiausiai reikia perkelties algoritmu surasti koeficientus $\tilde{\alpha}_j$, $\tilde{\beta}_{ij}^{n+1}$, o po to pagal (1.26), (1.27) formules apskaičiuoti koeficientus α_j, β_{ij}^{n+1}. Šiam tikslui pasiekti aritmetinių operacijų skaičius yra propocingas N^2, t.y. proporcingas nežinomųjų viename sluoksnyje skaičiui. Po to reikia išspręsti $(N-1)$-osios eilės tiesinių algebrinių lygčių sistemą (1.29). Tam tikslui aritmetinių operacijų skaičius yra proporcingas N^3, jei šią sistemą spręsime tiesioginiais metodais, arba N^2, jei naudosime iteracinį metodą. Naudojant iteracinį metodą, reikia atkreipti dėmesį, kad visuomet turime gerą pradinę iteraciją: $(u_{i0}^{n+1})^{(0)} = u_{i0}^n$. Suradus u_{i0}^{n+1}, belieka pasinaudoti formule (1.25).

Išnagrinėkime kelias pagrindines lygčių sistemos (1.29) savybes.

1.1 lema. *Visuomet yra teisingas įvertis*

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}. \tag{1.31}$$

Įrodymas. Iš (1.22) formulės, atsižvelgiant į koeficientų a, b, c reikšmes, gauname:

$$0 < \tilde{\alpha}_{N-j} < \frac{j}{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Iš (1.26) formulės, atsižvelgiant į sąlygą $\alpha_0 = 1$, seka

$$0 < \alpha_j < \frac{N-j}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Iš šių įverčių ir (1.30) formulės tiesiogiai seka lemos tvirtinimas. □

1.2 lema. *Jei* $-\infty < \gamma(x) < 2$*, tai sistemos* (1.29) *determinantas yra teigiamas skaičius.*

Įrodymas. Tiesiogiai apskaičiuojame, kad kiekvienam $N = 2, 3, \ldots$ teisinga lygybė

$$detA = 1 - h\alpha \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i.$$

Pagal lemos prielaidą apie funkciją $\gamma(x)$ turime:

$$h\alpha \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i < 1.$$

Iš čia seka lemos tvirtinimas, kad $detA > 0$. $\square$

1.3 lema. *Jei* $|\gamma(x)| \leqslant 2$*, tai matrica* A *yra diagonaliai vyraujanti.*

Įrodymas. Matricos A diagonalaus vyravimo sąlyga yra

$$|1 - h\gamma_i\alpha| > (N-2)h|\gamma_i|\alpha. \tag{1.32}$$

Iš čia, jei $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 2$, sąlyga (1.32) tampa tokia

$$1 > (1-h)\gamma_i\alpha.$$

Pastaroji sąlyga bus visuomet teisinga, jeigu $0 < \alpha < 1/2$, $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 2$.

Jeigu $-2 \leqslant \gamma_i < 0$, tai (1.32) sąlyga užrašoma taip:

$$1 > (1-3h)|\gamma_i|\alpha.$$

Šiai sąlygai irgi pakanka nelygybių $|\gamma_i| \leqslant 2$ ir $0 < \alpha < 1/2$. $\square$

Išvada. Jei $|\gamma(x)| \leqslant 2$, (1.29) lygčių sistemą galime išspręsti stabiliu algoritmu (pvz., Gauso metodu, Jakobio iteraciniu metodu ir pan).

1.5 Skaitiniai rezultatai

Šiame skyriuje aprašytu metodu buvo išspręstas (1.1)-(1.5) uždavinys, kai funkcija $\gamma(x) = ce^x$, imant skirtingas c reikšmes. Taip pat buvo išspręstas uždavinys, kai $\gamma(x) = c$. Šiuo atveju praktiškai (1.29) lygčių sistemos spręsti nereikia, kadangi iš sąlygos $\gamma(x) = c$ seka, kad u_{ij}^{n+1} su visomis i reikšmėmis yra nežinoma konstanta tai (1.30) lygčių sistema tampa viena lygtimi.

Funkcijų $f(x)$, $\varphi(x)$ ir $\mu_i(x)$, $i = \overline{1,4}$ išraiškos buvo parinktos taip, kad funkcija

$$u^*(x, y, t) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)e^{2t}$$

būtų (1.1)-(1.5) uždavinio tikslus sprendinys. Skaitiniai rezultatai surašyti lentelėse 1.1 ir 1.2. Šiose lentelėse pateiktos paklaidos:

$$r = \max_{i,j} |u^*(x_i, y_j, t^n) - u_{ij}^n|,$$

kai $t_n = T$.

1.1 lentelė. $h = \frac{1}{40}, \tau = \frac{1}{1600}$, $T = 1$

$\gamma(x)$	:	0	1	-1	e^{3x}	$-e^{3x}$	-100	$0.5e^x$	e^x
r	:	0.0058	0.0055	0.0059	$1.8 * 10^7$	0.0072	0.0133	0.0056	0.0053

$\gamma(x)$	:	$1.1e^x$	$1.3e^x$	$1.5e^x$	$1.8e^x$	$2e^x$	$2.5e^x$	$3e^x$
r	:	0.0053	0.0053	0.0073	0.0124	0.0192	0.1813	72.227

1.2 lentelė. $\gamma(x) = e^x$, $T = 1$

h	:	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$
τ	:	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{640}$
r	:	0.5166	0.1280	0.0329	0.0084

1.3 lentelėje pateiktos paklaidų reikšmės uždaviniui, kurio tikslus sprendinys yra:

$$u^*(x, y, t) = e^{x+y+t}$$

1.3 lentelė. $h = \frac{1}{40}$, $\tau = \frac{1}{1600}$

$\gamma(x)$	:	0	1	-1	e^x	-100
r	:	0.000029	0.00099	0.000609	0.00856	0.0088

Kokybiškai rezultatai yra artimi pirmo pavyzdžio skaitiniams rezultatams.

Vienas pagrindinių skaitinio eksperimento tikslų buvo gauti informaciją apie skirtuminės schemos stabilumą. Kaip žinoma, sprendžiant parabolinę lygtį su bet kurio tipo nelokaliosiomis sąlygomis baigtinių skirtumų metodu, vienas svarbiausių klausimų yra skirtuminės schemos stabilumas, priklausomai nuo parametrų ar funkcijų, įeinančių į nelokaliąsias sąlygas. Straipsniuose [38, 48, 84] įrodyta , kad nagrinėjant įvairaus tipo nelokaliąsias sąlygas vienamačiu ar dvimačiu atveju, pakankamoji skirtuminės schemos stabilumo sąlyga tam tikroje energetinėje normoje gali būti

$$\rho(S) = \max_{ij} |\lambda_{ij}(S)| < 1, \tag{1.33}$$

čia S yra skirtuminės schemos, užrašytos pavidalu

$$u^{n+1} = Su^n + \varphi^n$$

pavidalu, perėjimo matrica.

Mūsų nagrinėjamai (1.13)-(1.18) sistemai matricos S spektro struktūra nėra ištirta, todėl mes stabilumo ar nestabilumo faktą iliustruojame skaitiniais eksperimentais. Kai $\gamma(x)$ yra pakankamai didelė teigiama funkcija, skirtuminė schema nėra stabili.

Papildomai išanalizavome skirtuminės schemos stabilumą vienamatei parabolinei lygčiai - formaliai atitinkančiai (1.1)-(1.5) uždaviniui:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\\
&u(0,t) = \gamma \int\limits_0^1 u(x,t)dx + \mu_4(t),\\
&u(1,t) = \mu_3(t), \quad u(x,0) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

Stabilumo sąlyga šiam uždaviniui yra [68]

$$-\infty < \gamma < 2,$$

kuri (atsitiktinai ar dėsningai) turi ryšį su sistemos (1.29) matricos savybe, kad $detA > 0$.

Iš 1.1 ir 1.2 lentelių matyti, kad mūsų išspręsto pavyzdžio skaitiniai rezultatai leidžia teigti, jog stabilumo klausimu yra tam tikra analogija tarp (1.1)-(1.5) ir (1.29) uždavinių. Detaliau skirtuminės schemos, apibrėžtos (1.13)-(1.18) formulėmis, stabilumą nagrinėsime ketvirtajame disertacijos skyriuje.

1.6 Pirmojo skyriaus pastabos ir išvados

- Išnagrinėtas diferencialinių lygčių sprendimo metodas gali būti realizuotas ir bendresnėms nelokaliosioms kraštinėms sąlygoms

$$u(x,0,t) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 K(x,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \mu_4(x,t).$$

- Kad rastume skirtuminės lygties sprendinį $(n+1)$-ame sluoksnyje, tenka papildomai kiekviename sluoksnyje spręsti $N-1$ tiesinių lygčių su $N-1$ nežinomųjų sistemą tuo mūsų algoritmas skiriasi nuo klasikinio kintamųjų krypčių metodo algoritmo. Tuo atveju, kai (1.4) sąlygoje $\gamma(x) = const$, (1.29) papildoma lygčių sistema virsta viena lytimi su vienu nežinomuoju ir mūsų algoritmas praktiškai sutampa su [13] straipsnyje pateiktu algoritmu.

2 Dvimatės parabolinės lygties su dviem nelokaliosiomis sąlygomis sprendimas baigtinių skirtumų metodu

2.1 Uždavinio formulavimas

Šiame skyriuje nagrinėjamo diferencialinio uždavinio specifika yra ta, kad dvejuose nelokaliosiose sąlygose, užduotose dviejų stačiakampio kraštinių taškuose, sprendinio reikšmės kontūriniuose taškuose yra susietos su sprendinio integralu visoje srityje Ω. Spręsime tokį uždavinį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,t), \quad x,y \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad x,y \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad y \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$u(1,y,t) = \mu_2(y,t), \quad y \in \Omega, \tag{2.4}$$

$$u(x,0,t) = \iint\limits_{\Omega} \gamma_3(x,\xi) u(\xi,\eta,t) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \mu_3(x,t), \quad x \in \Omega, \tag{2.5}$$

$$u(x,1,t) = \iint\limits_{\Omega} \gamma_4(x,\xi) u(\xi,\eta,t) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \mu_4(x,t), \quad x \in \Omega, \tag{2.6}$$

čia $\Omega = \{0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, ir $0 < t \leqslant T$.

2.2 Skirtuminis sprendimo metodas

Spręsime (2.1)-(2.6) diferencialinį uždavinį, kaip ir pirmajame skyriuje, taikydami kintamųjų krypčių metodą. Taigi, reikia išspręsti dvi vienmates skirtuminių lygčių sistemas. Pirmiausia, sprendžiamas vienmatis uždavinys su kraštinėmis sąlygomis:

$$\frac{u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^{n}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{n} + f_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \quad i,j = \overline{1, N-1}, \tag{2.7}$$

$$u_{0j}^{n+\frac{1}{2}} = \mu_{1_j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad j = \overline{1, N-1}, \tag{2.8}$$

$$u_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} = \mu_{2_j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad j = \overline{1, N-1}. \tag{2.9}$$

Jis sprendžiamas naudojantis perkelties algoritmu ir randamas sprendinys $(n+1/2)$-ame laiko sluoksnyje. Tuomet reikia rasti sprendinį $(n+1)$-ame laiko sluoksnyje, sprendžiant sekantį skirtuminį uždavinį su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis:

$$\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}}=\Lambda_1 u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2 u_{ij}^{n+1}+f_{ij}^{n+1},\quad i,j=\overline{1,N-1}, \tag{2.10}$$

$$u_{i0}^{n+1}=h^2\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=0}^{N}\gamma_{3_{ik}}\rho_{kl}u_{kl}^{n+1}+g_{1_{i0}}^{n+1}+\mu_{3_i}^{n+1},\quad i=\overline{1,N-1}, \tag{2.11}$$

$$u_{iN}^{n+1}=h^2\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=0}^{N}\gamma_{4_{ik}}\rho_{kl}u_{kl}^{n+1}+g_{2_{iN}}^{n+1}+\mu_{4_i}^{n+1},\quad i=\overline{1,N-1}, \tag{2.12}$$

čia $h=\frac{1}{N}$, $\tau=\frac{1}{M}$,

$$\rho_{ij}=\begin{cases}1, & j\neq 0,N\\ 1/2, & j=0, j=N,\end{cases}$$

$$\Lambda_1 u_{ij}^{n+1}=\frac{u_{i-1,j}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n+1}}{h^2},\quad i,j=\overline{1,N-1}$$

$$\Lambda_2 u_{ij}^{n+1}=\frac{u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}}{h^2},\quad i,j=\overline{1,N-1}.$$

Nelokaliosios sąlygos (2.11) ir (2.12) yra gautos pakeičiant integralus iš (2.5), (2.6) sąlygų trapecijų formule. Tuomet nariai $g_{1_{i0}}^{n+1}$ ir $g_{2_{iN}}^{n+1}$ priklauso nuo u_{0N}^{n+1}, u_{Nl}^{n+1}, $l=\overline{0,N}$ pagal formules:

$$g_{1_{i0}}^{n+1}=h^2\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N-1}(\gamma_{3_{i0}}u_{0l}^{n+1}+\gamma_{3_{iN}}u_{Nl}^{n+1})+h^2\frac{1}{4}(\gamma_{3_{i0}}u_{00}^{n+1}+\gamma_{3_{i0}}u_{0N}^{n+1}+$$
$$\gamma_{3_{iN}}u_{N0}^{n+1}+\gamma_{3_{iN}}u_{NN}^{n+1}),\quad i=\overline{1,N-1},$$

$$g_{2_{i0}}^{n+1}=h^2\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N-1}(\gamma_{4_{i0}}u_{0l}^{n+1}+\gamma_{4_{iN}}u_{Nl}^{n+1})+h^2\frac{1}{4}(\gamma_{4_{i0}}u_{00}^{n+1}+\gamma_{4_{i0}}u_{0N}^{n+1}+$$
$$\gamma_{4_{iN}}u_{N0}^{n+1}+\gamma_{4_{iN}}u_{NN}^{n+1}),\quad i=\overline{1,N-1}.$$

Panagrinėkime, kaip išspręsti (2.10)-(2.12) skirtuminių lygčių sistemą.

(2.10) lygtis perrašoma taip:

$$u_{ij}^{n+1}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{u_{ij-1}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{ij+1}^{n+1}}{h^2}\right)=\frac{\tau}{2}\Lambda_1 u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2}f_{ij}^{n+1} \tag{2.13}$$

arba

$$au_{ij-1}^{n+1}-cu_{ij}^{n+1}+bu_{ij+1}^{n+1}=F_{ij}^{n+1},\quad i=1,2,\ldots,N-1, \tag{2.14}$$

čia $a = \tau/2h^2$, $b = \tau/2h^2$, $c = 1 + \tau/h^2$ ir $c > a + b$.

Pastebėkime, jog, esant dviems nelokaliosioms sąlygoms (2.11) ir (2.12), nepavyksta apibendrinti metodo, naudoto pirmajame skyriuje. Dabar negalime užrašyti (1.24) sąlygų. Dabar vietoje (1.11) sąlygos yra (2.12) nelokalioji sąlyga.

Todėl (2.14) sistemai su (2.11), (2.12) nelokaliosiomis sąlygomis spręsti naudosime kitą sprendinio išraišką, kuri skiriasi nuo (1.25) išraiškos.

(2.14), (2.11), (2.12) sistemos sprendinio ieškosime tokiu pavidalu

$$u_{ij}^{n+1} = c_1^{n+1} {u_{ij}^{(1)}}^{n+1} + c_2^{n+1} {u_{ij}^{(2)}}^{n+1} + {u_{ij}^{(0)}}^{n+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \tag{2.15}$$

čia $u_{ij}^{(1)}$ ir $u_{ij}^{(2)}$ yra du tiesiškai nepriklausomi (2.14) homogeninės lygčių sistemos sprendiniai, kuriuos galima rasti tokiu būdu ($i = 1, 2, \dots, N-1$):

$$\begin{aligned} &a u_{ij-1}^{(1)} - c u_{ij}^{(1)} + b u_{ij+1}^{(1)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ &u_{i0}^{(1)} = 1, \\ &u_{iN}^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} &a u_{ij-1}^{(2)} - c u_{ij}^{(2)} + b u_{ij+1}^{(2)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ &u_{i0}^{(2)} = 0, \\ &u_{iN}^{(1)} = 1. \end{aligned}$$

Matome, kad iš tikrųjų $u_{ij}^{(1)}$ ir $u_{ij}^{(2)}$ nepriklauso nuo n (nuo laiko momento) ir nepriklauso nuo $i = \overline{1, N-1}$. Sprendinys $u_{ij}^{(0)n+1}$ (2.15) formulėje yra atskiras nehomogeninės (2.14) sistemos su kraštinėmis sąlygomis, lygiomis nuliui, sprendinys:

$$\begin{aligned} &a u_{ij-1}^{(0)n+1} - c u_{ij}^{(0)n+1} + b u_{ij+1}^{(0)n+1} = F_{ij}^{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ &u_{i0}^{(0)n+1} = 0, \\ &u_{iN}^{(0)n+1} = 0. \end{aligned}$$

Taigi, $u_{ij}^{(0)n+1}$ priklauso ir nuo n, ir nuo i, ir nuo j.

(2.15) formulėje c_1^{n+1} ir c_2^{n+1} turi būti parinkti taip, kad (2.11) ir (2.12) nelokaliosios sąlygos būtų teisingos. Konstantos C_1^{n+1} ir C_2^{n+1} irgi priklauso nuo i, bet dėl paprastumo mes šį indeksą praleidžiame.

Taigi, $c_1^{n+1} \equiv u_{i0}^{n+1}$ and $c_2^{n+1} \equiv u_{iN}^{n+1}$.

Dar kartą perrašome (2.15):

$$u_{ij}^{n+1} = u_{i0}^{n+1} u_j^{(1)} + u_{iN}^{n+1} u_j^{(2)} + u_{ij}^{(0)n+1}. \tag{2.16}$$

Šioje išraiškoje vietoje $u_{ij}^{(1)}$ ir $u_{ij}^{(2)}$ parašyta $u_j^{(1)}$, $u_j^{(2)}$, kadangi, šios reikšmės nepriklauso nuo i.

Įrašę u_{ij}^{n+1} išraišką į (2.11) ir (2.12) nelokaliąsias sąlygas, gauname $2(N-1)$ tiesinių algebrinių lygčių sistemą

$$\begin{aligned} u_{i0}^{n+1} &= h\sum_{k=1}^{N-1} \gamma_{3_{ik}} u_{k0}^{n+1} \cdot h\sum_{l=0}^{N} \rho_l u_l^{(1)} + h\sum_{k=1}^{N-1} \gamma_{3_{ik}} u_{kN}^{n+1} \cdot h\sum_{l=0}^{N} \rho_l u_l^{(2)} \\ &+ h^2 \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=0}^{N} \gamma_{3_{ik}} u_{kl}^{(0)n+1} + g_i^{(1)n+1}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} u_{iN}^{n+1} &= h\sum_{k=1}^{N-1} \gamma_{4_{ik}} u_{k0}^{n+1} \cdot h\sum_{l=0}^{N} \rho_l u_l^{(1)} + h\sum_{k=1}^{N-1} \gamma_{4_{ik}} u_{kN}^{n+1} \cdot h\sum_{l=0}^{N} \rho_l u_l^{(2)} \\ &+ h^2 \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=0}^{N} \gamma_{4_{ik}} u_{kl}^{(0)n+1} + g_i^{(1)n+1} \end{aligned} \tag{2.18}$$

su $2N-2$ nežinomaisiais u_{k0}^{n+1}, u_{kN}^{n+1}, $k = \overline{1, N-1}$. Lygtys (2.17) ir (2.18) perrašomos matricinėje formoje

$$Au = F, \tag{2.19}$$

kurioje matrica A yra lygi:

$$A = \begin{pmatrix} (1-\gamma_{3_{1,1}}\alpha) & \dots & -\gamma_{3_{1,N-1}}\alpha & -\gamma_{3_{1,1}}\beta & \dots & -\gamma_{3_{1,N-1}}\beta \\ -\gamma_{3_{2,1}}\alpha & \dots & -\gamma_{3_{2,N-1}}\alpha & -\gamma_{3_{2,1}}\beta & \dots & -\gamma_{3_{2,N-1}}\beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_{3_{N-1,1}}\alpha & \dots & (1-\gamma_{3_{N-1,N-1}}\alpha) & -\gamma_{3_{N-1,1}}\beta & \dots & -\gamma_{3_{N-1,N-1}}\beta \\ -\gamma_{4_{1,1}}\alpha & \dots & -\gamma_{4_{1,N-1}}\alpha & (1-\gamma_{4_{1,1}}\beta) & \dots & -\gamma_{4_{1,N-1}}\beta \\ -\gamma_{4_{2,1}}\alpha & \dots & -\gamma_{4_{2,N-1}}\alpha & -\gamma_{4_{2,1}}\beta & \dots & -\gamma_{4_{2,N-1}}\beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_{4_{N-1,1}}\alpha & \dots & -\gamma_{4_{N-1,N-1}}\alpha & -\gamma_{4_{N-1,1}}\beta & \dots & (1-\gamma_{4_{N-1,N-1}}\beta) \end{pmatrix},$$

čia

$$\alpha = h^2 \sum_{l=0}^{N} \rho_l u_l^{(1)}, \quad \beta = h^2 \sum_{l=0}^{N} \rho_l u_l^{(2)}.$$

Vektorius F yra

$$F^T = \{F_{1,1}, \dots, F_{1,N-1}, F_{2,1}, \dots, F_{2,N-1}\},$$

čia

$$F_{1,i} = h^2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{N} \gamma_{3_{ik}} u_{kl}^{(0)n+1} + g_i^{(1)n+1}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$F_{2,i} = h^2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{N} \gamma_{4_{ik}} u_{kl}^{(0)n+1} + g_i^{(2)n+1}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Išsprendus (2.19) tiesinių lygčių sistemą, gauname sprendinius u_{k0}^{n+1} ir u_{kN}^{n+1} ($k = \overline{1, N-1}$). Šiuos sprendinius įrašius į (2.16) išraišką, randamas sprendinys u_{ij}^{n+1} $(n+1)$-ame laiko sluoksnyje.

2.3 Skaitinis eksperimentas

Šiame disertacijos skyriuje aptartas metodas skirtuminių lygčių sistemos sprendiniui rasti yra pritaikytas sprendžiant konkrečius (2.1)-(2.6) pavyzdžius su $\gamma_3(x, \xi) = \gamma_3(x)$ ir $\gamma_4(x, \xi) = \gamma_4(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t), \quad x, y \in \Omega = \{0 \leqslant x, y \leqslant 1\}, \tag{2.20}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad x, y \in \Omega, \tag{2.21}$$

$$u(0, y, t) = \mu_1(y, t), \quad y \in \Omega, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2.22}$$

$$u(1, y, t) = \mu_2(y, t), \quad y \in \Omega, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2.23}$$

$$u(x, 0, t) = \gamma_3(x) \iint\limits_{\Omega} u(\xi, \eta, t) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \mu_3(x, t), \quad x \in \Omega, \tag{2.24}$$

$$u(x, 1, t) = \gamma_4(x) \iint\limits_{\Omega} u(\xi, \eta, t) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \mu_4(x, t), \quad x \in \Omega, \tag{2.25}$$

čia $0 < t \leqslant T$. Atitinkamai parenkame $f(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$, $\mu_1(y, t)$, $\mu_2(y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, t)$, $\gamma_3(x)$, $\gamma_4(x)$ taip, kad (2.20)-(2.25) tikslus sprendinys būtų $u(x, y, t) = e^{2t} \sin \pi x \sin \pi y$. Apytikslio sprendinio tikslumas priklauso nuo funkcijų $\gamma_3(x)$ ir $\gamma_4(x)$ parinkimo. Sprendinio u_{ij}^{n+1} ($i = \overline{1, N-1}$) paklaidos yra pateiktos keturiose lentelėse su funkcijomis $\gamma_3(x)$, $\gamma_4(x)$, čia

$$\varepsilon_u = \max_{0 \leqslant i,j \leqslant N} |z_{ij}| = \max_{0 \leqslant i,j \leqslant N} |u(x_i, y_j, t^n) - u_{ij}^n|. \tag{2.26}$$

2.1 lentelė.

h	:	$0,1$	$0,05$	$0,025$
τ	:	$0,025$	$0,00625$	$0,0015625$
		ε_u		
$\gamma_3(x) = 0; \gamma_4(x) = 0$	:	$0,1485$	$0,0369$	$0,0092$
$\gamma_3(x) = 1; \gamma_4(x) = 1$	:	$0,1567$	$0,0391$	$0,0098$
$\gamma_3(x) = e^x; \gamma_4(x) = 0,1e^x$	:	$0,1556$	$0,0388$	$0,0097$

Skaitinio eksperimento rezultatai parodo, kad (2.1 lentelė) skirtuminė schema yra stabili, kai

$$|\gamma_3| < 1, \quad |\gamma_4| < 1. \tag{2.27}$$

2.2 lentelė

h	:	$0,1$	$0,05$	$0,025$
τ	:	$0,025$	$0,00625$	$0,0015625$
		ε_u		
$\gamma_3(x) = -2e^x; \gamma_4(x) = -10e^x$	:	$0,1408$	$0,0350$	$0,0087$
$\gamma_3(x) = -5; \gamma_4(x) = -10$	:	$0,1412$	$0,0351$	$0,0088$

Panašias išvadas padarė ir kiti autoriai, kurie nagrinėjo paprastesnes nelokaliąsias sąlygas [41, 76]. Tačiau šiame skyriuje pateikta skirtuminė schema yra stabili ir tuo atveju, kai γ_3, γ_4 netenkina (2.27) sąlygos, bet jei yra neigiamos (lentelė 2.2).

2.3 lentelė.

h	:	$0,1$	$0,05$	$0,025$
τ	:	$0,025$	$0,00625$	$0,0015625$
		ε_u		
$\gamma_3(x) = 5; \gamma_4(x) = -0,3$	:	$6,224$	$1,065$	$0,236$
$\gamma_3(x) = 2,3; \gamma_4(x) = 2,3$	:	$1,9426$	$0,3964$	$0,0940$

Šiame disertacijos slyriuje sprendimo algoritmas, sprendžiant (2.20)-(2.25) diferencialinį uždavinį buvo pritaikytas dar keliems iliustraciniams uždaviniams, kai funkcijos $f(x,y,t)$, $\varphi(x,y)$, $\mu_1(y,t)$, $\mu_2(y,t)$, $\mu_3(x,t)$, $\mu_4(x,t)$, $\gamma_3(x)$, $\gamma_4(x)$ buvo parinktos taip, kad $u_1(x,y,t) = e^{x+y+t}$ ar $u_2(x,y,t) = (x^2+y^2)t$ būtų ieškomo diferencialinio uždavinio sprendiniai. Skaičiavimų rezultatai pateikti 2.4 ir 2.5 lentelėse. Šių uždavinių sprendimo rezultatai tik patvirtina anksčiau gautų rezultatų išvadas.

2.4 lentelė. $u_1(x,y,t) = e^{x+y+t}$

h	:	$0,1$	$0,05$	$0,025$
τ	:	$0,025$	$0,00625$	$0,0015625$
		ε_u		
$\gamma_3(x) = 0; \gamma_4(x) = 0$	:	0.0025	$6.348 \cdot 10^{-4}$	$1,596 \cdot 10^{-4}$
$\gamma_3(x) = 1; \gamma_4(x) = 1$	:	0.0989	0.0059	0.0015
$\gamma_3(x) = e^x; \gamma_4(x) = 0.1e^x$	:	0.0543	0.0143	0.0015
$\gamma_3(x) = -2e^x; \gamma_4(x) = -10e^x$	:	0.0512	0.0144	0.0037
$\gamma_3(x) = -5; \gamma_4(x) = -10$	:	0.0266	0.0066	0.0021
$\gamma_3(x) = 5; \gamma_4(x) = -0.3$	:	40.6167	9.8214	2.5079
$\gamma_3(x) = 2.3; \gamma_4(x) = 2.3$	:	9.3264	2.317	0.599
$\gamma_3(x) = 5; \gamma_4(x) = 1$	:	$1.566 \cdot 10^7$	$7.378 \cdot 10^5$	$1,592 \cdot 10^5$
$\gamma_3(x) = 2e^x; \gamma_4(x) = e^x$	:	915.6730	190.8441	49.3786

2.5 lentelė. $u_2(x,y,t) = (x^2+y^2)t$

h	:	$0,1$	$0,05$	$0,025$
τ	:	$0,025$	$0,00625$	$0,0015625$
		ε_u		
$\gamma_3(x) = 0; \gamma_4(x) = 0$	:	0.0018	$4.595 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-4}$
$\gamma_3(x) = 1; \gamma_4(x) = 1$	:	0.0047	0.0012	$2.922 \cdot 10^{-4}$
$\gamma_3(x) = e^x; \gamma_4(x) = 0.1e^x$	:	0.0109	0.0029	$0.7.309 \cdot 10^{-4}$
$\gamma_3(x) = -2e^x; \gamma_4(x) = -10e^x$	:	0.0105	0.0027	$6.953 \cdot 10^{-4}$
$\gamma_3(x) = -5; \gamma_4(x) = -10$	:	0.0055	0.0013	$3.355 \cdot 10^{-4}$
$\gamma_3(x) = 5; \gamma_4(x) = -0.3$	:	0.4355	0.1375	0.0379
$\gamma_3(x) = 2.3; \gamma_4(x) = 2.3$	:	0.0381	0.0061	0.0018
$\gamma_3(x) = 5; \gamma_4(x) = 1$	:	$1.036 \cdot 10^6$	$4.485 \cdot 10^4$	$9.447 \cdot 10^3$
$\gamma_3(x) = 2e^x; \gamma_4(x) = e^x$	:	41.8093	8.6615	2.2458

2.4 Antrojo skyriaus pastabos ir išvados

- Pagal šiame skyriuje aprašytą metodą atliktas skaitinis eksperimentas su įvairiomis γ_3 ir γ_4 reikšmėmis, turint tikslą nustatyti, kaip šios reikšmės lemia skirtuminės schemos stabilumą. Straipsniuose [33, 41, 76, 79] įrodyta, kad skirtuminės schemos stabilumas priklauso nuo šios schemos matricos spektro struktūros. Paprastesnėms nelokaliosioms sąlygoms (žiūrėti [41, 76, 79]) įrodyta, kad skirtuminė schema gali būti stabili su gana didelėmis absoliučiu dydžiu neigiamomis γ_3 ar γ_4 reikšmėmis. Mūsų atveju ši savybė irgi pastebima skaitiniame eksperimente. Tikslesnės išvados apie skirtuminės schemos stabilumą gali būti gautos išnagrinėjus šios schemos matricos spektro struktūrą.

- Šis skirtuminis metodas lengvai pritaikomas išspręsti dvimatį parabolinį uždavinį, kai viso srities kontūro taškuose yra duotos nelokaliosios integralinės sąlygos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega,$$
$$u(x, y, t) = \iint\limits_{\Omega} K(x, y, \xi, \eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \mu(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

čia $0 < t \leqslant T$. Sprendžiant šį uždavinį kintamųjų krypčių metodu gaunami du vienmačai skirtuminiai uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Taigi, šiame skyriuje išanalizuotą metodą reikia pritaikyti du kartus ir išspręsti dvi tiesines lygčių sistemas.

3 Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su integraline sąlyga

3.1 Uždavinio formulavimas

Nagrinėkime sistemos

$$\frac{d^2u_i}{dy^2} + \lambda u_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{3.1}$$

su kraštinėmis sąlygomis

$$u_i(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$u_i(1) = \gamma_i h \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_0^1 u_k(y)\mathrm{d}y, \tag{3.3}$$

tikrinių reikšmių uždavinį, čia $hN = 1$. Šiame uždavinyje λ yra nežinomas parametras, o $u(x)$ yra nežinoma funkcija. Tos parametro λ reikšmės, su kuriomis egzistuoja (3.1)-(3.3) uždavinio netrivialusis sprendinys $u(x) \not\equiv 0$, vadinamos uždavinio tikrinėmis reikšmėmis, o pats netrivialusis sprendinys - tikrine funkcija. Tikrinių reikšmių visuma yra vadinama uždavinio spektru. Yra daug darbų kuriuse nagrinėjami diferencialinių operatorių su integralinėmis ar daugiataškėmis kraštinėmis sąlygomis tikrinių reikšmių uždaviniai [20, 31, 42, 71, 89, 92]. Šiame skyriuje analizuojamas tikrinių reikšmių uždavinys (3.1)-(3.3) sistemai. Šis uždavinys gali būti susijęs su dvimate paraboline lygtimi su viena integraline kraštine sąlyga, kurios sprendimas kintamųjų krypčių metodu pateiktas pirmame disertacijos skyriuje. Sprendžiant (1.1)-(1.5) uždavinį kintamųjų krypčių metodu gaunami du vienmačiai skirtuminiai uždaviniai

$$\frac{u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^{n}}{\tau} = \Lambda_1 u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{n} + \frac{1}{2} f_{ij}^{n+1}, \tag{3.4}$$

$$u_{0j}^{n+\frac{1}{2}} = \mu_{1j}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{3.5}$$

$$u_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} = \mu_{2j}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{3.6}$$

ir

$$\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau}=\Lambda_1 u_{ij}^{n}+\Lambda_2 u_{ij}^{n+1}+\frac{1}{2}f_{ij}^{n+1}, \tag{3.7}$$

$$u_{i0}^{n+1}=\mu_{3i}^{n+1}, \tag{3.8}$$

$$u_{iN}^{n+1}=\gamma_i h^2\sum_{i}\sum_{j}\rho_{ij}u_{ij}^{n+1}+\mu_{4i}^{n+1}, \tag{3.9}$$

čia $\Lambda_1=\dfrac{u_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2}$, $\Lambda_2=\dfrac{u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}}{h^2}$.

Šios (3.7)-(3.9) sistemos stabilumas priklauso nuo operatoriaus Λ_2 spektro, t.y. priklauso nuo tokio skirtuminio operatoriaus

$$\frac{u_{i,j-1}-2u_{ij}+u_{i,j+1}}{h^2}+\lambda u_{ij}=0, \qquad i,j=1,\ldots,N-1, \tag{3.10}$$

$$u_{iN}=\gamma_i h^2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}u_{ij}, \tag{3.11}$$

$$u_{i0}=0 \tag{3.12}$$

spektro struktūros.

Iš pradžių panagrinėsime diferencialinio uždavinio, kurio atitikmeniu yra (3.10)-(3.12) uždavinys, operatoriaus spektrą.

Tikrinių reikšmių uždavinius diferencialinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis analizavo D. H. Schepper, R. V. Keer, M. Sapagovas, A. Štikonas, O. Štikonienė, S. Pečiulytė, R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė, J. Gao, D. Sum, M. Zhang [19, 20, 31, 38, 48, 49, 60, 62, 66, 84, 88] ir kiti matematikai.

Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai yra išspausdinti straipsnyje [45]. R. Čiupaila, J. Jesevičiūtė [20] darbe nagrinėja tikrinių reikšmių uždavinį diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0, \quad 0<x<1, \tag{3.13}$$

$$u(0)=\gamma_1\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{3.14}$$

$$u(1)=\gamma_2\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

Šiame darbe surastos tikrinės reikšmės ir funkcijos, išanalizuota kaip uždavinio tikrinės reikšmės ir funkcijos priklauso nuo parametrų γ_1 ir γ_2.

Kiek vėliau išspausdintame darbe [60] S. Pečiulytė, A. Štikonas ir O. Štikonienė nagrinėja Šturmo ir Liuvilio uždavinį:

$$-u" = \lambda u, \quad x \in (0,1) \tag{3.16}$$

$$u(0) = 0 \tag{3.17}$$

su dviejų tipų nelokaliosiomis sąlygomis

$$u(1) = \gamma \int\limits_0^{\varepsilon} u(x)\mathrm{d}x, \tag{3.18}$$

$$u(1) = \gamma \int\limits_{\varepsilon}^{1} u(x)\mathrm{d}x. \tag{3.19}$$

Jie ištyrė tokio uždavinio realiosios spektro dalies priklausomybę nuo γ ir ε. Autoriai nustatė, kad (3.16)-(3.18) uždavinyje kai kuriems realiesiems γ gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės, o jei vietoje (3.18) yra (3.19) sąlyga, tai egzistuoja tik realiosios tikrinės reikšmės.

Šio disertacijos skyriaus pagrindinis tikslas yra išanalizuoti diferencialinio operatoriaus su integraline sąlyga spektro struktūrą.

3.2 Tikrinių reikšmių analizė

Ištirsime (3.1)-(3.3) formulėmis apibrėžto diferencialinio operatoriaus spektro struktūrą. Jei $\lambda = 0$, (3.1) lygties bendrasis sprendinys yra

$$u_i(x) = c_i x + c_2, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{3.20}$$

Šis sprendinys su (3.2) sąlyga yra

$$u_i(x) = c_i x. \tag{3.21}$$

Pareikalaukime, kad (3.21) sprendinys tenkintų nelokaliasias sąlygas (3.3). Gaunama, kad

$$c_i = \gamma_i \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_0^1 c_i x \mathrm{d}x. \tag{3.22}$$

3.1 teorema. *Uždaviniio* (3.1)-(3.3) *tikrinė reikšmė* $\lambda = 0$ *egzistuoja tada ir tik tada, kai:*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i = 2. \tag{3.24}$$

Įrodymas. Iš (3.22) sąlygos, suintegravus gauname:

$$c_i = \gamma_i \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1} c_i. \tag{3.25}$$

Taip gauname $N-1$ tiesinių lygčių

$$\begin{aligned}
&(1-\frac{\gamma_1}{2N})c_1 - \frac{\gamma_1}{2N}c_2 \ldots - \frac{\gamma_1}{2N}c_{N-1} = 0,\\
&-\frac{\gamma_2}{2N}c_1 + (1-\frac{\gamma_2}{2N})c_2 \ldots - \frac{\gamma_2}{2N}c_{N-1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&-\frac{\gamma_{N-1}}{2N}c_1 - \frac{\gamma_{N-1}}{2N}c_2 \ldots + (1-\frac{\gamma_{N-1}}{2N})c_{N-1} = 0.
\end{aligned}$$

Iš čia akivaizdu, kad egzistuoja netrivialusis (3.1) lygties (3.21) sprendinys tada ir tik tada, kai tiesinių lygčių sistemos determinantas yra lygus nuliui:

$$\begin{vmatrix}
1-\frac{\gamma_1}{2N} & -\frac{\gamma_1}{2N} & \ldots & -\frac{\gamma_1}{2N}\\
-\frac{\gamma_2}{2N} & 1-\frac{\gamma_2}{2N} & \ldots & -\frac{\gamma_2}{2N}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
-\frac{\gamma_{N-1}}{2N} & -\frac{\gamma_{N-1}}{2N} & \ldots & 1-\frac{\gamma_{N-1}}{2N}
\end{vmatrix} = 0. \tag{3.26}$$

Pasinaudosime formule:

$$\begin{vmatrix}
1+a_1 & a_1 & \ldots & a_1\\
a_2 & 1+a_2 & \ldots & a_2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_n & a_n & \ldots & 1+a_n
\end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Taigi, iš (3.26) sąlygos gauname:

$$1 - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\gamma_i}{2N} = 0. \tag{3.27}$$

Iš čia seka, kad uždavinyje (3.1)-(3.3) egzistuoja nulinė tikrinė reikšmė, tada ir tik tada, kai išpildyta 3.1 teoremos sąlyga. □

Toliau nagrinėkime, ar (3.1)-(3.3) tikrinių reikšmių uždavinys turi neigiama tikrinę reikšmę.

Jei $\lambda < 0$, tai (3.1) lygties bendrasis sprendinys yra

$$u_i(x) = c_{i1}\text{ch}\beta x + c_{i2}\text{sh}\beta x, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \tag{3.28}$$

kur $\lambda = -\beta^2$, $\beta = \sqrt{-\lambda}$. Kadangi iš kraštinės sąlygos (3.2) gaunama, kad $c_{i1} = 0$, tai

$$u_i(x) = c_{i2}\text{sh}\beta x. \tag{3.29}$$

Toliau žymėsime $c_{i2} = c_i$. Kadangi lygties (3.1) bendrasis sprendinys turi tenkinti nelokaliasias sąlygas (3.3), tai įrašę (3.29) į (3.3) sąlygas ir atlikę keletą aritmetinių veiksmų :

$$c_i\text{sh}\beta = \gamma_i \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} c_i \frac{\text{ch}\beta - 1}{\beta}. \tag{3.30}$$

Pažymėkime

$$A = \frac{\cosh(\beta) - 1}{\beta N}.$$

Iš (3.30) gauname $N-1$ tiesinių lygčių:

$$\begin{aligned}
&(\text{sh}\beta - \gamma_1 A)c_1 - \gamma_1 A c_2 \dots - \gamma_1 A c_{N-1} = 0,\\
&-\gamma_2 A c_1 + (\text{sh}\beta - \gamma_2 A)c_2 \dots - \gamma_2 A c_{N-1} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-\gamma_{N-1} A c_1 - \gamma_{N-1} A c_2 \dots + (\text{sh}\beta - \gamma_{N-1} A)c_{N-1} = 0.
\end{aligned}$$

Tam, kad egzistuotų netrivialus sprendinys $c_i \not\equiv 0$, būtina ir pakankama, kad sistemos determinantas būtų lygus nuliui

$$\begin{vmatrix}
\text{sh}\beta - \gamma_1 A & -\gamma_1 A & \dots & -\gamma_1 A\\
-\gamma_2 A & \text{sh}\beta - \gamma_2 A & \dots & -\gamma_2 A\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
-\gamma_{N-1} A & -\gamma_{N-1} A & \dots & \text{sh}\beta - \gamma_{N-1} A
\end{vmatrix} = 0.$$

Taip prilyginus tiesinės lygčių sistemos determinantą nuliui yra gaunama lygybė

$$\text{sh}^{N-1}\beta - \text{sh}^{N-2}\beta \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\gamma_i(\text{ch}\beta - 1)}{\beta N} = 0. \tag{3.31}$$

Iš šios lygties gaunamos dvi lygtys

$$\mathrm{sh}^2\beta = 0, \tag{3.32}$$

$$\mathrm{sh}\beta - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\gamma_i(\mathrm{ch}\beta - 1)}{\beta N} = 0. \tag{3.33}$$

Iš (3.32) gaunama, kad $\beta = 0$, bet pagal prielaidą turime, kad $\beta \neq 0$. Antrą lygtį (3.33) pertvarkius gaunama lygtis:

$$\frac{\beta N}{\sum\limits_{i=1}^{N-1} \gamma_i} = \mathrm{th}\frac{\beta}{2}. \tag{3.34}$$

3.2 teorema. *Uždavinys (3.1)-(3.3) turi neigiamą tikrinę reikšmę tada ir tik tada, kai*

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i > 2.$$

Įrodymas. Imamos dvi funkcijos:

$$f_1(\beta) = \frac{\beta N}{\sum\limits_{i=1}^{N-1} \gamma_i} \tag{3.35}$$

ir

$$f_2(\beta) = \mathrm{th}\frac{\beta}{2}. \tag{3.36}$$

Išnagrinėkime šių funkcijų savybes. Pirmiausia, $f_1(0) = f_2(0)$. Suraskime išvestines:

$$f_1'(\beta) = \frac{N}{\sum\limits_{i=1}^{N-1} \gamma_i} \tag{3.37}$$

ir

$$f_2'(\beta) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mathrm{ch}^2 \frac{\beta}{2}}. \tag{3.38}$$

Tuo būdu

$$f_1'(0) = \frac{N}{\sum\limits_{i=1}^{N-1} \gamma_i}, \tag{3.39}$$

$$f_2'(0) = \frac{1}{2}. \tag{3.40}$$

Taigi, jei

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i < 2, \tag{3.41}$$

abiejų funkcijų $f_1(\beta)$ ir $f_2(\beta)$ grafikai nesikerta visame intervale $\beta \in (0, \infty)$. Jeigu

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i > 2, \tag{3.42}$$

šių funkcijų grafikai susikerta vieną kartą, taigi (3.34) lygtis intervale $(0, \infty)$ turi vieną šaknį β^*. Vadinasi $\lambda = -(\beta^*)^2$. Teorema įrodyta. $\square$

Toliau nagrinėsime atvejį $\lambda > 0$. Pažymėkime

$$\alpha = \sqrt{\lambda} > 0, \quad \lambda = \alpha^2 > 0. \tag{3.43}$$

Tada (3.1) lygties bendrasis sprendinys yra:

$$u_i(x) = c_{i1}\sin\alpha x + c_{i2}\cos\alpha x, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{3.44}$$

Atsižvelgus į (3.2) kraštinę sąlygą gaunama, kad $c_{i2} = 0$. Toliau žymėsime $c_{i1} = c_i$. Taigi, bendrasis sprendinys yra:

$$u_i(x) = c_i \sin\alpha x. \tag{3.45}$$

Įrašę jį į (3.3) nelokąliasias sąlygas ir atlikę aritmetinius veiksmus, gauname

$$c_i \sin\alpha = \gamma_i \frac{1-\cos\alpha}{\alpha N}\sum_{k=1}^{N-1} c_k.$$

Analogiškai gaunama $N-1$ tiesinių lygčių:

$$\begin{aligned}
&(\sin\alpha - \gamma_1 B)c_1 - \gamma_1 B c_2 \ldots - \gamma_1 B c_{N-1} = 0,\\
&-\gamma_2 B c_1 + (\sin\alpha - \gamma_2 B)c_2 \ldots - \gamma_2 B c_{N-1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\gamma_{N-1} B c_1 - \gamma_{N-1} B c_2 \ldots + (\sin\alpha - \gamma_{N-1} B)c_{N-1} = 0,
\end{aligned}$$

čia

$$B = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha N}.$$

Ištirsime, kada sistemos determinantas lygus nuliui:

$$\begin{vmatrix}
\sin\alpha - \gamma_1 B & -\gamma_1 B & \ldots & -\gamma_1 B\\
-\gamma_2 B & \sin\alpha - \gamma_2 B & \ldots & -\gamma_2 B\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
-\gamma_{N-1} B & -\gamma_{N-1} B & \ldots & \sin\alpha - \gamma_{N-1} B
\end{vmatrix} = 0.$$

Taip gauname:

$$\sin^{N-1}\alpha - sin^{N-2}\alpha \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\gamma_i(1-\cos\alpha)}{N\alpha} = 0. \tag{3.46}$$

Iš (3.46) gaunamos dvi lygtys:

$$\sin^{N-2}\alpha = 0, \tag{3.47}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{N} \sum i = 1N - 1\gamma_i \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}. \tag{3.48}$$

3.3 teorema. *Su visomis* γ_i *reikšmėmis* (3.1)-(3.3) *uždavinys turi kartotinių tikrinių reikšmių, kurios nepriklauso nuo* γ_i *ir be galo daug teigiamų tikrinių reikšmių, priklausančių nuo* γ_i *.*

Įrodymas. Lygties (3.47) šaknys

$$\alpha_k = \pi k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.49}$$

nepriklauso nuo γ_i reikšmių, šių šaknų kartotinumas yra $N-2$.

Lieka rasti (3.48) lygties šaknis. Užrašykime šią lygtį kitu pavidalu:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha},$$

iš čia

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0, \tag{3.50}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\alpha} \tag{3.51}$$

arba

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N-1}\gamma_i}. \tag{3.52}$$

Lygties (3.50) šaknys nepriklauso nuo γ_i. Pažymėkime funkcijas:

$$f_1(\alpha) = \frac{\alpha}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i},$$
$$f_2(\alpha) = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Aišku, kad šių funkcijų grafikai kertasi be galo daug kartų intervale $\alpha \in (0, \infty)$. Pagal (3.43), $\lambda = \alpha^2$, taigi, teorema įrodyta.

4 Skirtuminių schemų stabilumas dvimatei parabolinei lygčiai su integralinėmis sąlygomis

4.1 Tikrinių reikšmių uždavinys skirtuminiam operatoriui

Skirtuminio operatoriaus tikrinės reikšmės yra labai svarbios analizuojant skirtuminių lygčių sistemos vienintelio sprendinio egzistavimą, skirtuminių schemų stabilumą ir skirtuminių lygčių sistemų iteracinių metodų konvergavimą. Skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis tikrinių reikšmių uždavinį nagrinėjo daug autorių [1, 8, 33, 34, 35, 41, 42, 48, 49, 74, 76, 79, 83, 84].

Šiame disertacijos skyriuje nagrinėjamas vienmačių skirtuminių lygčių sistemos su nelokaliąja integraline sąlyga tikrinių reikšmių uždavinys.

Ž. Jesevičiūtė savo darbuose analizuoja kiek paprastesnį uždavinį su dviem nelokaliosiomis sąlygomis:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = \gamma_0 \int\limits_0^1 u(x)dx, \quad u(1) = \gamma_1 \int\limits_0^1 u(x)\mathrm{d}x.$$

Autorė ištyrė šio uždavinio spektro struktūrą ir parametrų iš nelokaliųjų sąlygų įtaką spektro struktūros pokyčiams. Ji padarė išvadą apie kompleksinių tikrinių reikšmių nebuvimą, t.y. nustatė, kad šiame uždavinyje egzistuoja tik realiosios tikrinės reikšmės.

Šiame disertacijos skyriuje nagrinėjama lokaliai vienmatė skirtuminė schema, gauta sprendžiant parabolinį uždavinį su nelokaliosiomis sąlygomis:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,t), \quad (x,y) \in \Omega = \{0 < x, y < 1\}, \tag{4.1}$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u(1,y,t) = \mu_2(y,t), \quad u(x,0,t) = \mu_3(x,t), \tag{4.2}$$

$$u(x,1,t) = \gamma_(x) \iint\limits_\Omega u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mu_4(x,t), \tag{4.3}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y). \tag{4.4}$$

Šis uždavinys yra bendresnio uždavinio [54] atskirasis atvejis

$$u_t - \triangle u = 0 \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{4.5}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{4.6}$$

$$u(x,y,t) = \int\limits_{\Omega} K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (x,y) \in \partial\Omega \times [0,T), \tag{4.7}$$

čia $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Šiame darbe buvo įrodyta, kad pusiau neišreikštinė ir visiškai neišreikštinė Eulerio schemos yra stabilios, jei branduolys $K(x,y,\xi,\eta)$ tenkina nelygybę:

$$\int\limits_{\Omega} |K(x,y,\xi,\eta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \leqslant \rho < 1, \quad (x,y) \in \partial\Omega. \tag{4.8}$$

Skaitiniai metodai dvimatei ar trimatei parabolinėms lygtims su skirtingo tipo nelokaliosiomis sąlygomis buvo nagrinėti daugelyje darbų. Straipsnyje [11]buvo sprendžiamas toks uždavinys

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{4.9}$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad 0 \leqslant x,y \leqslant 1, \tag{4.10}$$

$$u(0,y,t) = g_0(y,t), \quad u(1,y,t) = g_1(y,t), \quad u(x,1,t) = h_1(x,t), \tag{4.11}$$

$$u(x,0,t) = h_0(x)\mu(t), \tag{4.12}$$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = m(t) \tag{4.13}$$

baigtinių skirtumų metodu, kuriame $u(x,y,t)$, $\mu(t)$ yra nežinomos funkcijos. Vėliau skirtuminiai metodai tokio tipo uždaviniams buvo analizuoti daugelyje darbų. Detaliai tokie uždaviniai buvo sprendžiami darbuose [13, 27] naudojant lokaliai vienmates skirtumines schemas.

Straipsniuose [33, 41, 79] baigtinių skirtumų metodas taikytas dvimatėms parabolinėms lygtims su kitokio tipo nelokaliąja sąlyga.

N-matės parabolinės lygtys su (4.7) arba bendresne nelokaliąja sąlyga buvo nagrinėjamos darbuose [54, 99], kuriuose įrodyta sprendinio egzistavimas ir vienatis.

Diferencialinių ar skirtuminių operatorių su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis tikrinių reikšmių uždavinys per du dešimtmečius plačiai nagrinėjamas ir kaip atskira nelokaliųjų uždavinių problema [2, 31, 83, 84, 92].

Nagrinėjant skirtumines schemas elipsinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis irgi gali būti prasminga tirti atitinkamų matricų spektro struktūrą [75, 85, 87, 88]. Be to, reikia pastebėti, kad deferencialinių ar skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis tikrinių reikšmių uždavinys yra bendrosios nesavijungių operatorių teorijos dalis [1].

Šio disertacijos skyriaus pagrindinis tikslas - lokaliai vienmačių skirtuminių schemų dvimatei parabolinei lygčiai su (4.3) sąlyga, tyrimas. Peaceman ir Rachford kintamųjų krypčių metodas šiam uždaviniui buvo aprašytas [81] darbe.

Atkreipiame dėmesį, kad sprendžiant dvimatę parabolinę lygtį tiek Peaceman ir Rachord kintamųjų krypčių metodu, tiek naudojant lokaliai vienmates skirtumines schemas, tenka spręsti iš esmės tokius pat vienmačius uždavinius. Ir šios disertacijos pirmajame ir antrajame skyriuose aprašyti algoritmai vienodai tinka abiems paminėtiems metodams. Nemažinant bendrumo šiame skyriuje tikrinių reikšmių uždavinys skirtuminių lygčių sistemai dėl paprastumo susiejamas ne su kintamųjų krypčių metodu, o su lokaliai vienmate skirtumine schema.

Įrodoma, kad skirtuminės schemos stabilumas priklauso nuo funkcijos $\gamma(x)$ integralinės charakteristikos (žr. (4.3) formulę).

4.2 Lokaliai vienmačio metodo formulavimas

Pagal lokaliai vienmačio metodo apibrėžimą (pvz. [13, 27, 67]), užrašykime (4.1)-(4.4) diferencialiniam uždaviniui tokią skirtuminę schemą:

$$\frac{u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^{n}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} f_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \quad i, j = \overline{1, N-1}, \tag{4.14}$$

$$u_{0j}^{n+\frac{1}{2}} = \mu_{1j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad u_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} = \mu_{2j}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{4.15}$$

ir

$$\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}}=\Lambda_2 u_{ij}^{n+1}+\frac{1}{2}f_{ij}^{n+1},\quad i,j=\overline{1,N-1},\tag{4.16}$$

$$u_{i0}^{n+1}=\mu_{3i}^{n+1},\tag{4.17}$$

$$u_{iN}^{n+1}=\gamma_i h^2\sum_{k=1}^{N-1}(\frac{u_{kN}^{n+1}}{2}+\sum_{j=1}^{N-1}u_{kj}^{n+1})+g_{iN}^{n+1}+\mu_{4i}^{n+1},\tag{4.18}$$

čia

$$\Lambda_1 u_{ij}=\frac{u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2},\quad \Lambda_2 u_{ij}=\frac{u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}}{h^2}.$$

(4.18) formulė yra gauta iš trapecijų formulės dvilypiam integralui, o g_{iN}^{n+1} yra tam tikrų reikšmių μ_{1j}, μ_{2j}, μ_{3i} išraiška, $h=1/N$.

Kad realizuotume šią schemą, tiksliau, kad žinant u_{ij}^n būtų galima surasti u_{ij}^{n+1}, reikia atlikti du pusžingsnius - pirmajį pagal formules (4.14), (4.15) ir antrajį - pagal lygtis (4.16)-(4.18).

Realizuojant pirmąjį pusžingsnį, esant pirmojo tipo kraštinėms sąlygoms kiekvienoje eilutėje ($j=1,2\ldots,N-1$) tenka spręsti lygčių sistemą su tridiagonaline matrica, . Algoritmas stabilus C normoje.

Realizuojant antrajį pusžingsnį, kiekviename stulpelyje ($i=1,\ldots,N-1$) reikia spręsti lygčių sistemą su tridiagonaline matrica. Tačiau dabar viena kraštinė sąlyga yra pirmojo tipo, o antroji kraštinė sąlyga yra nelokalioji sąlyga (4.18), siejanti ieškomo sprendinio reikšmes visuose stulpeliuose, t.y. su visomis i, j reikšmėmis. Tokių sistemų sprendimo algoritmas detaliai aprašytas pirmame disertacijos skyriuje, čia nagrinėjamas šio pusžingsnio stabilumo klausimas. Tuo tikslu užrašomas (4.16) - (4.18) uždavinys standartiniu vektoriniu pavidalu.

Interpretuokime (4.18) sąlygas ($i=1,\ldots,N-1$) kaip ($N-1$)-osios eilės lygčių sistemą su nežinomaisiais u_{iN}^{n+1}, $i=1,2,\ldots,N-1$:

$$u_{iN}^{n+1}-\frac{\gamma_i h^2}{2}\sum_{k=1}^{N-1}u_{kN}^{n+1}=\gamma_i h^2\sum_{k,j=1}^{N-1}u_{kj}^{n+1}+\overline{\mu}_{iN}^{n+1}.\tag{4.19}$$

Kai h - pakankamai mažas skaičius, šios sistemos matrica yra diagonaliai vyraujanti. Todėl ši sistema gali būti vienareikšmiškai išspręsta. Užrašykime jos sprendinį pavidalu

$$u_{iN}^{n+1} = \gamma_i h^2 \sum_{k,j=1}^{N-1} \alpha_{kj} u_{kj}^{n+1} + \beta_i^{n+1}, \quad i = \overline{1, N-1}. \tag{4.20}$$

Čia koeficientai α_{kj}, β_i^{n+1} yra vienareikšmiškai surandami. Įrašę u_{iN}^{n+1}, $i = 1, \ldots, N-1$ išraiškas į (4.16) lygtis, kai $j = N-1$, (4.16)-(4.18) lygčių sistemą galime užrašyti taip:

$$\frac{u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^n}{\tau/2} = \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2} f_{ij}^{n+1}, \quad j = \overline{1, N-2} \tag{4.21}$$

$$\frac{u_{i,N-1}^{n+1} - u_{i,N-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \frac{u_{i,N-2}^{n+1} - 2u_{i,N-1}^{N+1} + \gamma_i h^2 \sum\limits_{k,j=1}^{n+1} \alpha_{kj} u_{kj}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2} f_{i,N-1}^{n+1}, \tag{4.22}$$

$i = 1, 2, \ldots, N-1$ su kraštinėmis sąlygomis (4.17).

Apibrėžiami vektoriai u_i^n ir u^n:

$$u_i^n = (u_{i1}^n, u_{i2}^n, \ldots, u_{iN-1}),$$
$$u^n = (u_1^n, u_2^n, \ldots, u_{N-1}^n)^T.$$

Tuomet sistemą(4.21), (4.22), (4.17) galima užrašyti vektoriniu pavidalu

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = -Au^{n+1} + \overline{f}^{n+1}, \tag{4.23}$$

čia A yra $(N-1)^2$ eilės matrica, apibrėžta iš (4.21), (4.22) sistemos dešiniųjų pusių išraiškomis. Dabar (4.23) sistemą galima užrašyti tokiu pavidalu

$$u^{n+1} = Su^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} S\overline{f}^{n+1}, \tag{4.24}$$

kurioje

$$S = \left(E + \frac{\tau}{2} A\right)^{-1}. \tag{4.25}$$

Lokaliai vienmačio metodo antrojo pusžingsnio stabilumui tirti naudojama matricos S spektro struktūra. Tuo tikslu išnagrinėsime matricos A spektrą.

4.1 lema. *Matricos A tikrinių reikšmių uždavinys*

$$Au = \lambda u \tag{4.26}$$

yra ekvivalentus šiam skirtuminiam tikrinių reikšmių uždaviniui:

$$\Lambda_2 u_{ij} + \lambda u_{ij} = 0, \quad i,j = 1,2,\ldots,N-1, \tag{4.27}$$

$$u_{i0} = 0, \tag{4.28}$$

$$u_{iN} = \gamma_i h^2 \sum_{k=1}^{N-1} (\frac{u_{kN}}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} u_{kj}). \tag{4.29}$$

Įrodymas. (4.27)-(4.29) sistema, tokiu pat būdu kaip (4.16)-(4.18) sistema buvo pertvarkyta į (4.23) sistemą, lygiai taip pat pertvarkoma. Tuo tikslu, iš (4.29) išreiškiame:

$$u_{iN} = \gamma_i h^2 \sum_{k,j=1}^{N-1} \alpha_{kj} u_{kj}, \quad i,j = 1,2,\ldots,N-1. \tag{4.30}$$

Po to įrašome (4.30) į (4.27) lygtį, kai $j = N-1$. Apibrėžus vektorius

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})^T,$$

$$u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{i,N-1}),$$

iš (4.30) gaunama (4.26). Atgalinė eiga, t.y. (4.26) išraiškos pertvarkymas į (4.27)-(4.29), yra akivaizdi. Lema įrodyta $\square$.

4.3 Matricos A spektro analizė

Siekiant ištirti matricos S spektrą, pagal formulę (4.25) ir lemą 4.1, randamos uždavinio (4.27)-(4.29) tikrinės reikšmės.

Pažymime:

$$\overline{\gamma} = h \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i. \tag{4.31}$$

Kad įrodytume žemiau nurodytas teoremas, pasinaudosime elementaria formule, įrodoma naudojantis matematine indukcija:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \ldots & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_n & \ldots & 1+a_n \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{4.32}$$

4.1 teorema. *Skaičius $\lambda = 0$ yra matricos A tikrinė reikšmė, tada ir tik tada, kai*

$$\overline{\gamma} = 2. \tag{4.33}$$

Įrodymas. Kai $\lambda = 0$, bendrasis (4.27) sistemos sprendinys yra

$$u_i = \{u_{ij}\} = \{c_i jh + \bar{c}_i\} \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Atsižvelgiant į (4.28) sąlygą, gauname, kad

$$u_{ij} = c_i jh, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{4.34}$$

Vektorius $u = \{u_{ij}\}$ bus tikrinis vektorius, jei mažiausiai vienas koeficientas c_i, $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ nebus lygus nuliui. Įrašant (4.34) išraiškas į (4.29) sąlygą, gaunama tiesinių lygčių, priklausančių nuo nežinomųjų c_i, sistema, $i = 1, 2, \ldots, N-1$:

$$c_i = \frac{\gamma_i h}{2} \sum_{k=1}^{N-1} c_k. \tag{4.35}$$

Siekiant užtikrinti, kad ši sistema turėtų nenulinį sprendinį, būtina ir pakankama sąlyga yra

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\gamma_1 h}{2} & -\dfrac{\gamma_1 h}{2} & \ldots & -\dfrac{\gamma_1 h}{2} \\ -\dfrac{\gamma_2 h}{2} & 1 - \dfrac{\gamma_2 h}{2} & \ldots & -\dfrac{\gamma_2 h}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{\gamma_{N-1} h}{2} & -\dfrac{\gamma_{N-1} h}{2} & \ldots & 1 - \dfrac{\gamma_{N-1} h}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Pagal formulę (4.32) gauname, kad

$$1 - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i = 0,$$

iš kur seka (4.33) sąlyga. □

4.2 teorema. *Matrica A turi vieną neigiamą tikrinę reikšmę, kai $\bar{\gamma} > 2$ ir $h < 2/\bar{\gamma}$. Ji yra lygi:*

$$\lambda = -\frac{4}{h^2} \mathrm{sh}^2 \frac{\beta h}{2}, \quad \beta > 0, \tag{4.36}$$

čia β yra lygties

$$\mathrm{th} \frac{\beta}{2} = \frac{2}{\bar{\gamma} h} \mathrm{th} \frac{\beta h}{2} \tag{4.37}$$

vienintelė teigiama šaknis.

Įrodymas. Pažymėkime:

$$1-\frac{\lambda h^2}{2}=\mathrm{ch}\beta h, \quad \beta>0. \tag{4.38}$$

Bendrasis (4.27) sistemos sprendinys su $\lambda<0$ yra

$$u_i=\{u_{ij}\}=\{c_i\mathrm{sh}\beta hj+\bar{c}_i\mathrm{ch}\beta hj\}. \quad i=1,2\ldots,N-1.$$

Atsižvelgiant į (4.28) sąlygą gauname, kad $\bar{c}_i=0$, t.y.

$$u_{ij}=c_i\mathrm{sh}\beta hj, \quad i,j=1,\ldots,N-1. \tag{4.39}$$

Įrašę šią u_{ij} išraišką į nelokaliąją sąlygą (4.29), po elementarių pertvarkymų gauname:

$$c_i\mathrm{sh}\beta=\gamma_i h^2\sum_{k=1}^{N-1}c_k\frac{\mathrm{sh}^2\dfrac{\beta}{2}}{\mathrm{th}\dfrac{\beta h}{2}}, \quad i=1,2,\ldots,N-1. \tag{4.40}$$

Šios sistemos determinantą prilyginus nuliui ir panaudojus (4.32) formulę, turime

$$D=(\mathrm{sh}\beta-\bar{\gamma}h\frac{\mathrm{sh}^2\dfrac{\beta}{2}}{\mathrm{th}\dfrac{\beta h}{2}})\mathrm{sh}^{N-2}\beta=0. \tag{4.41}$$

Kadangi $\beta>0$, iš (4.41) formulės seka:

$$\mathrm{sh}\beta-\bar{\gamma}h\frac{\mathrm{sh}^2\dfrac{\beta}{2}}{\mathrm{th}\dfrac{\beta}{2}h}=0. \tag{4.42}$$

Iš čia ir gauname (4.37) lygtį.

Dabar mes ieškome (4.37) lygties šaknų $\beta\in(0,\infty)$. Pažymėkime

$$f_1(\beta)=\mathrm{th}\frac{\beta}{2}, \quad f_2(\beta)=\frac{2}{h\bar{\gamma}_i}\mathrm{th}\frac{\beta}{2}h. \tag{4.43}$$

Abi šios funkcijos yra monotoniškai didėjančios intervale $(0,\infty)$: funkcija $f_1(\beta)$ kinta nuo 0 iki 1, o funkcija $f_2(\beta)$ - nuo 0 iki $2/h\bar{\gamma}$.

Taigi, jei $\bar{\gamma}<2$, $f_1(\beta)<f_2(\beta)$ visame intervale $(0,\infty)$, t.y. šiuo atveju (4.37) lygtis neturi intervale $(0,\infty)$ šaknų, nepriklausomai nuo h reikšmės. Analogiškai, jei $h>2/\bar{\gamma}$, tada $f_1(\beta)>f_2(\beta)$ visame intervale $(0,\infty)$.

Tuo atveju, kada $\bar{\gamma} > 2$ ir $h < \frac{2}{\bar{\gamma}}$, nelygybė $f_1(\beta) > f_2(\beta)$ yra teisinga su pakankamai mažu skaičiumi β ir nelygybė $f_1(\beta) < f_2(\beta)$ - teisinga su pakankamai dideliu teigiamu skaičiumi β. Šiuo atveju dviejų hiperbolinių tangentų funkcijų $f_1(\beta)$ ir $f_2(\beta)$ grafikai susikerta intervale $(0, \infty)$. Vadinasi egzistuoja tik viena tikrinė reikšmė, apibrėžta pagal (4.36) formulę, kuri gaunama iš (4.38) formulės. $\square$

4.3 teorema. *Jeigu $\bar{\gamma} < 2$, tada visos matricos A tikrinės reikšmės yra realiosios ir teigiamos; dalis tikrinių reikšmių priklauso nuo $\bar{\gamma}$, kita dalis nepriklauso nuo $\bar{\gamma}$.*

Įrodymas. 4.3 teorema yra įrodoma analogiškai kaip ir 4.2 teorema. Jei $\lambda > 0$,tada $1 - \frac{\lambda h^2}{2} < 1$. Pirmiausia, ieškome tikrinių reikšmių $\lambda > 0$, su kuriomis yra teisinga nelygybė $|1 - \frac{\lambda h^2}{2}| < 1$ t.y. $0 < \lambda < \frac{4}{h^2}$.

Įvedamas pažymėjimas

$$1 - \frac{\lambda h^2}{2} = \cos \alpha h, \tag{4.44}$$

iš kur seka, kad

$$\lambda = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha h}{2}. \tag{4.45}$$

Įrašius (4.44) į (4.27) lygtis, galima užrašyti bendrąjį sprendinį (4.27) sistemoms sekančiai:

$$u_i = \{u_{ij}\} = \{c_i \sin \alpha h j + \bar{c}_i \cos \alpha h j\}.$$

Atsižvelgiant į (4.28), $\bar{c}_i = 0$, t.y.

$$u_{ij} = c_i \sin \alpha h j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{4.46}$$

Įrašius u_{ij} į (4.29) nelokaliąsias sąlygas ir prilyginus sistemos determinantą nuliui, panašiai kaip 4.2 teoremos įrodyme, gaunama, kad

$$D = \left(\sin \alpha - \bar{\gamma} h \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg} \frac{\alpha h}{2}} \right) \sin^{N-2} \alpha = 0. \tag{4.47}$$

Ši lygtis yra ekvivalenti dviem atskiroms lygtims:

$$\sin^{N-2} \alpha = 0, \tag{4.48}$$

$$\sin \alpha - \bar{\gamma} h \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg} \frac{\alpha h}{2}} = 0. \tag{4.49}$$

Iš lygties (4.48) gauname, kad skaičiai

$$\alpha_k = \pi k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{4.50}$$

yra $N-2$ kartų kartotinės (4.47) lygties šaknys. Perrašome (4.40) lygtį taip:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\bar{\gamma}h}{2}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha h}{2}}\right) = 0. \tag{4.51}$$

Iš čia gauname

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0, \tag{4.52}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\bar{\gamma}h}\tan\frac{\alpha h}{2}. \tag{4.53}$$

(4.52) lygties šaknys yra

$$\alpha_k = 2\pi k, \quad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right], \tag{4.54}$$

čia

$$\left[\frac{N-1}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{N-1}{2}, & \text{jei } N \text{ nelyginis}, \\ \dfrac{N}{2} - 1, & \text{jei } N \text{ lyginis}. \end{cases}$$

Tam, kad rastume (4.53) lygties šaknis, įvedamas pažymėjimas

$$f_1(\alpha) = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad f_2(\alpha) = \frac{2}{h\bar{\gamma}}\mathrm{tg}\frac{\alpha h}{2}.$$

Abi šios funkcijos yra periodinės su periodu $N\pi$.

Jeigu $0 < \bar{\gamma} < 2$, tada $f_2(\alpha) > 0$ intervale $(0, N\pi)$. Funkcijų $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ grafikai susikerta kiekviename intervale $((2k-2)\pi, (2k-1)\pi)$, čia $k = 1, 2, \ldots, N_1$,

$$N_1 = \begin{cases} \dfrac{N}{2}, & \text{jei } N \text{ lyginis}, \\ \dfrac{N-1}{2}, & \text{jei } N \text{ nelyginis}. \end{cases}$$

Jeigu $\bar{\gamma} < 0$, tada $f_2(\alpha) < 0$ intervale $(0, N\pi)$. Šiuo atveju funkcijų $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ grafikai susikerta vieną kartą kiekviename intervale $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $k = 1, 2, \ldots, N_1$.

Jeigu $\bar{\gamma} = 0$, tada (4.53) lygties šaknys yra $\alpha_k = (2k-1)\pi$, $k = 1, 2, \ldots, N_1$. Taigi, visais šiais atvejais ($\bar{\gamma} < 0$, $\bar{\gamma} = 0$ ir $0 < \bar{\gamma} < 2$) skirtingų šaknų skaičius lygtims (4.52) ir (4.53) yra $N-1$.

Todėl, atsižvelgiant į šaknų kartotinumą, randame $(N-1)^2$ (4.47) lygties šaknis. Matricos A tikrinės reikšmės randamos pagal (4.45) formulę.

Tarp turimų $(N-1)^2$ tikrinių reikšmių N_1 tikrinių reikšmių priklauso nuo $\bar{\gamma}$, o likusi dalis nepriklauso.

Pastaba. 4.3 teoremos įrodyme nustatyta, kad tikrinės reikšmės λ tenkina sąlygą $|1-\frac{\lambda h^2}{2}|<1$, t.y. tikrinės reikšmės, kurioms nelygybė $\lambda < \frac{4}{h^2}$ yra teisinga. Šiuo atveju nėra jokių kitų tikrinių reikšmių. Tačiau, jei atsisakoma sąlygos $\bar{\gamma} < 2$, tada, esant kai kurioms prielaidoms gali egzistuoti teigiama tikrinė reikšmė, kuri tenkina sąlygą $\lambda \geqslant \frac{4}{h^2}$ (žr. pvz. [74]).

4.4 Skirtuminės schemos stabilumas

Norėdami padarytume išvadą apie antro pusžingsnio, (4.16)-(4.18) skirtuminiam uždaviniui stabilumą , grįžtame prie (4.24) nagrinėjamos schemos formulės. Nagrinėjant skirtuminės schemos parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis stabilumą, nesimetrinės matricos S ir vektoriaus u normos yra apibrėžiamos specifinėje energetinėje normoje [33, 34, 41, 74, 76], pavyzdžiui:

$$\|u\|_* = \|P^{-1}u\|_2 = (P^{-1}u, P^{-1}u)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.53}$$

čia P yra matrica, kurios stulpeliai yra matricos A tikriniai vektoriai (arba tikriniai ir prijungtiniai vektoriai). Bet kurios nesimetrinės matricos B norma, suderinama su šio vektoriaus norma, apibrėžiama:

$$\|B\|_* = \|P^{-1}BP\|_2 = \rho(P^{-1}BP(P^{-1}BP)^*)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.54}$$

Taip apibrėžus bet kurios nesimetrinės matricos normą, galima gauti paprastą išraišką matricų A ir S normoms apskaičiuoti:

$$\|A\|_* = \rho(A), \quad \|S\|_* = \rho(S), \tag{4.55}$$

čia $\rho(A)$ yra matricos A spektrinis spindulys.

Iš (4.55) apibrėžimo, atsižvelgus į (4.25) formulę, gauname vieną gana svarbią paprastą išvadą, jei egzistuoja neigiama matricos A tikrinė reikšmė(tiksliau, jei tikrinės reikšmės realioji dalis yra neigiama), tada $\rho(S) > 1$, ir tiek $\|S\|_*$, tiek bet kuri matricos S norma $\|S\|$ yra didesnė už vienetą. Tam, kad visiškai ištirtume (4.14)-(4.18) skirtuminės schemos stabilumą, reikėtų įrodyti $\|u\|_*$ normos ekvivalentiškumą kitoms įprastoms vektorių normoms (su konstantomis nepriklausančiomis nuo h ir τ). Kai kuriems uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis tai jau buvo atlikta (žr. [34]).

Turint (4.55) formulę, yra labai paprasta nustatyti (4.16)-(4.18) skirtuminės schemos stabilumą per matricos A spektrą.

4.4 teorema. *Jei visos matricos A tikrinės reikšmės yra teigiamos, tada $\|S\|_* < 1$, t.y.* (4.16)-(4.18) *skirtuminė schema yra stabili normoje $\|u\|_*$ pagal pradinę sąlygą.*

Išvada. Jeigu $\bar{\gamma} < 2$, tai (4.16)-(4.18) skirtuminė schema yra stabili.

4.5 Skaitiniai rezultatai

Iliustruojant teorinius rezultatus, buvo sprendžiamas pavyzdys, kuris atitinka (4.1)-(4.4) uždavinį su skirtingomis $\gamma(x)$ išraiškomis. Funkcijos f, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 ir φ buvo parinktos taip, kad tikslus (4.1)-(4.4) uždavinio sprendinys būtų:

$$u(x, y, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^t.$$

Svarbiausia išvada, gauta šio disertacijos skyriaus 4.3 ir 4.4 poskyriuose, yra ta, kad skirtuminės schemos stabilumas priklauso ne nuo $|\gamma(x)|$, bet, nuo funkcijos $\gamma(x)$ tam tikru būdu apibrėžtos vidutinės reikšmės.

Taigi, skaitinio eksperimento tikslas pademonstruoti dydžio $\bar{\gamma} = h \sum\limits_{i=1}^{N-1} \gamma_i$ ryšį su skirtuminės schemos stabilumu. Kadangi

$$\gamma^o = \int\limits_0^1 \gamma(x) dx \approx \bar{\gamma} \tag{4.56}$$

su tikslumu $O(h)$, skaitiniame eksperimente buvo imamos ne $\bar{\gamma}$, o γ^o reikšmės. 5.1 lentelėje pateikamos paklaidų reikšmės:

$$\varepsilon_u = \max_{0 \leqslant i,j \leqslant N} |u(x_i, y_j, t^n) - u_{ij}^n|,$$

čia $u(x_i, y_j, t^n)$ yra tikslus diferencialinio uždavinio sprendinys ir u^n_{ij} yra skirtuminio uždavinio sprendinys. Lentelė 4.2 yra sudaryta taip pat, tik ε_u yra:

$$\varepsilon_u = \max_{0\leqslant i,j\leqslant N} \frac{|u(x_i, y_j, t^n) - u^n_{ij}|}{|u(x_i, y_j, t^n)|}.$$

Skaitinis eksperimentas iliustruoja sąlygos $\bar{\gamma} < 2$ efektyvumą net ir tuo atveju, kai maksimali $\gamma(x)$ reikšmė yra gana didelis teigiamas skaičius.

4.1 lentelė. $T = 1$, $\gamma(x) = a(x^2 - 0.64)$

h		:	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
τ		:	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$a = 100$,	$\gamma^o = -30.67$	:	2.2486	0.1323	0.0223
$a = 10$,	$\gamma^o = -3.07$	:	0.0973	0.0243	0.0061
$a = -7$,	$\gamma^o = 2.15$	:	0.1257	0.031	0.0076
$a = -13$,	$\gamma^o = 3.99$	:	114.311	11.6139	1.0428
$a = -15$,	$\gamma^o = 4.60$	:	$1.1434 \cdot 10^5$	$6.7878 \cdot 10^3$	289.5918
$a = -50$,	$\gamma^o = 15.33$	:	$1.590 \cdot 10^{15}$	$1.5141 \cdot 10^{13}$	$7.0116 \cdot 10^{16}$

4.2 lentelė. $\gamma(x) = a(x^2 - 0.64)$

T		:	2	5	10
h		:	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
τ		:	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{400}$
$a = -7$,	$\gamma^o = 2.15$	:	0.1514	0.1514	0.1514
$a = -13$,	$\gamma^o = 3.99$	:	$1.0146 \cdot 10^3$	$3.3978 \cdot 10^7$	$1.1811 \cdot 10^{15}$
$a = -30$,	$\gamma^o = 9.20$	:	$3.7476 \cdot 10^{85}$	$1.0677 \cdot 10^{214}$	$1.3396 \cdot 10^{302}$
$a = 100$,	$\gamma^o = -30.67$	:	1.4232	1.4232	1.4232
$a = 2$,	$\gamma^o = -0.61$	:	0.0331	0.0331	0.0331
$a = 1$,	$\gamma^o = -0.31$	:	0.0172	0.0172	0.0172
$a = 0$,	$\gamma^o = 0$	:	0.0031	0.0031	0.0031

Norima atkreipti dėmesį į kai kuriuos faktus, kuriuos galima matyti iš skaitinio eksperimento rezultatų. Kada $T = 1$, skaičiavimai pagal nestabilią skirtuminę schemą dažnai atrodo pakankamai patikimi, kaip ir skaičiavimai pagal stabilią skirtuminę schemą. Mažinant h ir τ, paklaida mažėja (4.1 lentelė, kai $a = -13$, $a = -15$). Ir tik padidinus T, nestabilios skirtuminės schemos trūkumai darosi akivaizdesni (4.2 lentelė, kai $a = -13$, $a = -30$). Tiksliau, kai matrica A turi neigiamą tikrinę reikšmę, skirtuminė schema nėra tolygiai stabili T atžvilgiu. Šis faktas buvo gerai aprašytas [54] darbe. Tai yra svarbus skirtuminių schemų parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis bruožas.

4.6 Ketvirtojo skyriaus pastabos ir išvados

- Palyginkime (4.16)-(4.18) skirtuminės schemos stabilumo sąlygas su skirtuminės schemos stabilumo sąlygomis vienmačam uždaviniui:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \tag{4.57}$$

$$u(0,t) = \gamma_1 \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_1(t), \tag{4.58}$$

$$u(1,t) = \gamma_2 \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_2(t), \tag{4.59}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{4.60}$$

  Stabilumo sąlyga neišreikštinei schemai, užrašytai (4.57)-(4.59), uždaviniui yra [73, 76]:

$$\gamma_1 + \gamma_2 < 2, \tag{4.61}$$

  kuri yra analogiška stabilumo sąlygai

$$\bar{\gamma} = h \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i < 2,$$

  gautai šiame disertacijos skyriuje.

  Abiem atvejais, tiek vienmačiam uždaviniui (4.57)-(4.60), tiek skirtuminei schemai (4.16)-(4.18) yra teisingas teiginys: jei h nėra pakankamai mažas skaičius ($h > 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ arba $h > 2/\bar{\gamma}$), skirtuminis operatorius neturi neigiamų tikrinių reikšmių.

- Iš stabilumo sąlygos (4.61) vienmačiu atveju seka dar viena svarbi išvada: stabilumas priklauso ne nuo parametrų nelokaliosiose sąlygose γ_1, γ_2 atskirai, bet nuo jų sumos. Ši išvada padaryta tik analizuojant skirtuminio operatoriaus spektro struktūrą, ji neseka iš kitų stabilumo tyrimo metodų. Analogiška situacija (sudėtingesnė) pastebėta vienmačiu atveju taip pat ir atvejais, kai vietoje (4.58), (4.59) integralinių sąlygų, imamos bendresnio pobūdžio sąlygos:

$$u(0,t)=\int\limits_0^1 \alpha(x)u(x,t)\mathrm{d}x+\mu_1(t), \tag{4.62}$$

$$u(1,t)=\int\limits_0^1 \beta(x)u(x,t)\mathrm{d}x+\mu_2(t). \tag{4.63}$$

Šiuo atveju skirtuminės schemos stabilumas taip pat priklauso ne nuo kiekvienos funkcijos $\alpha(x)$, $\beta(x)$ atskirai, bet nuo tam tikros (labiau sudėtingos) jų tarpusavio priklausomybės [76, 85] . Ši priklausomybė, kaip ir atveju, kai $\gamma_1 = const$, $\gamma_2 = const$, taip pat gali būti padaryta tokia kokybine išvada: nestabilumas, galintis atsirasti dėl vieno "blogo" parametro γ_1 (ar funkcijos $\alpha(x)$) gali būti kompensuotas kitu "geru" parametru (ar funkcija $\beta(x)$). Taigi, natūraliai kyla klausimas apie tokios kompensacijos egzistavimą dvimačiu atveju, kai nagrinėjamos sąlygos (4.3) ar (4.7). Pirmi pastebėjimai, atliekant skaitinį eksperimentą leidžia tikėtis, kad čia egzistuoja tokio tipo kompensavimo mechanizmas.

5 Dvimatės elipsinės lygties su nelokaliąja sąlyga sprendimas

5.1 Dvimatės elipsinės lygtys su nelokaliosiomis sąlygomis

Daugelis procesų moksle ir inžinerijoje veda prie neklasikinių elipsinių lygčių su kraštinėmis ir pradinėmis sąlygomis, kurios dažnai būna nelokaliosios (dažnai ir integralinės). Šiame skyriuje išnagrinėjamas dvimačio elipsinio uždavinio su integraline sąlyga sprendimas baigtinių skirtumų metodu bei įrodomas baigtinių skirtumų metodo konvergavimas.

Vienas pirmųjų straipsnių, kuriame buvo suformuluotas bei nagrinėtas kraštinis uždavinys su tokio tipo kraštinėmis sąlygomis, kokias analizuojame šiame skyriuje, yra J. R. Cannon, Y. Lin, A. L. Matheson (1993m.) darbas [11]. Šiame straipsnyje nagrinėjamas uždavinys parabolinei lygčiai, yra analogiškas mūsų nagrinėjamam uždaviniui. Autoriai sprendžia tokį uždavinį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in D = \{0 < x, y < 1\}, \tag{5.1}$$

$$u(0, y, t) = g_1(y, t), \quad u(1, y, t) = g_2(y, t), \quad u(x, 1, t) = h_1(x, t) \tag{5.2}$$

$$u(x, 0, t) = \mu_0 h_2(x), \tag{5.3}$$

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y), \tag{5.4}$$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{s(x)} u(x, y, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = m(t) \tag{5.5}$$

su nežinoma funkcija $\mu_0(t)$. Straipsnyje gautos pakankamosios diferencialinio uždavinio vienintelio sprendinio egzistavimo sąlygos ir sudarytos praktiškai tinkančios skirtuminės schemos. Skirtuminių schemų stabilumas ir konvergavimas, kaip pastebėjo darbo autoriai, nebuvo nagrinėti. Vėliau toks uždavinys buvo nagrinėtas [12, 13, 27, 56, 57] darbuose ir kituose straipsniuose.

Šiame skyriuje formuluojamas baigtinių skirtumų metodas dvimatei elipsinei lygčiai su nelokaliąja integraline sąlyga, surandamos skirtuminio uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygos. Tada įrodomas baigtinių skirtumų metodo konvergavimas. Pateiktas sprendimo metodas pritaikomas sudėtingesniam diferencialiniam uždaviniui (dvimatei parabolinei lygčiai su nelokaliąja integraline sąlyga) išspręsti. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai yra išspausdinti [43] straipsnyje.

5.2 Uždavinio formulavimas

Nagrinėjamas kraštinių reikšmių uždavinys dvimatei elipsinei lygčiai stačiakampėje srityje su integraline sąlyga. Taigi, sprendžiamas toks kraštinis uždavinys

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in D = \{0 < x, y < 1\}, \tag{5.6}$$

$$u(0,y) = g_0(y), \quad u(1,y) = g_1(y), \; u(x,1) = h_1(x) \tag{5.7}$$

$$u(x,0) = \mu h_0(x), \tag{5.8}$$

$$\iint\limits_D u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = m, \tag{5.9}$$

čia $u(x,y)$ yra ieškoma funkcija, o μ yra nežinomas skaičius.

Šiame skyriuje aprašomas ir pagrindžiamas kitoks baigtinių skirtumų metodo variantas negu minėtuose straipsniuose. Šis algoritmas remiasi gana paprasta ir gerai žinoma idėja. Tiesinės diferencialinės lygties ar skirtuminių lygčių sistemos su nelokaliąja sąlyga sprendinys gali būti rastas redukuojant (5.6)-(5.9) uždavinį į du uždavinius su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis. M. Sapagovo [70] straipsnyje tokia idėja buvo realizuota sudarant iteacinius metodus skirtuminių lygčių sistemoms su nelokaliąja sąlyga. Tokia idėja yra tinkama ne tik skirtuminių lygčių sistemoms, gautoms iš elipsinės lygties, bet ir parabolinių lygčių neišreikštinėms skirtuminėms schemoms.

5.3 Skirtuminis uždavinys

Tarkime, kad (5.6)–(5.9) diferencialiniam uždaviniui yra teisingos tokios prielaidos:

5.1 Prielaida. Su bet kuriuo fiksuotu skaičiumi μ, (5.6)–(5.8) kraštinis uždavinys turi vienintelį pakankamai glodų sprendinį, užtikrinantį $O(h^2)$ eilės skirtuminės schemos aproksimavimo paklaidos bei skaitinio integravimo paklaidos įvertį. Atskirai imant turi būti išpildytas kraštinių sąlygų suderinamumas stačiakampio D kampuose.

5.2 Prielaida. Funkcija $h_0(x)$ turi tenkinti šias sąlygas: $h_0(x) \geq 0$, $h_0(x) \not\equiv 0$ ir $h_0(0) = h_0(1) = 0$.

Sprendžiame (5.6)–(5.9) uždavinį baigtinių skirtumų metodu. Sudarome tokią skirtuminių lygčių sistemą:

$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij}, \tag{5.10}$$

$$U_{0j} = g_{0j}, \quad U_{Nj} = g_{1j}, \quad U_{iN} = h_{1i}, \tag{5.11}$$

$$U_{i0} = \mu_h \cdot h_{0i}, \tag{5.12}$$

$$h^2 \sum_{i,j=0}^{N} \rho_{ij} U_{ij} = m; \tag{5.13}$$

čia $i, j = 1, 2, \ldots, N-1$, $h = 1/N$,

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 1, & i, j = \overline{1, N-1}, \\ 1/2, & \{i = 0, N; j = \overline{1, N-1}\};\ \{i = \overline{1, N-1}; j = 0, N\}; \\ 1/4, & (i,j) = \{(0,0), (0,N), (N,0), (N,N)\}. \end{cases}$$

Įvedame pažymėjimus

$$\Omega_h = \{(i,j) | i = \overline{1, N-1}; j = \overline{1, N-1}\},$$
$$\Gamma_h = \{(i,j) | i = 0, N; j = \overline{0, N} \text{ ir } j = N, j = \overline{1, N}\},$$
$$\Gamma_h^1 = \{(i,j) | i = \overline{1, N-1};\ j = 0\},$$

Užrašykime (5.10)–(5.13) lygčių sistemą pavidalu, kuriame nėra indeksų i, j:

$$\Lambda U = f, \quad (i,j) \in \Omega_h, \tag{5.14}$$

$$U = g, \quad (i,j) \in \Gamma_h, \tag{5.15}$$

$$U = \mu h_0, \quad (i,j) \in \Gamma_h^1, \tag{5.16}$$

$$V_h(U) = m. \tag{5.17}$$

Šiame disertacijos skyriuje pateikiamo sprendimo algoritmo esmė yra ta, kad (5.14)–(5.17) sistemos sprendinį rasime du kartus spręsdami analogišką sistemą su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis. Imkime

$$U = C_1 U_1 + C_2 U_2, \tag{5.18}$$

čia $U_s, s = 1, 2$ yra tokių skirtuminių sistemų sprendiniai:

$$\Lambda U_s = f, \quad (i,j) \in \Omega_h, \tag{5.19}$$

$$U_s = g, \quad (i,j) \in \Gamma_h, \tag{5.20}$$

$$U_s = \mu_s h_0, \quad (i,j) \in \Gamma_h^1, \tag{5.21}$$

μ_1, μ_2 yra du laisvai parinkti fiksuoti skaičiai. Konstantas C_1, C_2 parinkime taip, kad (5.18) sprendinys tenkintų taip pat ir (5.17) nelokaliąją sąlygą. Tuo tikslu įrašykime (5.18) išraišką į (5.14)–(5.17) lygtis. Pareikalavus, kad visos šios lygtys virstų tapatybėmis, gauname:

$$C_1 + C_2 = 1, \tag{5.22}$$

$$C_1\mu_1 + C_2\mu_2 = \mu_h, \tag{5.23}$$

$$C_1 V_h(U_1) + C_2 V_h(U_2) = m. \tag{5.24}$$

Iš šių trijų lygčių sistemos galime rasti C_1, C_2, μ_h. Būtent iš (5.22), (5.24) lygčių randame:

$$C_1 = \frac{V_h(U_2) - m}{V_h(U_2) - V_h(U_1)}, \tag{5.25}$$

$$C_2 = \frac{m - V_h(U_1)}{V_h(U_2) - V_h(U_1)}. \tag{5.26}$$

Žinodami C_1, C_2, iš (5.23) lygties apskaičiuojame μ_h. Tam, kad (5.22)–(5.24) sistema būtų vienareikšmiškai išsprendžiama, būtina ir pakankama, kad (5.25) tuo pačiu ir (5.26) formulėse vardiklis nebūtų lygus nuliui. Nurodysime pakankamas sąlygas, kada konstantas C_1 ir C_2 galima vienareikšmiai apskaičiuoti.

5.1 teorema. *Tarkime, kad* $h_{0,i} \geq 0$, $i = \overline{0, N}$ *ir* $h_{0,i} \not\equiv 0$. *Jei* $\mu_1 < \mu_2$, *tai* $V_h(U_2) - V_h(U_1) > 0$.

Įrodymas. Pažymėkime:

$$w_{ij} = U_{2,ij} - U_{1,ij}. \tag{5.27}$$

Funkcija w_{ij}, $i, j = \overline{0, N}$ yra šios skirtuminių lygčių sistemos sprendinys:

$$\Lambda(w) = 0, \quad (i, j) \in \Omega_h, \tag{5.28}$$

$$w = 0, \quad (i, j) \in \Gamma_h, \tag{5.29}$$

$$w = (\mu_2 - \mu_1)h_0, \quad (i, j) \in \Gamma_h^1. \tag{5.30}$$

Šiai lygčių sistemai galioja maksimumo principas, iš kurio išplaukia, kad

$$w_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{0, N}. \tag{5.31}$$

Kadangi $h_{0,i} \not\equiv 0$, tai ir $w_{i,0} \not\equiv 0$, tuo pačiu

$$w_{ij} \not\equiv 0, \quad i, j = \overline{0, N}.$$

Todėl

$$V_h(U_2) - V_h(U_1) = V_h(w) > 0, \tag{5.32}$$

kas patvirtina 5.1 teoremos teiginį. □

5.1 Pastaba. Jei sąlygą $h_{0,i} \geq 0$ pakeistume sąlyga $h_{0,i} \leq 0$, tai su $\mu_1 < \mu_2$ gautume $V_h(U_2) - V_h(U_1) < 0$ visiems μ_1, μ_2.

Iš 5.1 teoremos formulavimo betarpiškai gaunama tokia išvada.

5.1 Išvada. Jei 5.1 teoremos sąlygos išpildytos, tai egzistuoja vienintelis (5.22)–(5.24) sistemos sprendinys C_1, C_2, μ_h, o tuo pačiu, vienintelis (5.10)–(5.13) skirtuminių lygčių sistemos sprendinys $(U_{ij}, i, j = \overline{0, N}, \mu_h)$.

5.2 Išvada. Jei μ_1, μ_2 parinkti taip, kad $\mu_1 < \mu_h < \mu_2$, tai $0 < C_1 < 1$ ir $0 < C_2 < 1$.

Iš tikrųjų iš (5.22) ir (5.23) lygčių gauname:

$$C_1 = \frac{\mu_2 - \mu_h}{\mu_2 - \mu_1} > 0, \quad C_2 = \frac{\mu_h - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} > 0. \tag{5.33}$$

Kadangi $C_1 + C_2 = 1$, tai iš čia ir gaunamas išvados tvirtinimas.

5.2 Pastaba. Panaudojant formulę (5.18), galima surasti ne tik (5.10)–(5.13) skirtuminio uždavinio sprendinį, bet ir (5.6)–(5.9) diferencialinio uždavinio sprendinį. Taigi, kokiai funkcijų klasei priklauso (5.6)–(5.8) uždavinio su fiksuotu μ sprendinys, tai tokiai pat funkcijų klasei priklauso (5.6)–(5.9) uždavinio sprendinys.

5.4 Sprendinio paklaidos įvertis

Įvertinsime (5.10)–(5.13) skirtuminių lygčių sistemos sprendinio U_{ij} paklaidą. Pažymėsime

$$z_{h,ij} = u(x_i, y_j) - U_{ij}, \tag{5.34}$$

$$\eta = \mu - \mu_h, \tag{5.35}$$

čia $u(x_i, y_j)$ ir U_{ij} atitinkamai (5.6)–(5.9) diferencialinio uždavinio ir (5.10)–(5.13) skirtuminio uždavinio sprendiniai. z_h ir η yra tokio skirtuminio uždavinio sprendiniai:

$$\Lambda z_h = R(h), \quad (i,j) \in \Omega_h, \tag{5.36}$$

$$z_h = 0, \quad (i,j) \in \Gamma_h, \tag{5.37}$$

$$z_h = \eta h_0, \quad (i,j) \in \Gamma_h^1, \tag{5.38}$$

$$V_h(z_h) = r(h). \tag{5.39}$$

čia $R(h)$, $r(h)$ atitinkamai diferencialinės lygties ir integralo aproksimavimo paklaidos. Jeigu diferencialinio uždavinio sprendinys $u(x, y)$ yra pakankamai glodus (5.3 skyriaus, 5.1 prielaida), tai

$$R(h) = O(h^2), \quad r(h) = O(h^2). \tag{5.40}$$

Skirtuminių lygčių sistemos (5.36)–(5.39) sprendinio ieškosime tokiu pavidalu

$$z_h = z_h^1 + z_h^2 \eta, \tag{5.41}$$

čia z_h^1 ir z_h^2 yra atitinkamai šių uždavinių sprendiniai:

$$\Lambda z_h^1 = R(h), \quad (i,j) \in \Omega_h, \tag{5.42}$$

$$z_h^1 = 0, \quad (i,j) \in \Gamma_h, \tag{5.43}$$

$$z_h^1 = 0, \quad (i,j) \in \Gamma_h, \tag{5.44}$$

ir

$$\Lambda z_h^2 = 0, \quad (i,j) \in \Omega_h, \tag{5.45}$$

$$z_h^2 = 0, \quad (i,j) \in \Gamma_h, \tag{5.46}$$

$$z_h^2 = h_0, \quad (i,j) \in \Gamma_h^1, \tag{5.47}$$

5.2 teorema. *Jei funkcijai $h_0(x)$ yra teisingos 5.1 teoremos sąlygos ir teisingi aproksimavimo įverčiai $R(h) = O(h^2)$, $r(h) = O(h^2)$, tai su visomis pakankamai mažomis h reikšmėmis yra teisingi įverčiai:*

$$|\eta| \leq C_3 h^2, \quad \|z_h\|_C \leq C_4 h^2. \tag{5.48}$$

Įrodymas. Įrašę z_h (5.41) išraišką į (5.39) lygybę, gauname:

$$\eta = \frac{r(h) - V_h(z_h^1)}{V_h(z_h^2)} \tag{5.49}$$

Įvertinsime dydžius $V_h(z_h^1)$ ir $V_h(z_h^2)$. Iš maksimumo principo (5.42)-(5.44) uždaviniui turime:

$$|z_{h,ij}^1| \leq Ch^2, \; i,j = \overline{0,N}, \tag{5.50}$$

C – konstanta, nepriklausanti nuo h. Todėl

$$V_h(z_h^1) = h^2 \sum_{i,j=1}^{N} \rho_{ij} (z_h^1)_{ij} \leq \bar{C} h^2, \tag{5.51}$$

2ia $\bar{C}$ – konstanta, nepriklausanti nuo h.

Skirtuminių lygčių sistema (5.45)–(5.47) aproksimuoja diferencialinį uždavinį

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} = 0, \tag{5.52}$$

$$z_2(0,y) = z_2(1,y) = z_2(x,1) = 0, \tag{5.53}$$

$$z_2(x,0) = h_0(x) \tag{5.54}$$

su $O(h^2)$ aproksimavimo paklaida. Pagal maksimumo principą diferencialiniam uždaviniui:

$$0 \leq z_2(x,y) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} h_0(x). \tag{5.55}$$

Pažymėkime:

$$\iint_D z_2(x,y)\,dxdy = C_0. \tag{5.56}$$

Iš prielaidų $h_0(x) \geq 0, h_0(x) \not\equiv 0$ ir nelygybės (5.55) gauname $C_0 > 0$. Aišku, C_0 nepriklauso nuo h. Todėl, atsižvelgiant į įvertį $|z_h^2 - z_2| \leq Ch^2$, gauname:

$$V_h(z_h^2) = V_h(z_2)+O(h^2) = \iint\limits_D z_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+O(h^2) = C_0+O(h^2). \quad (5.57)$$

Taigi,

$$V_n(z_h^2) \geq \bar{C}_0 > 0 \quad (5.58)$$

visoms pakankamai mažoms h reikšmėms.

Iš (5.49) lygybės, atsižvelgiant į (5.51) ir (5.58) įverčius, gauname, kad

$$|\eta| \leq C_2 h^2, \quad (5.59)$$

o iš (5.41) lygybės

$$\|z_h\| = \max_{0\leq i,j\leq N} |z_{h,ij}| \leq C_3 h^2. \quad (5.60)$$

5.5 Skaitiniai rezultatai

Išnagrinėtas skirtuminių lygčių sistemos sprendimo metodas buvo realizuotas sprendžiant iliustracinį vienmatį uždavinį

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (5.61)$$

$$u(0) = g_0, \quad u(1) = \mu h_0, \quad (5.62)$$

$$\int\limits_0^1 u(x)\mathrm{d}x = m. \quad (5.63)$$

Sąlyga $u(1) = \mu h_0$ yra (5.8) sąlygos analogas. Ši sąlyga, kurioje yra nežinoma reikšmė μ, vienmačiu atveju yra neinformatyvi ir gali būti praleista. Čia ji užrašyta tik tam, kad būtų pilnai laikomasi šiame disertacijos skyriuje aprašytos metodikos. Parinkus $f(x) = 6x, g_0 = h_0 = 1$ ir $m = 0.75$, šio uždavinio sprendiniu yra

$$u(x) = x^3 - x + 1, \quad \mu = 1. \quad (5.64)$$

Skaitiniu eksperimentu buvo analizuota, kaip sprendinio tikslumas priklauso nuo μ_1, μ_2 pasirinkimo. 5.1 ir 5.2 lentelėse surašytos sprendinio paklaidos

$$\varepsilon = \max_{0\leq i\leq N} |z_i| = \max_{0\leq i\leq N} |u(x_i) - U_i|$$

įvairioms μ_1, μ_2, h reikšmėms.

5.1 lentelė. $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $V = V(u_1) - V(u_2)$

h	c_1	c_2	μ	V	ε
0.1	993	-992	0.995	$0.51 \cdot 10^{-4}$	0.004
0.025	997.688	-996.688	0.9996	-1	0.0002
0.0008	997.997	-996.997	0.9999	$0.5 \cdot 10^{-4}$	$0.19 \cdot 10^{-5}$

5.2 lentelė. $h = 0.0008$, $V = V(u_1) - V(u_2)$

μ_1	μ_2	c_1	c_2	μ	V	ε
1	2	1	$-0.465 \cdot 10^{-6}$	$1 - 0.54 \cdot 10^{-6}$	-0.5	$0.55 \cdot 10^{-5}$
$10^{-}5$	10^5	0.9999	$0.9999 \cdot 10^{-4}$	$1 - 0.53 \cdot 10^{-6}$	-5000	$0.56 \cdot 10^{-5}$
0	5	0.8000	0.1999	$1 - 0.54 \cdot 10^{-6}$	-0.25	$0.56 \cdot 10^{-6}$
-100	100	0.495	0.505	$1 - 0,55 \cdot 10^{-6}$	-100	$0.62 \cdot 10^{-6}$

Iš skaičiavimo rezultatų matyti, kad nuo μ_1, μ_2 pasirinkimo sprendinio tikslumas praktiškai nepriklauso.

Analogiška išvada buvo gauta ir sprendžiant kitus iliustracinius uždavinius. Pavyzdžiui, parinkus $f(x) = e^x, g_0 = h_0 = 1$ ir $m = e - 1$, šio uždavinio sprendiniu yra $u(x) = e^x$ ir $\mu = e$. Šio uždavinio skaitinio eksperimento rezultatai pateikti 5.3 ir 5.4 lentelėse.

5.3 lentelė. $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $V = V(u_1) - V(u_2)$

h	c_1	c_2	μ	V	ε
0.1	0.1424	0.8576	2.71518624	-0.9999	0.003
0.025	0.141	0.859	2.718088176	-1	0.00019
0.0008	0.141	0.859	2.71828163	-1	0.198E-6

5.6 Skaitiniai rezultatai sprendžiant dvimatį parabolinį uždavinį

Šiame disertacijos skyriuje pateiktą elipsinės lygties su nelokaliąja sąlyga sprendimo algoritmą apibendriname sprendžiant difuzijos lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t) \quad (x, y) \in \Omega, \tag{5.65}$$

su pradine sąlyga

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \tag{5.66}$$

5.4 lentelė. $h = 0.0008$, $V = V(u_1) - V(u_2)$

μ_1	μ_2	c_1	c_2	μ	V	ε
0.003	0.002	2716.28	-2715.28	2,718281632	0.0005	0.302E-6
10^-5	10^5	0.999973	0.00007	2.718281636	-49999	0.168E-6
0	5	0.456	0.544	2.718281634	-2.5	0.194E-6
-100	100	0.4864	0.534	2.71828148	-100	0.348E-6

ir kraštinėmis sąlygomis

$$u(0, y, t) = g_0(y, t), \tag{5.67}$$

$$u(1, y, t) = g_1(y, t), \tag{5.68}$$

$$u(x, 1, t) = h_1(x, t), \tag{5.69}$$

$$u(x, 0, t) = h_0(x)\mu(t), \tag{5.70}$$

čia $\Omega = \{0 < x, y < 1\}$, $0 < t < T$.

Kadangi $\mu(t)$ yra nežinoma funkcija, (5.70) kraštinės sąlygos nepakanka, taigi dėl šios priežasties suformuluojama nelokalioji integralinė sąlyga

$$\int_0^1 \int_0^{s(x)} u(x, y, t) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = m(t), \tag{5.71}$$

čia $0 \leqslant s(x) \leqslant 1$. Škaičiavimai buvo atlikti, imant šiek tiek paprastesnį (5.71) sąlygos atvejį

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = m(t). \tag{5.72}$$

Šiame disertacijos poskyryje suformuluotam (5.66)-(5.71) diferencialiniam uždaviniui su nelokaliąja sąlyga buvo naudojama įprasta neišreikštinė skirtuminė schema. Sprendžiant šį parabolinį uždavinį praktiškai gavome, kad sprendimo algoritmas yra pakankamai efektyvus, bet schemos stabilumas ir konvergavimas teoriškai nenagrinėtas.

Kitais metodais tokio tipo uždaviniai buvo spręsti B. J. Noye, M. Dehghan, N. Merazga, A. Bouziani, R. Čiegis darbuose [12, 13, 25, 26, 56, 57].

Sudaroma (5.66)-(5.71) uždaviniui skirtuminė schema

$$\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n}}{\tau}=\frac{u_{i-1,j}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n+1}}{h^2}+\frac{u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}}{h^2}+f_{ij}^{n+1}, \tag{5.73}$$

$$u_{ij}^{0}=\varphi_{ij}, \tag{5.74}$$

$$u_{0j}^{n+1}=g_{0_j}^{n+1}, \tag{5.75}$$

$$u_{Nj}^{n+1}=g_{1_j}^{n+1} \tag{5.76}$$

$$u_{iN}^{n+1}=h_{1_i}^{n+1} \tag{5.77}$$

$$u_{i0}^{n+1}=h_{0_i}\mu_h \tag{5.78}$$

$$h^2\sum_{i,j=0}^{N}\rho_{ij}u_{ij}^{n+1}=m^{n+1}, \tag{5.79}$$

čia $i,j=\overline{1,N-1}$ ir ρ_{ij} yra lygus 1, 1/2, 1/4 priklausomai kokios yra i ir j reiškmės, kadangi (5.72) nelokalioji integralinė sąlyga yra pakeista (5.79) skirtumine, panaudojant trapecijų formulę.

Užrašome (5.73) lygtį taip

$$\Lambda(u_{ij}^{n+1})=-u_{ij}^{n}+\tau f_{ij}^{n+1} \tag{5.80}$$

ir perrašome (5.79) sekančiai

$$V(u^{n+1})=m^{n+1}. \tag{5.81}$$

Kad surastume sprendinį u_{ij}^{n+1}, imame du laisvai pasirinktus skaičius $\lambda_1\neq\lambda_2$ ir du kartus (5.73)-(5.78) sprendžiame uždavinį, tai yra sprendžiame du skirtuminius uždavinius be nelokaliosios sąlygos, juos išsprendžiame kintamųjų krypčių metodu. Pirmajį uždavinį, kai vietoje kraštinės sąlygos (5.78) turime sekančią sąlygą

$$u_{i0}^{n+1}=\lambda_1 h_{0i} \tag{5.82}$$

ir antrajį -

$$u_{i0}^{n+1}=\lambda_2 h_{0i}. \tag{5.83}$$

Taip gaunami du sprendiniai:

$$u_1^{n+1}=u_{ij}^{n+1}(\lambda_1), \tag{5.84}$$

$$u_2^{n+1}=u_{ij}^{n+1}(\lambda_2), \tag{5.85}$$

Dabar sprendinys u_{ij}^{n+1} randamas pagal formulę

$$u^{n+1} = c_1^{n+1} u_1^{n+1} + c_2^{n+1} u_2^{n+1}, \tag{5.87}$$

kurioje c_1^{n+1}, c_2^{n+1} turi būti parinkti taip, kad (5.87) formulė tenkintų visas (5.73)-(5.79) lygtis. Taip gauname tris lygtis:

$$c_1^{n+1} + c_2^{n+1} = 1 \tag{5.88}$$

$$c_1^{n+1}\lambda_1 + c_2^{n+1}\lambda_2 = \mu_h^{n+1} \tag{5.89}$$

$$c_1^{n+1} V(u_1^{n+1}) + c_2^{n+1} V(u_2^{n+1}) = m^{n+1}. \tag{5.90}$$

Tokia idėja sprendžiant elipsinius uždavinius su nelokaliąja sąlyga yra panaudota ankstesniuose darbuose [70, 21]. Iš lygčių (5.88)-(5.90) gauname, kad

$$c_1^{n+1} = \frac{V(u_1^{n+1}) - m^{n+1}}{V(u_2^{n+1}) + V(u_1^{n+1})},$$
$$c_2^{n+1} = \frac{m^{n+1} - V(u_1^{n+1})}{V(u_2^{n+1}) + V(u_1^{n+1})}.$$

Kai surandami c_1^{n+1} ir c_2^{n+1} iš (5.89) formulės, galime surasti μ_h^{n+1}.

Šis sprendimo algoritmas gali būti pritaikytas ir sprendžiant n-mates diferencialines lygtis ($n \geqslant 1$) bei parabolines lygtis su kintamais koeficientais.

Atitinkamai parinkus funkcijas $f(x, y, t)$, g_0, g_1, h_1 h_0 bei $m(t)$ uždaviniui (5.65)-(5.70) su (5.72) nelokaliąja sąlyga, išsprendžiame du iliustracinius uždavinius, kuriuose yra žinomi tikslūs sprendiniai

$$u_1(x, y, t) = x(1 - x)(1 - y)e^{x+y+2t},$$
$$u_2(x, y, t) = x(1 - x)e^{y+2t},$$

rezultatai pateikti sekančioje lentelėje:

5.5 lentelė.

h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
τ	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{640}$
ε_{u_1}	0.1240	0.0343	0.0092
ε_{u_2}	$0,0877$	0.0255	0.0081

5.7 Penktojo skyriaus pastabos ir išvados

- Vienas svarbiausių aprašyto šiame straipsnyje metodo privalumų yra tas, kad pagal metodą reikia spręsti tik diferencialinę lygtį su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis. Būtent uždavinys elipsinei lygčiai su (5.2), (5.3) kraštinėmis ir (5.5) nelokaliąja sąlygomis redukuojamas į du uždavinius tai pačiai lygčiai su pirmo tipo kraštinėmis sąlygomis. Šitai galima atlikti tiek diferencialiniam, tiek skirtuminiam uždaviniui. Ši redukcija svarbi tiek algoritminiu, tiek teoriniu požiūriu, nagrinėjant diferencialinio uždavinio sprendinio savybes.

- Šis algoritmas gali būti betarpiškai apibendrintas ir pagrįstas bendresniems negu (5.1)-(5.5) uždaviniams. Išvardinsime kai kurias apibendrinimo kryptis.

  Pirma, lygtis gali būti ne tik dvimatė, bet ir n-matė ($n \geq 1$). Be to, lygtis gali būti su kintamaisiais koeficientais. Kraštinės sąlygos gali būti ne tik pirmojo, bet ir antrojo bei trečiojo tipo. Visais šiais atvejais metodas tinka betarpiškai.

  Antra, naudojant šiek tiek sudėtingesnes formules, vietoje (5.5) sąlygos galima imti bendresnę sąlygą, naudojamą difuzijos uždaviniuose:

$$\int_a^b \int_c^{s(x)} u(x,y)dxdy = m.$$

  Šiuo atveju reikia kitaip užrašyti (5.13) kvadratūrinę formulę (žr. pvz. [13]).

  Trečia, esant kai kurioms papildomoms sąlygoms, galima nagrinėti ne stačiakampę sritį.

- Pateikiame du komentarus dėl apribojimų funkcijai $h_0(x)$. Prielaidos $h_0(x) \geq 0$ ir $h_0(x) \not\equiv 0$ užtikrina, kad būtų teisinga nelygybė (5.58) su konstanta $\bar{C}_0$, nepriklausančia nuo tinklo žingsnio h. Iš tikrųjų, ši nelygybė gali būti teisinga ir su bendresne negu $h_0(x) \geq 0$ (arba $h_0(x) \leq 0$) sąlyga.

Sąlygų $h_0(0) = h_0(1) = 0$ prasmė yra ta, kad priešingu atveju iš suderinamumo sąlygų taškuose $(0,0)$ ir $(1,0)$ būtų galima surasti:

$$\mu_1^* = \frac{g_0(0)}{h_0(0)}, \quad \mu_2^* = \frac{g_1(0)}{h_0(1)}.$$

Jeigu šios dvi μ_1^*, μ_2^* reikšmės sutampa, tai (5.8) kraštinėje sąlygoje galima vietoje μ įrašyti šią reikšmę ir (5.6)-(5.8) uždavinys tampa kraštiniu uždaviniu elipsinei lygčiai su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis. Be to, (5.6)-(5.8) uždavinys šiuo atveju išsprendžiamas nepriklausomai nuo (5.9) nelokaliosios sąlygos. Taigi, jei $h_0(0) \neq 0, h_0(1) \neq 0$ ir $\mu_1^* = \mu_2^*$, (5.6)-(5.9) uždavinys su viena m reikšme turi vienintelį sprendinį, su likusiomis m reikšmėmis neturi sprendinio. Sprendinys neegzistuotų ir tuo atveju, kai $\mu_1^* \neq \mu_2^*$. Sąlygų $h_0(0) = h_0(1) = 0$ svarba iš dalies buvo aptarta ir parabolinei lygčiai [11].

Ginamieji teiginiai ir bendrosios išvados

- Išnagrinėtas dvimatės parabolinės lygties su viena nelokaliąja integraline sąlyga sprendimas kintamųjų krypčių metodu, kurio esmė - du kartus pritaikyti perkelties metodą bei spręsti papildomą neaukštos eilės tiesinių lygčių sistemą. Nustatyta kokią įtaką metodo stabilumui daro nelokalioji sąlyga.

- Ištirtas baigtinių skirtumų metodas dvimatei parabolinei lygčiai su keliomis nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis nagrinėjamos srities kontūro taškuose.

- Ištirta diferencialinių lygčių sistemos su nelokaliąja integraline sąlyga spektro struktūra. Nustatyta kokią įtaką daro nelokalioji sąlyga šio uždavinio spektro struktūrai, atskirai nustatyta, kada atsiranda neigiama tikrinė reikšmė.

- Išnagrinėta skirtuminių lygčių sistemos su viena nelokaliąja integraline sąlyga spektro struktūra. Ji gali būti pritaikyta tiriant dvimačio parabolinio uždavinio su nelokaliąja integraline sąlyga stabilumo sąlygas.

- Sudarytas algoritmas dvimatei elipsinei lygčiai su viena neišreikštine kraštine sąlyga, bei integraline sąlyga. Šio algoritmo esmė yra ta, kad du kartus sprendžiamas skirtuminis elipsinis uždavinys su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis laisvai parinkus dvi naujas konstantas. Šis metodas gali būti apibendrintas ir daugiamačiam uždaviniui.

Literatūra

[1] R. P. Agarwal, Focal Boundary Value problems for Differential and Difference Equations, *Kluwer, Dordrecht*, 1998.

[2] B. I. Bandyrskii, I. Lazurchak, V. L. Makarov, and M. Sapagovas, Eigenvalue problem for the second order differential equation with nonlocal conditions, *Nolinear Analysis: Modelling and Control*, **11**(1): 13-32, 2006.

[3] R. Baronas, F. Ivanauskas, and M. Sapagovas, Modelling of wood drying and influence of lumber geometry on drying dynamics, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **4**:11-22, 1999.

[4] G. K. Berikelashvili, On the convergence rate of the finite-diffeence solution of a nonlocal boundary value problem for a second-order elliptic equation, *Differ. Equat.*, **39**(7):945-953, 2003.

[5] A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems, *Doklady Akademii Nauk. SSSR*, **185**:739-740, 1969.

[6] A. Bouziani, On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions, *Bulletin de la classe des Sciences, Academic Royale de Belgique, T., X.*. **1999**:61-77, 1999

[7] V. Būda, R. Čiegis, and M. Sapagovas, A model of multiple diffusion from a limited source, *Differ. Equat. and their Applic.*, **38**:9-14, 1986, (rusų kalba).

[8] B. Cahlow, D. M. Kulkarni, and P. Shi, Stepwise stability for the heat equation with a nonlocal constrain, *SIAM J. Numer. Anal.*, **32**(2): 571-593, 1995.

[9] J. R. Cannon, The solution of the heat equation subject to specification of energy, *Quart. Appl. Math .*, **21**(2):155-160, 1963.

[10] J. R. Cannon, Y. Lin, and A. L. Matheson, Locally explicit schemes for three-dimensional diffusion with non-local boundary specification, *Appl. Anal.*, **50**:1-19, 1993.

[11] J. R. Cannon, Y. Lin, and A. L. Matheson, The solution of the diffusion equation in two-space variables subject to specification of mass, *Applic. Anal.*, **50**(1):1-15, 1993.

[12] R. Čiegis, Parrallel numerical algorithms for 3d parabolic problem with nonlocal boundary condition, *Informatica*, **17**(3):309-324, 2006.

[13] R. Čiegis, Economical difference schemes for the solution of a two-dimensional parabolic problem with an integral condition, *Differ. Equat.*, **41**(7):1025-1029, 2005.

[14] R. Čiegis and R. Čiupaila, Some aspects of the solution of static liquid metod contact problems, *Lithuanian Math. J.*, **30**(2):392-404, 1990.

[15] R. Čiegis and M. Meilūnas, On the difference scheme for a nonlinear diffusion reaction type problem, *Lietuvos Matematikos Rinkinys*, **33**(1):16-29, 1993.

[16] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė, and O. Subač, Stationary problems with nonlocal boundary conditions, *Math. Model. Anal.*, **6**(2):178-191, 2001.

[17] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė, and O. Subač, A monotonic finite-difference scheme for a parabolic problem with nonlocal conditions, *Differ. Equat.*, **38**(7): 1027-1037, 2002.

[18] R. Čiegis and N. Tumanova, Numerical solution of parabolic problems with nonlocal boundary conditions, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **31**(12):1318-1329, 2010

[19] R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė, and M. Sapagovas, On the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral condition, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **9**(2):109-116, 2004.

[20] R. Čiupaila and Ž. Jesevičiūtė, Eigenvalue problem for ordinary differential operator subject to integer condition, *Preprintas, matematikos ir Informatikos institutas*, **32**(2), 2003.

[21] R. Čiupaila and M. Sapagovas, Nonlocal problem for the system of nonlinear differential equations with separated boundary conditions, *Math. Model Anal.*, :193-197, 2005.

[22] W. Day, Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories, *Quart. Applied. Mathem.*, **40**:319-330, 1982.

[23] W. A. Day, A decreasing property of solution of a parabolic equation with applications to thermoelasticity, *Quart. Appl. Math.*, **41**:468-475, 1983.

[24] M. Dehghan, Efficient tecnichques for the second-order parabolic equations subject to nonlocal specifications, *Applied Numerical Mathematics*, **52**(1):39-62, 2005.

[25] M. Dehghan, Alternating direction implicit methods for two-dimensional diffusion with non-local boundary condition, *Intern. J. Comp. Math.*, **72**(3):349-366, 1999.

[26] M. Dehghan, A new ADI technique for two-dimensional parabolic equation with an integral condition, *Comput. Math. Appl.*, **43**(12):1477-1488, 2002.

[27] M. Dehghan, Locally explicit schemes for three-dimensional diffusion with a non-local boundary specification, *Appl. Math. Comput.*, **138**:489-501, 2003.

[28] G. Ekolin, Finite difference methods for a nonlocal boundary value problem for the heat equation, *BIT*, **31**: 245-261, 1991.

[29] G. Fairweather and J. C. Lopez-Marcos, Galerkin methods for a semilinear parabolic problem with nonlocal conditions, *Adv. Comput. Math.*, **6**:243-262, 1996.

[30] A. Friedman, Monotonic decay of solution of parabolic equations with nonlocal boundary conditions, *Quart. Appl. Math.*, **44**:401-407, 1986.

[31] J. Gao, D. Sun, and M. Zhang, Structure of eigenvalues of multi-point boundary value problems, *Adv. Differenc. Equat.*, **2010**, Article ID381932, 24p., 2010.

[32] D. G. Gordeziani, Solution methods for a class of nonlocal boundary value problems, *Tbilisi*, 1981.

[33] A. V. Gulin, N. I. Jonkin, and V. A. Morozova, Stability of a nonlocal two-dimensional finite-difference problem, *Differ. Equat.*, **37**(1):970-978, 2001.

[34] A. V. Gulin, N. I. Ionkin, and V. A. Morozova, Study of the norm in stability problems for nonlocal difference schemes, *Differ. Equat.*, **42**(7):974-984, 2006.

[35] A. V. Gulin, V. A. Morozova, and N. S. Udovichenko, Stability of a nonlocal difference problem with a complex parameter, *Differ. Equat*, **47**(8): 1116-1129, 2011.

[36] A. K. Gushin and V. P. Mikhailov, On solvability of nonlocal problems for second-ordered elliptic equation, *Matem. Sbornik.*, **185**:121-160, 1994, (rusų kalba).

[37] V. A. Il'jin and E. I. Moiseev, Two-dimensional nonlocal boundary value problem for Poisson's operator in differential and difference variants, *Matematicheskoe Modelirovanie*, **2**(8):139-156, 1990.

[38] G. Infante, Eigenvalues of some nonlocal boundary value problems, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **46**:75-86, 2003.

[39] I. N. Ionkin, The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differ. Equat.*, **13**(2):294-304, 1977.

[40] I. N. Ionkin and V. A. Morozova, Two dimensional heat equation with nonlocal boundary conditions, *Differ. Equat.*, **36**(7):982-988, 2000.

[41] F. Ivanauskas, T. Meškauskas, and M. Sapagovas, Stability of finite difference schemes for two-dimensional parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Appl. Math. Comp.*, **215**(7):2716-2732, 2009.

[42] J. Jachimavičienė, Ž. Jesevičiūtė, and M. Sapagovas, The stability of finite difference schemes for pseudoparabolic equation with nonlocal conditions, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **30**(9):988-1001, 2009.

[43] K. Jakubėlienė, R. Čiupaila, and M. Sapagovas, Solution of a two-dimensional elliptic equation with a nonlocal condition. *In Proceedings of International Conference "Differential equations and their applications(DETA-2009)"*. 92-98, 2009.

[44] K. Jakubėlienė, Solution of two-dimensional parabolicequation with nonlocal integral boundary conditions, *Lietuvos Matematikos Rinkinys*, **52**:285-290, 2011.

[45] K. Jakubėlienė, An eigenvalue problem for the differential operator with an integral condition, *Lietuvos Matematikos Rinkinys*, **53**:48-53, 2012.

[46] Ž. Jesevičiūtė, Diferencialinio operatoriaus su nelokaliąja integraline sąlyga spektro struktūra, *Matematika ir Matematinis modeliavimas*, **2**:12-16, 2006.

[47] Ž. Jesevičiūtė, Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliąja integraline sąlyga, *Matematika ir Matematinis modeliavimas*, **3**:22-26, 2007.

[48] Ž. Jesevičiūtė and M. Sapagovas, On the stability of the finite-difference schemes for parabolic equations subject to integral conditions with applications for thermoelasticity, *Comput. Methods Appl. Math.*, **8**(4):360-373, 2008.

[49] Ž. Jesevičiūtė, On one eigenvalue problem for a differential operator with integral conditions,*In Proceedings of International Conference "Differential equations and their applications(DETA-2009)"*, 99-105, 2009.

[50] L. I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with nonclasical boundary conditon, *Zh. Vychisl. Mat. Fiz.*, **4**(6):1006-1024, 1964, (rusų kalba).

[51] N. Klovienė and K. Pileckas, Nonstationary Poiseuill–type solutions for the second–grade fluid flow, *Lith. Math. J.*, **52**:155-171, 2012.

[52] B. Kvedaras, M. Sapagovas, Skaičiavimo metodai, *"Mintis", Vilnius*, 1974.

[53] Y. Liu, Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions, *J. Comput. Appl. Math.*, **110**:115-127, 1999.

[54] Y. Lin, S. Xu, and H-M. Yin, Finite difference approximations for a class of nonlocal parabolic equation, *Int. J. Math. Sci.*, **20**(1):147-164, 1997.

[55] V. Makarov and D. Kulyev, Solution of a boundary value problem for a quasilinear equation of parabolic type with nonclasical boundary condition, *Differ. Equat.*, **21**(2):296-305, 1985.

[56] N. Merazga and A. Bouziani, Rothe method for a mixed problem with an integral condition for the two-dimensional diffusion equation, *Abstr. Appl. Anal.*, **2003**(16):899-922, 2003.

[57] B. J. Noye and M. Dehghan, New explicit finite difference schemes for two-dimensional diffusion subject specification of mass, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **15**(4):521-534, 1999.

[58] C. V. Pao, Numerical solutions of reacton-diffusion equations with nonlocal boundary conditions, *J. Comput. Appl. Math.*, **136**(1-2)227-243, 2001.

[59] D. W. Peaceman and H. H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **1**(3):28-41, 1955.

[60] S. Pečiulytė, O. Štikonienė, and A. Štikonas, Sturm-Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **10**(4):377-392, 2005.

[61] S. Pečiulytė and A. Štikonas, Sturm-Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal two-point boundary conditions, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **11**(1):47-78, 2006.

[62] S. Pečiulytė and A. Štikonas, On positive eigenfunctions of Sturm-Liouville problem with nonlocal two-point boundary condition, *Math. Model. Anal.*, **12**(2):215-226, 2007.

[63] S. Roman and A. Štikonas, Green's functions for stationary problems with nonlocal boundary conditions, *Lith. Math. J.*, **49**(2):190-202, 2009.

[64] S. Roman, Linear differential equation with additional conditions and formulae for Green's function, *Math. Model. Anal.*, **16**(3):401-417, 2011.

[65] S. Roman and A. Štikonas, Green's function for discrete second-order problems with nonlocal boundary conditions, *Bound. Value Probl.*, **2011**:1-23, 2011.

[66] S. Sajavičius and M. Sapagovas, Numerical analysis of the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral conditions, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **14**(1):115-122, 2009.

[67] A. A. Samarskii, The theory of finite-difference schemes, *Moscow, Nauka*, 1977.

[68] M. P. Sapagovas, Numerical methods for two-dimensional problem with nonlocal conditions, *Differ. Equat.*, **20**(7):1258-1266, 1984.

[69] M. Sapagovas, The numerical method for the solution of the problem on the equilibrium of a drop of liquid, *Comput. Math., Banach Center Publ.*, **13**:45-59, 1984.

[70] M. Sapagovas, The solution of difference equations, arising from differential problem with integral condition, *In G.Marchuk (Ed) Vychislitel'nye Processy i Systemy*, **6**:245-253, Moscow, Nauka, 1988.

[71] M. P. Sapagovas, The eigenvalue of some problem with a nonlocal condition. *Differ. Equat.*, **38**(7):1020-1026, 2002, (rusų kalba).

[72] M. P. Sapagovas, Hypothesis on the solvability of parabolic equations with nonlocal conditions, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **7**(1):93-104, 2002.

[73] M. Sapagovas, On the stability of finite-difference schemes for one-dimensional parabolic equations subject to integral conditions, *J. Comput. Appl. Math.*, **92**:70-90, 2005.

[74] M. Sapagovas, Diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis, *Matematikos ir Informatikos Institutas*, Vilnius, 2007

[75] M. P. Sapagovas, Difference method of increased order of accuracy for the Poisson equation with nonlocal condition, *Differ. Equat.*, **44**(7):1018-1028, 2008.

[76] M. Sapagovas, On the stability of a finite-difference scheme for nonlocal parabolic boundary-value problems, *Lith. Math. J.*, **48**(3):339-356, 2008.

[77] M. P. Sapagovas and R. J. Čiegis, The numerical solution of some nonlocal problems, *Litov. Mat. Sb.*, **27**(2):348-356, 1987, (rusų kalba).

[78] M. P. Sapagovas and R. J. Čiegis, On some boundary problems with nonlocal conditions, *Differ. Equat.*, **23**(7):1268-1274, 1987, (rusų kalba).

[79] M. Sapagovas, G. Kairytė, O. Štikonienė, and A. Štikonas, Alternating direction method for a two-dimensional parabolic equation with a nonlocal boundary condition, *Math. Model. Anal.,* **12**(1):131-142, 2007.

[80] M. Sapagovas and J. Jachimavičienė, Locally one-dimensional difference scheme for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions, *Lith. Math. J.*, **52**(1):53-61, 2012.

[81] M. Sapagovas and K. Jakubėlienė, Alternating direction method for two-dimensional parabolic equation with nonlocal integral condition, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **17**(1):91-98, 2012.

[82] M. Sapagovas and K. Jakubėlienė, On the stability of difference schemes for a two-dimensional parabolic equation with integral conditions, *Lith. Math. J.* (įteiktas).

[83] M. Sapagovas, T. Meškauskas, and F. Ivanauskas, Numerical spectral analysis of a difference operator with non-local boundary conditions, *Appl. Math. Comput.*, **218**(14):7515-7527, 2012.

[84] M. P. Sapagovas and A. D. Štikonas, On the structure of the spectrum of a differential operator with a nonlocal condition, *Differ. Equat.*, **41**(7):1010-1018, 2005.

[85] M. Sapagovas, A. Štikonas, and O. Štikonienė, Alternating direction method for the Poisson equation with variable weight coefficients in an integral condition, *Differ. Equat.*, **47**(8):1176-1187, 2011.

[86] M. Sapagovas and O. Štikonienė, A fourth-order alternating-direction method for difference schemes with nonlocal condition, *Lith. Math. J.*, **49**(3):309-317, 2009.

[87] M. Sapagovas and O. Štikonienė, Alternating-direction method for a mildly nonlinear elliptic equation with nonlocal integral conditions, *Nonlin. Anal. Model. Contr.*, **16**(2):220-230, 2011.

[88] D. H. Schepper and R. V. Keer, On a finite element method for second order elliptic eigenvalue problems with nonlocal dirichlet boundary conditions, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **18**(3-4):283-295, 1997.

[89] A. Skučaitė, K. Skučaitė-Bingelė, S. Pečiulytė, and A. Štikonas, Investigation of the spectrum for the Sturm-Liouville problem with one integral boundary condition, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **15**(4):501-512, 2010.

[90] M. Slodička, Semilinear parabolic problem with nontandart boundary conditions: error estimates, *Numer. Methods Partial Differ. Equat.*, **19**(2):167-191, 2003.

[91] A. Štikonas, The Sturm-Liouville problem with a nonlocal boundary condition, *Lith. Math. J.*, **47**(3):336-351, 2007.

[92] A. Štikonas, Investigation of characteristic curve for Sturm-Liouville problem with nonlocal boundary conditions on torus, *Math. Model. Anal.*, **16**(1):1-22, 2011.

[93] A. Štikonas and S. Roman, Stationary problems with two additional conditions and formulae for Green's functions, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **30**(9):1125-1144, 2009.

[94] A. Štikonas and O. Štikonienė, Characteristic functions for Sturm-Liouville problems with nonlocal boundary conditions, *Math. Model. Anal.*, **14**(2):229-246, 2009.

[95] O. Štikonienė, Numerical investigation of fourth-order alternating direction method for Poisson equation with integral conditions, *In Proceeding of international Conference of Differential Equations and Their applications "DETA2009"*, :139-146, Kaunas 2009.

[96] Y. Wang, Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary condition, *Electr. J. Differ. Equat.*, **2002**(5):1-16, 2002.

[97] J. R. L. Webb and G. Infante, Positive solutions of nonlinear boundary value problems involving integral boundary conditions, *NoDEA, Nonlinear Differ. Equat. Appl.*, **15**:45-67, 2008.

[98] Y. F. Yin, On nonlinear parabolic equations with nonlocal boundary condition, *Jour. Math. Anal. Appl.*, **185**(1):161-174, 1994.

[99] H-M. Yin, On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, **294**:712-728, 2004.

Autorės publikacijos disertacijos tema

[A1] R. Čiupaila, K. Jakubėlienė, M. Sapagovas, Dvimatės elipsinės lygties su nelokaliąja sąlyga sprendimas, *Matematikos ir Informatikos Institutas*, Preprintas Nr. **2008-40**, 12p., 2008.

[A2] R. Čiupaila, K. Jakubėlienė, and M. Sapagovas, Solution of two-dimensional eliptic equation with nonlocal conditions , *Proceedings of International Conference Differential equations and their applications, Kaunas, Technologija*, 92-98, 2009.

[A3] K. Jakubėlienė, Solution of two-dimensional parabolic equation with nonlocal integral condition, *LMD darbai*, **52**:285-290, 2011.

[A4] M. Sapagovas, K. Jakubėlienė, Alternating direction method for two-dimensional parabolic equation with nonlocal integral condition, *Nonlinear Analysis: Modelling and control*, **17**(1):91-98, 2012.

[A5] K. Jakubėlienė, Eigenvaliue problem for differential operator with integral condition. *LMD darbai*, **53**:48-53, 2012.

Įteikti straipsniai

[A6] M. Sapagovas, K. Jakubėlienė, On the stability of difference schemes for a two-dimensional parabolic equation with integral conditions *Lith. Math J.* (Įteiktas).

Kristina Jakubėlienė

DVIMATĖS PARABOLINĖS LYGTIES SU INTEGRALINE SĄLYGA SPRENDIMAS BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODU

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai (P 000),
Matematika (01 P)

Kristina Jakubėlienė

SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION BY THE FINITE-DIFFERENCE METHOD

Doctoral Dissertation

Physical sciences (P 000),
Mathematics (01 P)