Vytauto Didžiojo Universitetas
Matematikos ir Informatikos Institutas

Audrius KABAŠINSKAS

FINANSINIŲ RINKŲ STATISTINĖ ANALIZĖ IR STATISTINIO MODELIAVIMO METODAI

Daktaro Disertacija

Fiziniai Mokslai, (P 000)

Informatika (09 P)

Informatika, Sistemų Teorija (P 175)

Vilnius 2007

Disertacija rengta 2003–2007 metais Matematikos ir Informatikos Institute

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Leonidas SAKALAUSKAS (Matematikos ir Informatikos Institutas, fiziniai mokslai, informatika – 09P)

Turinys

Terminų ir santrumpų sąvadas

Pateikiami disertacijoje naudojami terminai ir santrumpos.

a.d. atsitiktinis dydis;

akcija – bankininkystės ir komercijos terminas nusakantis nuosavyės vertybinį popierių;

aktyvas – bankininkystės ir komercijos terminas: 1. nuosavas ir skolintas kapitalas; 2. lėšos ir kitas turimas turtas (materialinės vertybės, pinigai, vekseliai, perlaidos, akredityvai); 3. šalies įplaukų iš operacijų užsienyje perviršis virš importo bei užsienio išlaidų; taip pat depozitas;

asimetrija simetrijos nebuvimas;

ARCH procesai autoregresios heteroskedastiniai procesai;

CAPM kapitalo aktyvų įkainojimo modelis, angl. *capital asset pricing model*;

CRT centrinė ribinė teorema;

CVaR vertybinių popierių portfelio sąlyginės rizikuojamosios vertės modelis, angl. *Conditional Value-at-Risk*;

ERH efektyviosios rinkos hipotezė;

finansinis instrumentas, priemonė – bankininkystės ir komercijos terminas, apibūdinantis finansinius dokumentus (akcijas, obligacijas, vekselius ir pan.) išreiškiančius nuosavybę ar teisę pretenduoti į ją;

kiekybinė analizė yra pagrįsta kiekybinių rodiklių apskaičiavimu. Kiekybinė analizė – nuodugnus duomenų peržiūrėjimas bei statistinių ryšių interpretacija, nuorodos į kitus tyrinėjimus ir hipotezes, kintamųjų apibūdinimas ir užkodavimas, statistinių rodiklių apskaičiavimas;

leptokurtiškumas – tikimybinio tankio savybė, kuria nusakoma tankio funkcijos grafiko forma. Ši forma ypatinga tuo, kad ji yra smailiaviršūniškesnė nei normaliojo dėsnio tankio funkcijos forma, o uodegos – sunkesnės nei normaliojo dėsnio tankio funkcijos;

MPT modernioji portfelio teorija;

NIG – normalusis-atvirkštinis Gauss'o dėsnis (angl. *normal-inverse Gaussian*);

nulinė grąža – grąža, kuri yra lygi nuliui, kai aktyvo, kuriam ji yra skaičiuojama, kaina dviejuose gretimuose perioduose nesikeičia;

opcionas = pasirenkamasis sąndoris;

rinka tarptautinėje praktikoje priimtoje terminologijoje laikoma, kad finansų rinka = pinigų rinka + kapitalo rinka. Pinigų rinkoje vyksta trumpalaikių - iki vieneriu metų santaupų, kapitalo rinkoje - vidutinių ir ilgalaikių (daugiau nei vienerių metų) santaupų judėjimai. V.p. rinka yra pinigų rinkos ir kapitalo rinkos segmentas, apimantis bankų kreditų visumą, piniginių išteklių paskirstymą per draudimo sferą, firmų vidaus kreditus ir t.t. V.p. rinka yra tas mechanizmas, kuris ekonomikoje paskirsto pinigines santaupas. Pakankamai svarbi yra v.p. rinkos sąveika su biudžetu ir kreditų rinka. Biudžetas, kreditų rinka ir v.p. rinka ne tik papildo vienas kitą, bet ir konkuruoja vienas su kitu ir labai priklauso vienas nuo kito;

portfelis – tam tikras vertybinių popierių rinkinys, kuriame kiekviena iš sudedamųjų dalių turi savo svorį;

savastingas = savipanašumas, angl. *self-similar*;

skirstinių šeima vadinami visi tikimybiniai skirstiniai, kurie aprašomi vienoda funkcijos (tankio, charakteringąja, pasiskirstymo ar kita) formule, bet skiriasi šių funkcijų parametrais.

testo patikimumas = testo galingumas. Testas laikomas patikimesniu už kitą, jei jo galingumas didesnis;

uodega tikimybių teorijoje vadinami tolimieji tikimybinio dėsnio kvantiliai;

V-D modelis vidurkio-dispersijos modelis;

VaR vertybinių popierių portfelio rizikuojamosios vertės modelis, angl. *Value-at-Risk*;

v.p. vertybinis popierius.

1. Įvadas

1.1. Darbo sritis

Finansinių procesų modeliavimas ir analizė yra svarbi, labai greitai besivystanti mokslo šaka, apjungianti tokias sritis kaip kompiuterių mokslai, taikomoji matematika, statistika ir ekonomika. Tiriant investavimo galimybes ir nagrinėjant finansines laiko sekas, jų elgesiui aprašyti taikomi tikimybiniai–statistiniai modeliai. Adekvatus empirinio duomenų pasiskirstymo nustatymas ženkliai lemia daugelį prognozavimo bei investavimo sprendimų. Daugelio tyrimų rezultatai rodo, kad finansiniai duomenys yra su dideliais nuokrypiais bei pasižymi asimetrija ir leptokurtotiškumu. Tokių duomenų skirstiniams modeliuoti mokslinėje literatūroje pasiūlyti stabilieji modeliai.

Šio darbo tyrimų sritis yra finansinių rodiklių laiko sekų tikimybinių modelių bei prognozavimo ir investavimo algoritmų metodologija.

1.2. Darbo aktualumas

Finansinės rinkos ir jose cirkuliuojantys finansiniai srautai sudaro svarbią šiuolaikinės ekonomikos dalį. Efektyvių investicinių sprendimų technologijų kūrimas yra aktuali informacinių technologijų sritis. Naujos investavimo galimybės atsivėrė po Europos Sąjungos išsiplėtimo 2004 metais. Iki tol mažai žinomos, Baltijos ir kitų Rytų bei Centrinės Europos, rinkos tapo patraukliomis investuotojams. Spartus Bendrojo Vidaus Produkto (BVP) augimas 3–8 % (tuo tarpu senosiose ES šalyse tik 1,5–1,8%) ir aukštas pelningumo lygis pritraukė nemažai naujų rinkos dalyvių. Tačiau šių rinkų ypatybės nėra plačiai ištirtos. Šiame darbe analizuojamos pasaulio ir Baltijos šalių akcijų kainų grąžos, kurių kitimas stebimas kasdien. Baltijos šalių finansinės sekos pasižymi dviem svarbiomis savybėmis, kurios nebūdingos JAV ar senųjų ES narių rinkose cirkuliuojančių vertybinių popierių sekoms:

- sekos yra žymiai trumpesnės: neviršija 2000 stebėjimų (10–12 metų), iš kurių tik 1000–1700 yra tinkami analizei (dėl vykusios privatizacijos ir pan.);
- empiriniuose duomenyse stebimas stagnacijos fenomenas (1993–2007 m.). Stagnacija charakterizuojama ypač dideliu pasyvumu, kai tam tikrą laiko tarpą akcijų kainos nesikeičia, nes biržoje šiomis akcijomis neįvyksta nei vieno sandorio.

Realūs duomenys neretai pasižymi asimetrija, ekscesu ir dideliais nuokrypiais. Tai patvirtina nemažai empirinių tyrimų, tokių kaip Janicki ir Weron [69], Rachev [122], Samorodnitsky ir Taqqu [133] ir kt. Stabilieji dėsniai pasižymi tiek leptokurtotiškumu, tiek asimetrija [48] ir dažnai geriau nei Gauss'o skirstinys tinka empirinių finansinių duomenų aprašymui. Be to, stabilieji atsitiktiniai dydžiai paklūsta Apibendrintai Centrinei Ribinei Teoremai (ACRT). Ši teorema teigia, kad stabilieji dėsniai yra vieninteliai atitinkamai centruotų ir normuotų bei nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumų asimptotiniai skirstiniai [79]. Kai kurių specialistų (pavyzdžiui, Rachev [14,63]) nuomone, α-stabilieji dėsniai yra bene geriausia alternatyva (Gauss'o dėsniui) iš visų skirstinių, kurie buvo pasiūlyti mokslinėje literatūroje per pastaruosius keturis dešimtmečius.

Ekonominiams ir finansiniams procesams aprašyti dažniausiai taikomi modeliai, pagrįsti Gauss'o skirstiniu (Brown'o judesiu). Kadangi pastaruoju metu tokie modeliai pradėti vertinti kritiškai, iškeliamos šių procesų fraktališkumo arba savastingumo (angl. *self-similarity*) ir kitokios hipotezės. Savastingumui apibūdinti yra naudojamas Hurst'o rodiklis (angl. *Hurst exponent*), kurio reikšmė $\frac{1}{2}$ atitinka Brown'o judesį. Tačiau tiriant realius duomenis dažnai paaiškėja, kad šis rodiklis yra kitoks.

Baltijos šalių rinkoje „nulinės grąžos problema" yra rimtesnė nei gali pasirodyti iš pirmo žvilgsnio. Baltijos, ir kitų Centrinės bei Rytų Europos šalių finansų rinkos yra gana naujos, todėl jos yra dar besivystančios, o kai kurie finansiniai instrumentai yra mažai likvidūs. Neretai besivystančiose rinkose yra stebimas pasyvumo (stagnacijos) efektas. Nulinių grąžų skaičius kartais gali siekti net 89% visų stebėjimų. Todėl labai svarbu sukurti ir išanalizuoti tinkamus metodus tokio tipo rinkoms tirti.

Standartinės programinės įrangos skirtos statistinei analizei atlikti, ne visada pakanka, nes kompleksinis stabiliosios hipotezės tyrimas yra susijęs su daugeliu efektų, kuriems tirti programinės įrangos iš viso nėra sukurta. Taigi programinės įrangos kūrimas taip pat yra aktuali problema.

1.3. Tyrimo objektas

Šio tyrimo objektas yra Baltijos ir pasaulio finansinių rinkų vertybinių popierių (akcijų – paprastų vardinių akcijų, fondų, v.p. indeksų, valiutos keitimo santykių ir pan.) istoriniai duomenys, v.p. grąžų ar valiutų santykių tikimybiniai modeliai, šių modelių parametrų įvertinimo metodai, finansinių sekų savastingumo ir multifraktališkumo efektai, investicinių portfelių sudarymo ir optimizavimo algoritmai.

1.4. Darbo tikslas ir uždaviniai

Darbo tikslas – sukurti ir ištirti metodus besivystančių vertybinių popierių rinkų analizei ir finansinio portfelio valdymui, remiantis finansinių sekų stabilumo hipoteze.

Siekiant šio tikslo sprendžiami tokie uždaviniai:

1. Sudaryti finansinių duomenų laiko sekų analizės metodus ir pritaikyti juos Baltijos šalių vertybinių popierių laiko sekų analizei;
2. Aprašyti, išanalizuoti ir eksperimentiškai ištirti metodus stabilumo hipotezei tirti:
   - patikrinti dalinių sekų ir pradinių imčių homogeniškumo bei stabiliųjų dėsnių suderinamumo neparametrines hipotezes;
   - ištirti finansinių duomenų sekų savastingumą ir multifraktališkumą;
   - sukurti specialią programinę įrangą reikalingą išvardintiems statistiniams metodams realizuoti.
3. Ištirti pasyvumo (stagnacijos) efektą besivystančiose rinkose:
   - sukurti teorines prielaidas rinkos pasyvumui aprašyti;
   - ištirti mišriojo stabiliojo modelio pritaikymo galimybes finansinėms sekoms modeliuoti;
   - eksperimentiškai išbandyti parametrų vertinimo metodus ir suderinamumo testų patikimumą, esant trūkiai tikimybinio tankio ir pasiskirstymo funkcijoms.
4. Sukurti programinę sistemą vertybinių popierių rinkos analizei ir finansinių išteklių planavimui bei išbandyti demonstracinę internetinės programinės įrangos versiją.

1.5. Mokslinis naujumas

Darbe gauti tokie nauji rezultatai:

- Stabiliųjų modelių su asimetrija parametrų vertinimui sudaryta programinė įranga, realizuojanti MTM ir empirinius metodus, bei ištirtas šių metodų efektyvumas.
- Kompleksiškai ištirti statistiniai metodai ir sukurta juos realizuojanti programinė įranga, reikalinga stabilumo prielaidai pagrįsti:
   - patikrintos neparametrinės hipotezės apie imties skirstinio funkcijos suderinamumą su stabiliojo a.d. skirstiniu;
   - patikrintos neparametrinės hipotezės apie dalinių sekų homogeniškumą su visa seka;

   – atlikti teoriniai ir praktiniai duomenų sekų savastingumo ir multifraktališkumo tyrimai (su pasaulio ir Baltijos šalių rinkų duomenimis);

- Finansinėms sekoms modeliuoti pritaikytas atskiras paslėptųjų Markovo grandinių modelio atvejis – mišrusis stabilusis modelis. Sudaryta metodologija finansinėms sekoms iš besivystančių rinkų tirti.
- Ištirti stagnacijos laikotarpių trukmės pasiskirstymai, kuriems modeliuoti pasiūlyti Hurwitz dzeta dėsnis.
- Ištirti metodai statistiniams ryšiams tarp atskirų finansinių instrumentų nustatyti, kai neegzistuoja antrasis momentas ir parengtos rekomendacijos šiems ryšiams nustatyti bei įvertinti

1.6. Praktinė darbo reikšmė

Darbe gauti tokie praktiniai rezultatai:

- Sudaryta vertybinių popierių rinkų duomenų analizės ir modeliavimo kompiuterinė sistema, naudojant programų paketo MathCad ir universalių programavimo kalbų Visual Basic, C++ ir JAVA priemones. Ši kompiuterinė sistema leidžia įvertinti finansinių sekų stabiliųjų skirstinių parametrus, modeliuoti juos kompiuteriu, bei sudaryti optimalų vertybinių popierių portfelį.
- Sukurtos sistemos testavimas, pasinaudojant Baltijos šalių ir išsivysčiusių finansinių rinkų duomenimis, parodė, kad α-stabilusis bei kiti alternatyvūs ir klasikiniai dėsniai ne visada tinka akcijų kainų grąžų modeliavimui. Tuo tarpu bendresnis mišrusis–stabilusis modelis tinka beveik visada(99%). Šis trūkus dėsnis gali būti pritaikyti ir kompiuterinių tinklų informaciniams srautams modeliuoti.
- Pasiūlyta vertybinių popierių portfelio formavimo metodai naudojant mišrųjį–stabilųjį modelį.

1.7. Darbo rezultatų aprobavimas

Skaityti pranešimai konferencijose:

1. (T). Study of financial markets modeling, EU-Workshop Series on Mathematical Optimization Models for Financial Institutions, EUMOptFin 1: The technology of asset and liability modeling, Semmering, Austria, 2003.
2. Vertybinių popierių portfelio modeliavimas ir optimizavimas, Matematika ir matematinis modeliavimas, KTU, Kaunas, 2003.
3. (T). On stock portfolio simulation and optimization, Modeling and simulation of business systems (international conference), VGTU, Vilnius, 2003.
4. Vertybinių popierių portfelio modeliavimas ir optimizavimas, Lietuvos Matematiku draugijos XLIV konferencija, VPU,Vilnius, 2003.
5. Stabiliųjų procesų modeliavimo sistema, Informacinės Technologijos 2004, KTU, Kaunas, 2004.
6. Stabiliųjų procesų taikymas finansų inžinerijoje, Matematika ir matematikos modeliavimas 2004, KTU, Kaunas, 2004.
7. (T). Estimation of stable models by maximal likelihood and robust methods, The Seventh International Conference „Computer Data Analysis and Modeling, Robustness and Computer Intensive Methods" . Minsk 2004.09.06-10, 2004.
8. Vertybinių popierių rinkos stabiliųjų modelių tyrimas. „Informacinės technologijos 2005", KTU. 2005 Sausis.
9. (T). Data Warehouse and Stable Financial Modelling. „10th Estonian Winter School in Computer Science (EWSCS)", Palmse, Estija, 2005 vasaris.
10. Opciono įkainavimo metodai ir modeliai. „Matematika ir matematikos dėstymas – 2005", KTU. 2005 balandis.

11. (T). Application of Stable Models to Stock Market modeling. CEMI seminarai, Maskva, Rusija. 2005 balandis.
12. (T). Stable modelling of stock markets. „XXXVI Meeting of Euro Working Group on Financial Modelling", Brescia, Italija. 2005 gegužė.
13. Multifraktališkumas ir savastingumas akcijų rinkose, Matematika ir matematikos dėstymas – 2006, KTU, Kaunas, 2006.
14. (T). Returns modelling problem in the Baltic equity market, The 5th International Conference on Operational Research: Simulation and Optimization in Business and Industry, Tallinn, Estonia, 2006.
15. (T). Multifractality and self-similarity in the Baltic States market. Third Annual Meeting COST ACTION P10, Physics of Risk & Workshop on Complex System Science MC & WG 1-2-3 & Workshop Meetings, Vilnius, 2006.
16. Problemos Baltijos šalių vertybinių popierių rinkose, LMD XLVII konferencija, Kaunas, 2006.
17. Stabiliųjų modelių realizavimas hipertekstinėje aplinkoje, Studentų ir magistrantų konferencija „Taikomoji matematika", Kaunas, 2006.
18. NIG skirstinio panaudojimo portfelio teorijoje perspektyvos, Studentų konferencija ir magistrantų konferencija „Taikomoji matematika", Kaunas, 2006.
19. (T). Modeling of financial portfolio in emerging markets, The 8th Tartu Conference on Multivariate Statistics and The 6th Conference on Multivariate Distributions with Fixed Marginals, Institute of Mathematical Statistics, University of Tartu, 2007.
20. (T). Kovariantiškumas ir kodiferencija sudarant optimalų vertybinių popierių portfelį, XIII Tarptautinė kompiuterininkų konferencija, Panevėžys, 2007.
21. (T). On the modelling of stagnation intervals in emerging stock markets, The Eigth International Conference „Computer Data Analysis and Modeling, Complex Stochastic Data and Systems", Minsk, 2007.

1.8. Darbo rezultatų publikavimas

Tarptautinių konferencijų darbuose įtraukuose į ISI proceedings sarašą.

1. A. Kabasinskas, L. Sakalauskas, 2003. On stock portfolio simulation and optimization, *In*: H. Pranevicius at al. (eds), Proc. of International Conference „Modelling and Simulation of Business Systems". ISBN 9955-09-420-6, Kaunas, KTU Press „Technologija" p. 232–234.
2. I. Belovas, A. Kabasinskas and L. Sakalauskas, 2006. Returns modelling problem in the Baltic equity market, *In*: H. Pranevičius et al. (eds), Proceedings of the 5th International Conference on Operational Research: Simulation and Optimization in Business and Industry. ISBN 9955-25-061-5, Kaunas, Technologija, p. 3–8.

Recenzuojamuose moksliniuose žurnaluose, įtrauktuose į tarptautines duomenų bazes

1. I. Belov, A.Kabašinskas, L.Sakalauskas, 2006. A Study of Stable Models of Stock Markets, *Information Technology And Control*, Vol. 35, No. 1. ISSN 1392-124X, Kaunas, Technologija, p. 34–56. (INSPEC).

Kituose recenzuojamuose leidiniuose

1. A. Kabašinskas, L. Sakalauskas, 2003. Finansinių rinkų modeliavimo sistema, *Informacijos mokslai* 27 tomas. ISSN 1392-0561, VU leidykla, p. 115–120.
2. A. Kabašinskas, I. Belovas, L. Sakalauskas, 2004. Estimation of stable models by maximal likelihood and robust methods, *In*: S. Aivazian et al. (eds), Proceedings of the Seventh International Conference „Computer Data Analysis and Modeling, Robustness and Computer Intensive Methods", Vol. 1. ISBN 985-445-492-4, Minsk, p. 68–73.

3. I. Belovas, A. Kabasinskas and L. Sakalauskas, 2006. Multifraktališkumas ir savastingumas akcijų rinkose, Matematika ir matematinis modeliavimas 2. ISSN 1822-2757, Kaunas, Technologija, p. 6–11.
4. I. Belovas, A. Kabašinskas ir L. Sakalauskas, 2006. Pasyvumo problemos tyrimas Baltijos šalių akcijų rinkose, *Lietuvos matematikos rinkinys* 46 (spec. nr.). p. 289–294.
5. I. Belovas, A. Kabasinskas and L. Sakalauskas, 2007. On the modelling of stagnation intervals in emerging stock markets. *In*: S. Aivazian et al. (eds), Proceedings of the Eigth International Conference „Computer Data Analysis and Modeling, Complex Stochastic Data and Systems", Vol. 2. ISBN 978–985-476-505-1, Minsk, p. 53–55.
6. I. Belovas, A. Kabašinskas ir L. Sakalauskas, 2007. Kovariantiškumas ir kodiferencija sudarant optimalų vertybinių popierių portfelį, *Informacijos mokslai* 42–43 tomai. ISSN 1392-0561, VU leidykla, p. 182–188. (CEEOL).

Kituose nerecenzuojamuose leidiniuose ir konferencijų medžiagose

1. A. Kabašinskas, 2003. Finansinių rinkų modeliavimas, Preprintas nr. 2003–29. Matematikos ir informatikos institutas, Vilnius (35psl.).
2. A. Kabašinskas, L. Sakalauskas, 2003. Vertybinių popierių portfelio modeliavimas ir optimizavimas, Matematika ir matematinis modeliavimas – 2003. Kaunas, Technologija, p. 59–64.
3. A. Kabašinskas, I. Belovas, L. Sakalauskas, 2004. Stabiliųjų procesų modeliavimo sistema, Informacinės technologijos 2004. Kaunas: Technologija, p. 386–393.
4. A. Kabašinskas, I. Belovas, L. Sakalauskas, 2004. Stabiliųjų procesų taikymas finansų inžinerijoje, Matematika ir matatikos modeliavimas 2004. Kaunas Technologija, p. 8–13.
5. A. Kabašinskas, I. Belovas, L. Sakalauskas, 2005. Vertybinių popierių rinkos stabiliųjų modelių tyrimas, Informacinės technologijos ‚2005'. Kaunas, Technologija, p. 439–462.

1.9. Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro keturi pagrindiniai skyriai (įvadinė dalis, analitinis tyrimas, metodologija ir rezultatai), išvados, literatūros sąrašas ir priedai. Kiekviename skyrelyje pateikiami naudotų, jei tokie buvo, algoritmų aprašymai.

1**-asis skyrius** yra įvadinis. Šioje dalyje pateikiama glausta informacija apie disertaciją: darbo sritis, darbo aktualumas, tyrimo objektas, darbo tikslas ir uždaviniai, mokslinis naujumas, praktinė darbo reikšmė, darbo rezultatų aprobavimas, terminų ir santrumpų sąvadas.

2**-ame skyriuje** pateikiama mokslinių bei taikomųjų darbų analitinė apžvalga finansų modeliavimo tema. Skyriuje nagrinėjamos šios temos: finansų inžinerijos vystymasis, klasikiniai vertybinių popierių portfelio sudarymo modeliai (vertybinių popierių portfelio sudarymas esant sandorių kaštams), analizuojami modernūs finansinių rinkų modeliai, apžvelgiami finansinių sekų stabilumo tyrimo metodai, atsižvelgiama į finansinių sekų savastingumą (angl. *self-similarity*) ir multifraktališkumą, pateikiama esamos programinės įrangos apžvalga, analizuojami ir charakterizuojami finansinių duomenų šaltiniai (duomenų atranka, duomenų patikrinimas, duomenų transformacija, finansinių duomenų kiekis).

3**-ame skyriuje** pateikiami metodai ir matematiniai modeliai padedantys pasiekti užsibrėžtus tikslus. Stabilumo prielaidai finansinėse rinkose pagrįsti atliekamas duomenų apdorojimas ir analizė bei tiriama rinkos pasyvumo įtaka duomenims. Detaliai aprašomas stabilusis dėsnis, jo charakteristikos bei numatomi parametrų vertinimo metodai (didžiausio tikėtinumo metodas, momentų metodas, metodai paremti empirinės charakteringosios funkcijos savybėmis ir kiti). Taip pat aptariamas ir normaliųjų bei stabiliųjų atsitiktinių procesų tinkamumas finasiniams procesams aprašyti. Dar XX amžiaus viduryje buvo pastebėta, kad finansinių sekų elgsenai būdingas savastingumas bei multifraktališkumas, todėl šiame skyriuje pateikiami metodai šioms savybėms tirti (Hurst'o indeksas, baigtinės dispersijos metodas, pradinės ir agreguotos sekų homogeniškumo nustatymas). Aprašomi metodai reikalingi pasyvumo efekto besivystančiose rinkose tyrimams. Pasyvumo fenomenas mokslinėje literatūroje anksčiau nebuvo nagrinėjamas, todėl aprašoma nulinių grąžų problema (NGP), kuriamas mišrusis stabilusis modelis, aprašomos jo charakteristikos, metodai parametrams vertinti bei suderinamumo testų patikimumas. Mišrusis modelis šiame darbe nagrinėjamas dvejais atvejais: kai grąžų būsenos (jei grąža lygi 0, tai ji yra nulinėje būsenoje, priešingu atveju ji yra būsenoje 1) yra priklausomos ir kai jos yra atsitiktinės. Greta jau aptartų vienmačių finansinių sekų modelių yra kuriami daugiamačiai modeliai, aprašomas ryšio tarp atskirų akcijų grąžų nustatymas bei jo įtaka vertybinių popierių portfelio formavimui.

4**-ame skyriuje** aptariami gauti rezultatai, o jo pabaigoje pateikiama sukurtos programinės priemonės (C++ kalboje bei adaptuotos hipertekstinei aplinkai) aprašymas, o taip pat aptariamas ir daugiaprocesorinio superkompiuterio panaudojimas įvairiems daug resursų reikalaujantiems skaičiavimams.

Išvadų skyriuje formuluojamos darbo išvados.

Disertacijos pabaigoje pateikiamas cituotos literatūros sąrašas. Po literatūros sąrašo pateikiami priedai:

Priede A pateikiamos tyrimų rezultatų lentelės.

Priede B pateikiami statistiniai, metodai naudoti arba minimi disertacijoje: neparametrinių suderinamumo hipotezių tikrinimas Andersono–Darlingo ir Kolmogorovo–Smirnovo kriterijais, visos sekos ir dalinių sekų homogeniškumo tikrinimas (Andersono ir Smirnovo kriterijais), Wald–Wolfowitz serijų testas, mišriojo modelio adekvatumas, teorinis suderinamumo testų patikimumo nustatymas, koreliacijos koeficiento lygybė nuliui, Markovo tipo priklausomybės duomenų sekose nustatymas.

Priede C aprašomas portfelio tipo parinkimas ir aptariami vidurkio–rizikos portfelio modeliai bei Markowitz modelis ir uždavinys.

2. Finansinių rinkų modeliavimo uždavinių analitinis tyrimas

Finansinių srautų valdymas ir kontrolė yra beveik kiekvienos įmonės kasdienybė. Šių srautų dinamika nulemia vieno arba kito investicinio sprendimo priėmimą. Pavyzdžiui, bankai spręsdami ar kredituoti vieną ar kitą projektą, remiasi aktyvų ir pasyvų valdymo efektyvumo kriterijais, o pats verslo finansavimas (kreditavimas) yra viena iš svarbiausių bankų funkcijų. Pajamos iš šios veiklos dažniausiai yra pagrindiniai bankų pelno garantai. Taigi, pelno–nuostolio ar kitokios finansinės ataskaitos yra vienas iš svarbiausių finansų analizės duomenų šaltinių. Kitas, ir bene svarbiausias, ekonominio modeliavimo duomenų šaltinis, yra įvairios finansinės laiko sekos, reguliariai kaupiamos ir pateikiamos finansinio tarpininkavimo institucijų. Šių sekų statistinė analizė ir iš to išplaukiančios prognozės yra kiekvieno finansų ir investicijų analitiko darbo objektas. Vertybinių popierių ir prekių bei paslaugų biržos yra finansinių duomenų šaltinis, kurių analizei mokslinėje literatūroje skiriama daug dėmesio. Šiuolaikinėse biržose pirkimo–pardavimo sandoriai vyksta kas keletą sekundžių ir yra registruojami didelėse duomenų saugyklose. Tokių saugyklų kūrimas ir jų veiklos modeliavimas yra svarbi informacinių technologijų sritis.

2.1. Finansų inžinerijos vystymasis

Finansų matematikos pradžia reikia laikyti prancūzų matematiko L. Bašelje disertaciją „Spekuliacijos teorija" [7], kuri buvo apginta 1900 metais Sorbonoje. Šiame darbe akcijų kainą bandoma aprašyti kaip tikimybinį procesą $\{P_t,\ t \geqslant 0\}$. Tačiau ilgą laiką darbas buvo užmirštas, nes tuo metu nebuvo tinkamai suprastas. Šis darbas buvo pradėtas plačiau cituoti tik po kelių dešimtmečių (H. Working, A. Cowles[30] ir M.G. Kendall[74]). Tarpukario (1920–1940 m.) metais rinkos ir finansų analizės specialistai buvo pasidalinę į dvi esmines mokyklas: dominavo fundamentalistai (B. Graham'o ir Dodd'o sekėjai) ir technikai (kitaip dar vadinamieji techniniai analitikai, Magee sekėjai). 1940–1950 metais finansų analizė apsiribojo sudėtinių palūkanų ir dabartinių verčių skaičiavimu. Apie 1950 metus greta fundamentalistų ir technikų atsirado dar viena tyrėjų grupė – kiekybininkai arba kiekybiniai analitikai, kurie vadovavosi Bašelje teorija. Jie savo idėjomis buvo artimesni fundamentalistams, nei technikams, nes teigė, kad rinkos dalyviai – investuotojai yra racionalūs, kai tuo tarpu technikai manė, kad rinką kontroliuoja kažkoks nenuspėjamas lošimo ruletės tipo mechanizmas. Working–Cowles–Kendall empirinius tyrimus daugelis tuo metu garsių ekonomistų pasitiko su nepasitikėjimu, nes pagal ekonomikos dėsnius, jei kainos rinkoje yra nustatomos pagal „pasiūlos–paklausos" principą, tai kainų pokyčiai turėtų būti nukreipti rinkos pusiausviros kryptimi, o ne kisti atsitiktinai. Working–Cowles–Kendall rezultatus daugelis suprato kaip tvirtinimą, jog „fundamentalistų" teorija yra klaidinga, o technikų teisinga, t.y., kad finansų rinka iš tikrųjų yra „laukinis" kazino, o pati finansų teorija negali būti ekonomikos tyrimų objektas. Tuo tarpu kiti mokslininkai tvirtino, kad toks požiūris peržengia tradicinės statistikos ribas. Osborne'as 1964 metais savo darbe apie Brown'o judėjimą suformulavo vieną svarbiausių klasikinės matematinės ekonomikos teiginių, kad akcijų kainos svyravimą galima modeliuoti tam tikru atsitiktinio klaidžiojimo procesu. Jis pasiūlė modelį, kuriame kainos kitimas fondų rinkoje elgiasi panašiai kaip dalelės judėjimas skystyje. Šis modelis remiasi keletu formalių prielaidų bei keleto lygčių sprendimu ([114], p. 32). Osborne'o išvadas ir prielaidas, 1965 metais Fama[41] apibendrino šias išvadas ir suformulavo efektyvios rinkos hipotezę (angl. *Efficient Market Hypothesis*, EMH). Ši hipotezė teigia, kad išlošimo ar pralošimo biržoje neįtakoja jokia papildoma informacija. Matematiškai tai leido formalizuoti rinkos instrumentus martingalais.

Šiuolaikinės vertybinių popierių portfelio teorijos pradžia reikėtų laikyti H. Markowitz'o darbą [99], paskelbtą 1952 metais. Jis suformulavo vertybinių investicinio portfelio optimizavimo uždavinį, kuris davė pradžią portfelio vidurkio ir dispersijos (V-D) analizei. Už šią teoriją

1990 metais Markowitz'as gavo Nobelio premiją ekonomikos srityje. Ši portfelio teorija reikalauja, kad egzistuotų atsitiktinio dydžio, modeliuojančio portfelio pelną, dispersija ir kuo ji didesnė, tuo rizikingesnė yra investicija. Kita vertus, jei pelnas yra atsitiktinis, o investiciniai vienetai yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, tuomet pagal Centrinę Ribinę Teoremą (CRT) jų pasiskirstymas yra normalusis, o dispersija – baigtinė. Tokiu būdu investuotojai turi rinktis portfelį su kiek įmanoma didesniu pelnu ir kuo mažesne rizika. Toks „protingas" investuotojas buvo pavadintas rizikos vengiančiu investuotoju, o pačios prielaidos – efektyvumu pagal vidurkį–dispersiją. Šią Markowitz'o koncepciją apibendrino Sharp, Lintner ir Mossin [114], bei jas pritaikė aktyvų įkainojimo modeliuose (CAPM). Sharp'o sukurta CAPM teorija[136], besiremianti racionalios pusiausvyros principais, sujungė efektyviosios rinkos hipotezės ir matematines Markowitz'o efektyviojo portfelio teorijas. Vėliau EMH ir CAPM teorijų sankirtoje buvo išvystyta modernioji portfelio teorija (MPT). Samuelson'as, Sharp'as ir Fama (greta daugelio kitų) apibendrino šią teoriją, Mandelbrotas 1964 metais [95] pastebėjo, kad iš visų jo tyrinėtų modelių, rinkos procesams modeliuoti, geriausiai tiko stabilusis Pareto dėsnis ir kaip vieną iš savo rekomendacijų jis numatė EMH ir MPT modelių persvarstymo būtinybę. Sharp'as bei Fama ir Miller [44] savo knygose skyrė po visą skyrių stabiliojo Pareto dėsnio apžvalgai ir aptarė būtinybę modifikuoti klasikinę portfelio teoriją [114].

Didelę įtaką šiuolaikinei matematinės ekonomikos teorijai turėjo Black'o–Scholes'o modelis [17] (autoriai Fisher'is Black'as, Myron'as Scholes ir Robert'as C. Merton'as). Septintojo dešimtmečio pabaigoje Black'as ir Scholes'as nustatė europietiškojo pirkimo opciono racionaliąją vertę. Už šį darbą jie 1997 metais gavo Nobelio ekonomikos premiją. Šios formulės atsiradimas paskatino naujus teorinius tyrinėjimus. Statistikoje buvo sukurtos atsitiktinių procesų dispersijos augimo greičių vertinimo metodikos, o skaitiniuose metoduose buvo atlikti atitinkamų diferencialinių lygčių klasių sprendimo tyrimai. Nuo 1973 metų, kai Čikagoje buvo atidaryta pirmoji opcionų birža, finansų rinkoje labai išaugo prekyba išvestiniais vertybiniais popieriais. Kaip bebūtų, tačiau išvestiniai vertybiniai popieriai yra viena iš geriausių priemonių sudaryti spekuliacines situacijas, iš kurių galima gauti didžiulį pelną arba patirti didžiulius nuostolius.

Kartu su Black'o–Scholes'o modeliais vystėsi ir Ross'o arbitražinė įkainojimo teorija [131], kuri apibendrino CAPM ir buvo pagrįsta standartine ekonometrikos teorija, kuri remiasi baigtinės dispersijos ir kitomis prielaidomis. Per pastaruosius kelis dešimtmečius matematinė finansų teorija vystėsi įvairiomis kryptimis, o ekonometriniai modeliai tapo standartu įvairaus lygio institucijose. Autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo (ARCH) Engle'o procesai [114], nors jie ir rėmėsi trumpalaikės atminties ir rinkos efektyvumo hipotezėmis, tapo daugelio populiarių modelių pagrindu (tokių kaip GARCH ir kt.).

2.2. Klasikiniai portfelio sudarymo modeliai

Investicinis portfelis yra efektyvus būdas padidinti savo ilgalaikę laukiamą grąžą ir sumažinti finansinę riziką, jei investuojama akcijų rinkoje. Vietoje investicijos į vieną akciją, investuotojas gali suformuoti subalansuotą akcijų portfelį. Vertybinių popierių portfelis jau kelis pastaruosius dešimtmečius sulaukia ypatingo dėmesio tiek finansų analizės [121], tiek ir matematinės bei taikomosios statistikos [53] literatūroje.

Markowitz'o (1952, 1959, 1987 m. ir kt.) darbai buvo svarbūs formuojantis moderniajai vertybinių popierių portfelio teorijai. Jis aprašė, kaip racionalus investuotojas gali suformuoti optimalų v.p. portfelį, esant neapibrėžtumui. Plačią Markowitz darbų apžvalgą galima rasti Constantinides ir Malliaris [28]. Portfelio grąžos vidurkis ir dispersija (angl. *mean–variance*) apibrėžia pelną ir riziką, susijusią su konkrečia investicija. Markowitz'as parodė, kad tikėtinos naudos maksimizavimas racionaliam investuotojui leis suformuoti optimalų portfelį atsižvelgiant į abu faktorius – pelną ir riziką. Jis apibrėžė nedominuojamą portfelį, kaip efektyvų, tai yra, turintį maksimalų pelną iš visų galimų, esant fiksuotai rizikai (dispersijai) ir atvirkščiai – turintį mažiausią riziką, esant fiksuotam (pasirinktam) laukiamam pelnui. Norėdami išrinkti tokių efektyvių portfelių aibę iš visų galimų portfelių, turime suformuluoti ir išspręsti parametrinį kvadratinio optimizavimo uždavinį (angl. *quadratic program*). Tokia aibė atidėta grafike rizika–vidurkis nubrėžia efektyvių portfelių kreivę (angl. *efficient frontier*). Hanoch ir Levy [61] nustatė, kad vidurkio–dispersijos (V-D) kriterijus yra efektyvus optimalumo kriterijus kiekvieno investuotojo naudos funkcijos grąžoms, pasiskirsčiusioms pagal normalųjį dėsnį. Alternatyvių naudos funkcijų panaudojimą ištyrė Kallberg and Ziemba [71]. Jie parodė, kad portfeliai su „panašiais" rizikos vengimo indeksais turi „panašią" struktūrą, bei, kad atsižvelgiant į investuotojo naudingumo funkcijos formą ir parametrus V-D analizei pakanka apsiriboti apibendrintomis įgaubtomis Von Neumann–Morgenstern tipo naudingumo funkcijomis.

Dešimtajame dvidešimto amžiaus dešimtmetyje keletas tyrėjų pasiūlė alternatyvius portfelio rizikos matus, kurių daugelis buvo realizuojami tiesinio programavimo metodais. Alternatyvių portfelio parinkimo modelių apžvalga 2000 metais buvo išspausdinta Horniman ir kt. [66]. Konno ir Yamazaki [78], laikydamiesi grąžų daugiamačio normalumo sąlygos, parodė, kad vidutinio absoliutinio nuokrypio (angl. *Mean Absolute Deviation*, MAD) rizikos matas yra ekvivalentiškas dispersijos modelio matui. Speranza [138] patobulino MAD modelį, skaičiuodamas tik neigiamų nuokrypių vidurkį (pusiau dispersiją). Dar 1959 metais Markowitz'as [101] pusiau dispersiją laikė dėmesio vertu matu, tačiau dispersija kaip rizikos matas buvo pasirinkta dėl interpretavimo paprastumo, o informatyvumo prasme jie beveik nesiskyrė. Neigiamų nuokrypių matai dažniausiai yra naudojami dinaminėms aktyvų pasiskirstymo problemoms spręsti. Dinaminių modelių klasifikaciją galima rasti Cariño ir Ziemba [23] ir Zenios [151] darbuose. Minimalią viso stebėjimo laikotarpio portfelio grąžą (arba maksimalų nuosmukį) Young [161] siūlė taip pat naudoti kaip rizikos matą. Pradinio kvadratinio programavimo uždavinio supaprastinimai leido įtraukti į modelį įvairius rinkos netobulumus, leidžiančius padidinti modelių adekvatumą realiai rinkai. Rudd ir Rosenberg [132] įvedė sandorių kaštus, tiesiškai priklausančius nuo aktyvo kainos. Konno ir Yamazaki [78] teigia, kad MAD yra pranašesnis tuo, kad jis apriboja laikomų akcijų skaičių, o tuo pačiu jų kaštus. Adcock and Meade [3] apjungė sandorių kaštų funkcijos modulį ir kvadratinę tikslo funkciją, o Young [161] aprašė kaip į minimaksinį modelį įtraukti tiesinius sandorių kaštus.

Dauguma teorinės ir empirinės finansų teorijos koncepcijų, ištobulintų per pastaruosius kelis dešimtmečius, remiasi prielaida, kad aktyvų duomenų sekos yra iš normaliosios imties. Remiantis šia prielaida buvo grindžiamas vidurkio–dispersijos (V-D) analizės reikalingumas. Samuelson (1969) ir Merton (1969), pasinaudodami normalumo prielaidomis įrodė, kad idealios rinkos atveju investuotojas su pastoviu rizikos toleravimu portfelio sudėties nekeičia (trumpu laikotarpiu). Norėdami nustatyti, kaip keičiasi investuotojo preferencijos modeliuojant grąžas. Žymus ekscesas duomenyse aprašytas Mandelbrot [93, 94] ir Fama [41] tyrimuose leido jiems atmesti normalumo hipotezę ir pasiūlyti aktyvų grąžas modeliuoti pagal stabilųjį Pareto dėsnį. Be to, dauguma naujausių tyrimų (pvz. žr. [63, 84, 120]) parodė, kad autoregresinių modelių liekanos, skaičiuojamos finansinei sekai vienos dienos intervalu, nėra pasiskirsčiusios pagal Gauss'o dėsnį. Bertocchi et al. [14] savo darbe pristatė daugiaperiodinį portfelio parinkimo problemos sprendimo būdą, atmesdami normalumo sąlygas ir taikydami įvairius alternatyvius dėsnius. Portfelio evoliuciją jie siūlo modeliuoti kaip AR(1)-GARCH(1,1) procesą. Tokio proceso standartizuotas paklaidas jie aproksimavo Gauss'o, Stjudento t_3 arba stabiliuoju dėsniu ir tikrino atitinkamas suderinamumo hipotezes. Portfeliui sudaryti jie generavo tris skirtingus scenarijus, o riziką skaičiavo kaip VaR arba CVaR bei laipsninį absoliutinį nuokrypį. Taikydami Modeliuojamojo Atkaitinimo (MA, angl. *simulated annealing*) algoritmus jie surado optimalius portfelius kiekvienu atveju. Bertocchi et al. [14] analizuodami S&P500, DAX30 ir CAC40 indeksus (panašiai kaip Boender [18] ir Tokat, Rachev ir Schwartz [146]) ir liekanas laikydami ne būtinai normaliosiomis nustatė, kad Stjudento t_3 bei α-stabilusis dėsniai žymiai geriau nei Gauss'o aprašo paklaidų pasiskirstymą minėtame modelyje. Jų analizės rezultatai leido patobulinti kai kuriuos daugiaperiodinius stochastinius portfelio sudarymo modelius (žr. Dupacovà [38], Zenios and Ziemba[152]).

Daugumos valstybių įstatymai vertybinių popierių verslui rizikos apribojimus nurodo kaip nuostolių pasiskirstymo percentilius. Viršutinis nuostolių pasiskirstymo percentilis yra vadinamas „rizikuojamąja verte" (angl. *Value-at-Risk*) ir žymimas VaR. Pagal apibrėžimą VaR yra atitinkamas nuostolių pasiskirstymo dėsnio percentilis, t.y. su tam tikru pasikliovimo lygmeniu γ, portfelio γ-VaR yra tam tikras mažiausias ς pinigų kiekis, kad su tikimybe γ, nuostoliai bus ne didesni nei ς. Įstatymų reikalavimai nurodo, kad VaR dydis turi būti nurodomas kaip tam tikra kapitalo dalis[1]. Pavyzdžiui, 95%-VaR nurodo viršutinę tikėtinų nuostolių ribą su 5% tikimybe. VaR modelio populiarumą nulėmė jo interpretacijos paprastumas (Puelz [118] darbe galima rasti plačią apžvalgą). Šį modelį labai patogu ir efektyvu taikyti bei valdyti, kai riziką įtakojantys faktoriai yra pasiskirstę pagal normalųjį (log-normalųjį) dėsnį. Plačiau apie rizikos valdymą naudojant VaR galima rasti Jorion 1997 metų darbe [70]. Tuo tarpu ne Gauss'o dėsnių atveju VaR netenka kai kurių savo savybių[6], tokių, kaip subadityvumas. Pavyzdžiui, portfelio iš dviejų instrumentų VaR gali būti didesnis nei dviejų individualių instrumentų VaR suma, t.y. portfelio diversifikacija gali padidinti maksimalius nuostolius (VaR) [86]. Taipogi, VaR yra sunku taikyti esant diskretiems dėsniams. Šiuo atveju VaR funkcija nėra įgaubta ir glodi bei gali turėti keletą lokalių ekstremumų. Įvairių VaR modeliavimo aspektų ir skaičiavimo metodologijų galima rasti *http://www.gloriamundi.org*. Dauguma VaR skaičiavimo būdų priklauso nuo portfelio rizikos mato tiesinio aproksimavimo. VaR skaičiavimuose paprastai yra priimama rinkos parametrų normalumo (log-normalumo) hipotezė (žr. Puelz literatūros sąrašą [118]). Taip pat gali būti panaudotas Monte Carlo modeliavimas, ypač, kai portfelio ribojimai yra sudaryti iš netiesinių instrumentų, tokių, kaip opcionai [118].

Nors rizikos su percentiline funkcija valdymas ir yra labai svarbi ir reikšminga tyrimų sritis (tai rodo darbų gausa, žr. pvz. Puelz [118]), reikalingų dimensijų (virš šimto instrumentų ir virš tūkstančio scenarijų) ir efektyvių optimizavimo algoritmų vis dar trūksta. Kita vertus, egzistuojantys efektyvūs portfelio formavimo algoritmai[2], neleidžia tiesiogiai kontroliuoti (t.y. neįmanoma įvesti apribojimų pasiskirstymo funkcijai, VaR prasme, nepabloginant algoritmų efektyvumo) pasiskirstymo dėsnio percentilių (šio trūkumo neturi vidutinio absoliutinio nuokrypio modelis [78] bei jam skirtas optimizavimas [31], ir minimaksinis modelis [161]). Išvardinti faktai pastūmėjo [86] darbo autorius sudaryti naujus optimizavimo algoritmus bei pasiūlyti naują percentilinį rizikos matą (alternatyvą VaR), vadinamą sąlygine rizikuojamąja verte (angl. *Conditional Value-at-Risk* arba CVaR), kuris yra artimas VaR matui. Tolydiems dėsniams CVaR yra apibrėžiamas kaip sąlyginis laukiamas nuostolis su sąlyga, kad jis (nuostolis) peržengs VaR ribą (žr. Rockafellar ir Uryasev [127]). Šis rizikos matas dar yra žinomas kaip: vidutinis perteklinis nuostolis (angl. *Mean Excess Loss*), vidutinis trūkumas (angl. *Mean Shortfall*) bei uodegų vertė esant rizikai (angl. *Tail Value-at-Risk*) matas (esant tolydiems dėsniams). Bendru atveju, įskaitant ir diskrečius dėsnius, CVaR aprašomas kaip VaR ir griežtų nuostolių, viršijančių VaR vidurkis (su svoriais) [127]. Acerbi [2] darbe pavyko apibendrinti CVaR teoriją sukuriant laukiamo nuostolio rizikos mato teoriją. Ryšys tarp VaR ir CVaR matų yra nagrinėjamas ir paaiškinamas Artznerio [6]. Bendru atveju CVaR, kuri yra išvedama panaudojant VaR rizikos matą, turi daugiau teigiamų savybių nei VaR: CVaR rizikos funkcija yra subadityvi ir įgaubta [127]. Toks CVaR interpretavimo nuoseklumas pirmą kartą buvo pastebėtas austrų mokslininko Pflug'o [115], taip pat ir Rockafellar ir Uryasev [128] ir Acerbi et al. [2] darbuose.

Nors CVaR ir netapo standartu (tuo metu) finansų industrijoje, savo nišą jam pavyko rasti

[1]Pavyzdžiui, 1998 metais Basle Capital Accord asociacija pasiūlė iš bankų, greta kapitalo, reikalauti ir VaR įverčių, o National Association of Insurance Commissioners (NAIC) komisija taip pat reikalauja į pranešimus įtraukti VaR.

[2]Efektyvumas pasiekiamas tik naudojant tiesinio programavimo (angl. *linear programming* – (LP) technologijas LP optimizavimo algoritmai yra įdiegti daugelyje komercinių ir nekomercinių matematinių programinių paketų. Jie leidžia palyginti efektyviai spręsti didelius (su milijonais kintamųjų ir scenarijų–apribojimų) uždavinius. Diskretūs apribojimai tiesinio programavimo uždaviniuose taip pat gali būti gana nesunkiai interpretuojami (palyginus su kvadratiniu ar netiesiniu programavimu). Kaip bebūtų prieš dešimtmetį išrastas vidinio taško algoritmas veikia gana efektyviai ir LP ir kvadratiniame portfelio optimizavime (pvz. žr. Duarte [34]). Įvairių finansų srities optimizavimo algoritmų galima rasti Ziemba ir Mulvey [154] bei jų darbo bibliografijoje.

draudimo srityje. Panašūs į CVaR matai buvo pristatyti stochastinio programavimo literatūroje. Skaičiuojamieji eksperimentai parodė, kad dažniausiai CVaR minimizavimas duoda ir VaR modelio optimalų sprendinį, nes VaR niekada neviršija CVaR dydžio [127]. Todėl portfeliai su mažu CVaR visada turės mažą VaR. Rockafellar ir Uryasev [127] parodė, kad jei grąžos–nuostoliai yra normalieji, tai CVaR ir VaR yra ekvivalentūs rizikos matai, t.y. jie duos visiškai tą patį optimalų portfelį. Tuo tarpu asimetriškiems dėsniams CVaR ir VaR optimalūs portfeliai gali būti skirtingi. Sprendinys, gautas minimizuojant VaR, gali būti iš didesnių kvantilių srities nei pats VaR. Rockafellar ir Uryasev savo dažnai cituojamame darbe [127] parodė, kad uždaviniai su CVaR rizikos matu gali būti sprendžiami tiesinio optimizavimo metodais (žr. taip pat Uryasev [148]), o [86] šių metodų pagrindu sudarytas technologijas pritaikė S&P100 portfeliui optimizuoti, ir pastebėjo, kad šios technologijos yra efektyvios skaičiuojamuoju požiūriu ir išlieka stabilios plačiai nuostolių pasiskirstymo dėsnių klasei. Nemažai šios srities tyrimų parodė, kad rizikos optimizavimas su CVaR tipo naudingumo funkcijomis leidžia spręsti didelės apimties uždavinius (tiek aktyvų skaičiaus tiek ir scenarijų prasme) su palyginti nedideliais skaičiavimo resursais [86]. Pavyzdžiui, darbe [127] pateikiamas nesudėtingas CVaR algoritmas opcionų portfelio hedžingui.

Tuomet, kai ribojimai yra sudėtingi, o tikslo funkcija turi keletą lokalių ekstremumų, kartu su evoliuciniais, MA ir tabu paieškos algoritmais [138] gali būti taikomas slenksčio priimtinumo metodas (angl. *threshold accepting*). Šį algoritmą pasiūlė Dueck ir Winker [35], o VaR ir tikėtinų nuostolių tipų rizikai optimizuoti pritaikė Gilli ir Këllezi [55]. Armañanzas ir Lozano [5] daugiakriterinei portfelio problemai spręsti taikė godžiosios paieškos (angl. *greedy search*), modeliuojamojo atkaitinimo ir skruzdžių kolonijos euristine paradigma pagrįstas procedūras.

2.3. Stabiliųjų modelių taikymas finansų rinkoms modeliuoti

Ekonominiams ir finansiniams procesams aprašyti dažniausiai taikomi modeliai, kuriuose laikomasi duomenų normalumo hipotezės (pasiskirstymo pagal Gauss'o dėsnį). Tai reiškia, kad tam tikras finansinį instrumentą apibūdinantis dydis gali būti modeliuojamas Wiener'io procesu, o jo kitimas atitiktų Brown'o judesį. Tačiau finansiniai duomenys neretai pasižymi asimetrija, ekscesu ir dideliais nuokrypiais [63, 121, 133], todėl modeliai paremti duomenų normalumo sąlyga realių duomenų analizei dažniausiai yra netinkami. Daugiausiai dėl šių priežasčių Gauss'o modeliai keičiami stabiliaisiais. Stabilieji dėsniai pasižymi tiek leptokurtotiškumu, tiek asimetrija [45] ir todėl geriau nei normalusis skirstinys tinka aprašyti empirinius duomenis. Be to, stabilieji atsitiktiniai dydžiai tenkina Apibendrintą Centrinę Ribinę Teoremą (ACRT), kuri teigia, kad stabilieji dėsniai yra vieninteliai atitinkamai centruotų ir normuotų bei nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumų asimptotiniai skirstiniai [79]. Stabiliųjų dėsnių taikymo finansų inžinerijoje žinovas prof. S. Rachev [14, 63] teigia: „<...> α-stabilieji dėsniai siūlo protingą jei ne geriausią patobulinimą iš visų alternatyviųjų skirstinių, kurie buvo pasiūlyti literatūroje per pastaruosius keturis dešimtmečius <...>". Todėl vis dažniau verslo, draudimo, finansinių rinkų, stichinių nelaimių ir avarinių reiškinių aprašymui yra naudojami matematiniai modeliai pagrįsti stabiliaisiais procesais.

Pirmasis stabiliųjų dėsnių pritaikymas įvyko dar 1919 metais, tačiau pati sąvoka buvo įvesta P. Lévy tik 1925 metais [88]. Danų astronomas J. Holtsmark [65] publikavo darbą kuriame buvo nagrinėjamas gravitacinio žvaigždžių lauko atsitiktinių fluktuacijų tikimybinis dėsningumas ir kaip vėliau paaiškėjo atrastasis Holtsmark skirstinys (žinomas jo vardu) yra sferinis (trimatis) simetrinis stabilusis dėsnis su $\alpha = 3/2$. Dar prieš du šimtmečius Poisson, o vėliau ir Cauchy (1853), atkreipė dėmesį į pasiskirstymą, vėliau pavadintą Koši (Cauchy) skirstiniu, kuris priklauso stabiliesiems dėsniams ($\alpha = 1$). Stabiliųjų dėsnių sąvoka galutinai nusistovėjo apie 1937 metus ir yra siejama su Lévy [89] ir K. Chinchin monografijomis [26]. Tuomet jau buvo žinoma, kad išskyrus keletą atskirų atvejų, stabilieji dėsniai neturi išreikštinio pavidalo tankio ir pasiskirstymo funkcijų. Tai labai apsunkina teorinius ir praktinius šios skirstinių šeimos taikymus.

Viena iš pagrindinių stabiliųjų dydžių taikymo sričių yra nepriklausomų ir silpnai priklausomų atsitiktinių dydžių sumų ribinių teoremų teorija. Šie dėsniai pasitaiko atsitiktinių procesų teorijoje, atsitiktinių matricų teorijoje ir t.t. Praktikoje šie skirstiniai dažniausiai sutinkami fizikoje (kvantinėje mechanikoje, elementariųjų dalelių fizikoje), pavyzdžiui temperatūrų pasiskirstymo atominiame reaktoriuje arba įtampų pasiskirstymo kristalinėje gardelėje uždaviniuose; radiotechnikoje ir elektronikoje; ekonomikoje ir sociologijoje.

Stabiliųjų dėsnių reikšmė yra labai didelė, dėl vienos fundamentalios priežasties – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių tolydžių atsitiktinių dydžių sumos ribinis dėsnis yra stabilusis ir tiktai stabilusis [57]. Atsitiktinių dydžių sumos labai dažnai pasitaiko įvairiose srityse. Stabilieji skirstiniai neturi baigtinės dispersijos (išskyrus vieną atvejį, kai $\alpha = 2$) ir tai labai įtakoja jų statistinių taikymų aspektus. Jei stabiliojo a.d. $\alpha < 2$, tai reiškia begalinę dispersiją, t.y. galima tikėtis stebėjimų su dideliais nuokrypiais, kurie savo ruožtu stipriai įtakoja a.d. sumas. Tačiau šių stebėjimų negalima atmesti kaip matavimo ar kitokių klaidų, nes jų pašalinimas visiškai iškraipo pradinių duomenų esmę, juolab šie stebėjimai gali būti patys svarbiausi. Didelių nuokrypių tikimybė yra tokia didelė, kad standartiniai statistikos metodai, grindžiami skirstinių su baigtine dispersija asimptotine teorija, yra nepritaikomi, netgi tais atvejais kai turimos labai didelės duomenų imtys. Tokie atvejai reikalauja kitokių matematinių modelių. Visa tai leido Mandelbrot pasiūlyti panaudoti stabiliuosius modelius pajamų ir spekuliacinių kainų pasiskirstymams modeliuoti [91, 93]. Mandelbrot [93] ir Fama [42] pirmieji pradėjo nagrinėti stabiliųjų dėsnių parametrų vertinimo problemą (taikė grafinius metodus parametro α vertinimui).

Visai neseniai buvo pastebėta, kad stabiliaisiais dėsniais taip pat galima aprašyti ir modeliuoti kompiuterinių tinklų užimtumą. Ši problema ypač aktuali didesnių tinklų administratoriams ir operatoriams, turintiems ne vieną šimtą ar tūkstantį vartotojų. Tinkamai sumodeliavus kompiuterinio tinklo darbą galima adekvačiai prognozuoti, o tuo pačiu ir optimizuoti resursų poreikį [160].

Buvo parodyta [32], kad kino verslo pajamos yra gerai modeliuojamos stabiliaisiais skirstiniais. Šių skirstinių asimetrija ir uodegos pakankamai gerai aprašo kino industrijos pajamas, kino aktorių sutarčių ekonomiką ir panašiai. Pavyzdžiui, tikimybė kino filmui su super žvaigždėmis gauti didelį pelną yra gerokai didesnė nei kitoms juostoms, o, be to, šie filmai priskiriami mažesnės rizikos grupei ir jiems gauti finansavimą yra daug lengviau.

Akcijų kainų grąžų modeliavimas ir prognozavimas yra svarbus stabiliųjų dėsnių pritaikymas. Grąžų pasiskirstymas ypač domina ekonomistus ir rinkos analitikus. Akcijų kainų grąžų modeliavimo stabiliaisiais dėsniais idėją (tuo metu novatorišką) pasiūlė B. Mandelbrot [93], o Fama [41] parodė, kad stabilieji dėsniai iš tikrųjų aprašo logaritmų pokyčių pasiskirstymą geriau nei normalusis dėsnis, nes labai didelių ir labai mažų pokyčių tikimybės gerokai didesnės nei normaliojo dėsnio atveju. Empiriniai tyrimai [48] parodė, kad šie pasiskirstymai gali būti asimetriški, kaip ir numanė Mandelbrot. Asimetriškumo egzistavimas turi labai didelę įtaka vertybinių popierių portfelio sudarymui. Rachev savo naujausiuose darbuose parodė, kad perėjus nuo modelių, kuriuose aktyvų grąžos yra iš normaliosios imties, prie stabiliųjų, galima tikėtis iki aštuonių kartų geresnių finansinių rezultatų [33].

Finansinių sekų grąžos stabilumo prielaida stipriai įtakoja finansų teoriją ir ekonometriką [122]. Portfelio parinkimo problemą nagrinėjo Fama [43], Ziemba [153], Bawa, Elton ir Gruber [10], Press [116], Chamberlain, Cheung ir Kwan [25], Cheng ir Rachev [26]. Rizikos vadybos klausimus tyrinėjo Gamrowski ir Rachev [53], Mittnik ir Paolella [106], Bassi, Embrechts ir Kafetzaki [9]. Kartu su stabiliomis grąžomis buvo nagrinėjamas ir išvestinių vertybinių popierių vertinimas (Rachev ir Samarodnitsky [124], Rachev ir Ruschendorf [123], Karandikar ir Rachev [73], Janicki ir kt. [68], Campa, Chang ir Reider [22], Hurst, Platen ir Rachev [67], Dostoglou ir Ratchev [33]). Specifinius ekonometrikos uždavinius nagrinėjo Rachev, Kim ir Mittnik [119]. Nolan ir Fofack [50] parodė, kad stabilieji dėsniai puikiai tinka ir besivystančių šalių, bei „juodosios rinkos" valiutų kursų pokyčių pasiskirstymo modeliavimui.

Stabilieji dėsniai neturi išreikštinio pavidalo (su nedaugeliu išimčių), o skaitinės aproksimacijos arba tiesioginis skaitinis integravimas yra netrivialūs ir reikalauja daug skaičiavimų laiko. Todėl didžiausio tikėtinumo parametrų vertinimo algoritmą, pagrįstą aproksimacijomis, yra sudėtinga taikyti, ypač didelėms imtims, kurios dažnai pasitaiko finansų analizėje. Dėl skaičiavimų sudėtingumo yra labai mažai tyrinėjimų, lyginančių didžiausio tikėtinumo įverčius su kitais metodais gautais įverčiais. Kitokius metodus parametrams vertinti nagrinėjo Mandelbrot, Fama ir Roll [46], DuMuchel, Brorsen ir Yang [19], Press [117], Leitch ir Paulson [111], Koutrouvelis [81,82], Weron ir kiti. Iškyla klausimas apie MTM ir kitokių metodų palyginimą vertinant stabiliųjų dėsnių parametrus.

2.4. Finansinių sekų stabilumo tyrimas

Duomenų pasiskirstymo dėsnio nustatymas yra sudėtingas statistinio tyrimo etapas. Yra žinoma keletas būdų nustatyti, ar duotoji seka yra iš stabiliosios imties. Bene paprasčiausia yra patikrinti neparametrinę suderinamumo hipotezę apie stabiliojo modelio su įvertintais parametrais adekvatumą Andersono–Darlingo ar Kolmogorovo–Smirnovo kriterijais (žr. Rachev [14,63], Weron [157] ir kitus darbus). Kita vertus pradedant vertinti vieno ar kito dėsnio parametrus būtų korektiška patikrinti ar duomenų seka tenkina stabilumo reikalavimus. Tam visiškai pakanka nustatyti, ar seka priklauso stabiliųjų dėsnių traukos zonai ir visai nebūtina žinoti nei dėsnio parametrų nei pasiskirstymo funkcijos. Metodas skirtas nustatyti, ar seka yra stabilioji, yra dalinių sumų ir pilnosios sekos homogeniškumo nustatymo metodas, kuris remiasi fundamentaliąja stabiliųjų dėsnių teorema [12,75]. Norint parodyti, kad seka yra iš Pareto dėsnių šeimos, gali būti taikomas baigtinės dispersijos metodas, pasiūlytas [60, 107] ir nagrinėtas [50, 51].

Stochastinis procesas $\{X(t), \forall t \in T\}$ yra stabilus, jei visi jo baigtiniamačiai skirstiniai yra stabilūs. $\{X(t), \forall t \in T\}$ yra α-stabilus tada ir tik tada jei visos tiesinės kombinacijos

$$\sum_{k=1}^{d} b_k X(t_k),$$

yra α-stabilios, čia $d \geqslant 1$, $t_1, t_2, \ldots, t_d \in T$, $b_1, b_2, \ldots, b_d$ – realūs skaičiai. α-stabiliojo proceso pavyzdžiu galėtų būti α-stabilus Lévy procesas.

Stochastinis procesas $\{X(t), \forall t \in T\}$ yra vadinamas Lévy judesiu (procesu) jei:

- $X(0) = 0$ (beveik tikrai),
- X turi nepriklausomus pokyčius.
- Pokyčiai $X(t) - X(s)$ yra stacionarūs, visiems $0 \leqslant s < t < \infty$.

Jei pokyčiai yra pasiskirstę pagal α-stabilųjį dėsnį, tai laikoma, kad toks procesas yra α-stabilus Lévy procesas.

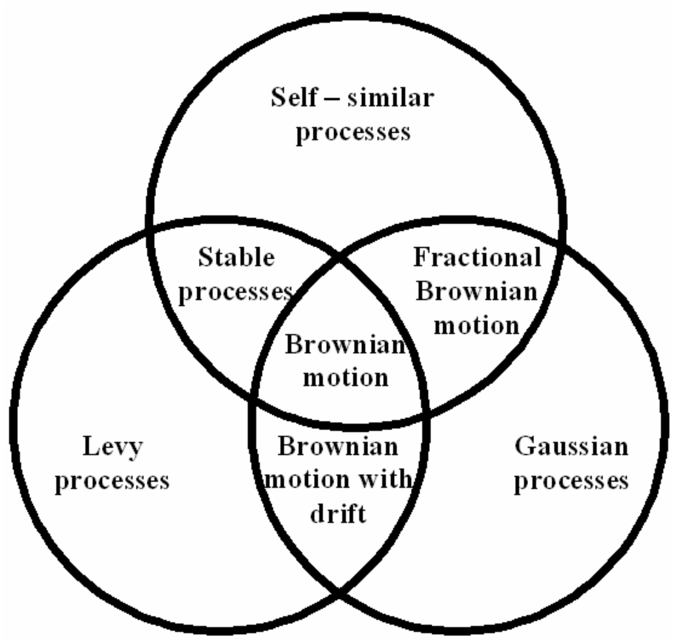
2.5. Finansinių sekų savastingumas ir multifraktališkumas

Atsižvelgiant į 2.3 skyrelyje išvardintus faktus grąžų kitimo procesui, siejamam su Brown'o judesiu, modeliuoti buvo pradėti taikyti stabilieji procesai, Lévy judesys, Fraktalinis Brown'o (FB) judesys [29], o tai pat ir multifraktaliniai bei savastingi procesai. Kartu su Pareto savybe daugelis finansinių sekų pasižymi savastingumo arba fraktališkumo savybe. Ši savybė reiškia, kad duomenų suglodinimas skirtingais masteliais nekeičia arba mažai keičia duomenų struktūrą. Tarkime, kad $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ yra Lévy procesas. Tada X yra savastingas tada ir tik tada, jei kiekvienas $X(t)$ yra griežtai stabilus [39]. Stabilumo indeksas α ir Hurst'o eksponentė H savastingiems procesams tenkina sąlygą

$$\alpha = 1/H. \tag{2.1}$$

Iš 2.1 paveikslo galima pastebėti, kad tam tikras procesas bus stabilusis, jei jis būs savastingas

Lévy procesas.



Paveikslas 2.1: Savastingųjų procesų ryšys su Levy ir Gauso procesais.

Yra keletas neekvivalenčių savastingumo apibrėžimų [144]. Dažniausiai naudojamas teigia, kad tolydaus laiko procesas $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ yra savastingas, su savastingumo parametru H, jei jis tenkina sąlygą:

$$Y(at) \stackrel{d}{=} a^H Y(t), \quad \forall t \in T, \quad \forall a > 0,\ 0 \leqslant H < 1$$

kur lygybė $\stackrel{d}{=}$ suprantama pasiskirstymo funkcijų prasme. Kadangi procesas $Y(t)$ niekada nebūna stacionarus, paprastai laikoma, kad jis turi stacionarius pokyčius [29]. Kanoninis tokio proceso pavyzdys yra Brown'o judesys ($H = \frac{1}{2}$).

Bendru atveju tolydaus laiko procesas $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ yra multifraktalinis, jei jis tenkina sąlygą:

$$Y(at) \stackrel{d}{=} M(a)Y(t), \quad \forall t \in T, \quad \forall a > 0,$$

kur lygybė $\stackrel{d}{=}$ suprantama pasiskirstymo funkcijų prasme.

Dažniausiai naudojama savastingumo charakteristika yra Hurst indeksas. Kai rodiklis $0,5 < H \leqslant 1$ sakoma, kad procesas yra su ilga atmintimi, o kai $0 \leqslant H < 0,5$ laikoma, kad procesas yra ergodinis. Šiam rodikliui įvertinti yra nemažai būdų, tačiau dažniausiai literatūroje yra minimi šie [72]:

a) vertinimo metodai pagrįsti laiko sekų analize: absoliutinių reikšmių metodas (angl. *Absolute Value*) arba absoliutinių momentų (angl. *Absolute Moments*)[143–145]; dispersijos metodas (angl. *Variance*) arba agreguotos dispersijos (angl. *Aggregate Variance*)[141, 143, 145]; R/S metodas [96–98, 143, 145]; modelio liekanų dispersijos metodas (angl. *Variance of Residuals*) [113, 145].

b) metodai paremti dažninėmis/banginėmis procesų savybėmis: periodogramos metodas [54, 143, 145]; Whittle metodas [52, 145]; Abry–Veitch metodas [1, 72].

Aukščiau išvardinti Hurst rodiklio įverčiai gali būti apskaičiuoti naudojant laisvai platinamą programinę priemonę SELFIS [134].

Hurst rodiklio reikšmė $\frac{1}{2}$ rodo, kad tokio proceso kintamumas auga kaip $\sqrt{t}$ (čia t yra laikas) greičiu. Deja, tiriant realius finansinius duomenis paaiškėja, kad augimo tempas (Hurst rodiklis) yra kitoks [12, 114].

Šiame darbe yra laikoma, kad grąžos yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal tam tikrą skirstinį. Tačiau, kaip rodo praktiniai tyrimai, neretai finansinėms sekoms Hurst indeksas yra iš intervalo $0,5 < H \leqslant 1$, o tai reiškia, kad jose egzistuoja tam tikra tolima priklausomybė. Ši priklausomybė ypač išryškėja kai yra tiriamos ne pačios grąžos, o įvairios jų trasformacijos (absoliutiniai didumai, kvadratai ir pan.), tačiau ši priklausomybė turi prasmę tik tada kai grąžų sekos turi atitinkamą (antrąjį) momentą [56]. Kadangi darbe plačiau nagrinėjami stabilieji ne Gauss'o modeliai, tai ši tolima priklausomybė ignoruojama.

2.6. Esamos programinės įrangos apžvalga

Tiriant sudėtingus finansų procesų modelius, susiduriama su programinės įrangos trūkumu (ypač stabiliųjų modelių). Mat modeliai būna realizuoti naudojant skirtingas platformas, todėl duomenis tenka mechaniškai perkėlinėti iš vieno programos lango į kitą, atlikti jų analizę, o rezultatus vėl suvedinėti naujame lange. Be to, beveik nėra programinės įrangos, realizuotos hipertekstinėje aplinkoje (internetinėje svetainėje). Programinės įrangos realizavimas internetinėje svetainėje suteiktų vartotojams galimybę plačiai naudotis jos teikiamais privalumais. Iš esmės tokių programinių priemonių reikalingumą iliustruoja vien tai, kad Google paieškos sistema internete suranda virš 3 milijonų tinklapių skirtų finansinių–investicinių sprendimų programinei įrangai. Deja, dauguma iš jų skirti tik specifiniams uždaviniui spręsti ir nėra tinkami platiems tyrimams atlikti. Kita vertus yra kuriamos sistemos, kurias galima tobulinti papildant naujais moduliais (modeliais). Bene dažniausiai pasitaiko *Ad-ins* tipo paprogramių, skirtų Microsoft Excel, sukurtų programuotojų mėgėjų, neretai pagal vienos ar kitos korporacijos užsakymus.

Toliau pateikiami keleto įdomiausių tinklapių aprašymai, sugrupuoti pagal tinklapių tipą.

2.6.1. Tinklapiai su nuorodomis į kitų kūrėjų (kompanijų) puslapius ir jų aprašymais

Ši tinklapių grupė išsiskiria iš kitų tuo, jog čia pateikiama sukoncentruota programinės įrangos apžvalga. Neretai pakanka peržiūrėti sąrašą ir iš jo galima išsirinkti tinkamą produktą.

bobsguide.com Vienas iš bene įdomiausių ir labai daug aprėpiančių tinklapių su nuorodomis. Šiame tinklapyje programinė įranga sugrupuota pagal poreikius. Tarkime, rizikos valdymo programinė įranga grupuojama pagal kompanijas, kurios kuria įrangą analizuojančią ir padedančią valdyti riziką. Tai aktyvų ir pasyvų valdymas; rizikos analitika; rizikos duomenų bazės; rizikos valdymo konsultavimas; užstatų valdymas; ribinės sistemos; kredito rizika; operacijų rizika; rinkos rizika; rizikos valdymo sistemos; likvidumo rizika; korporacinė rizika; priemonės skirtos kovoti su pinigų plovimu.

Deja, nepavyko rasti tinklapių skirtų stabiliųjų ir su jais susijusių modelių programinei įrangai.

Download3K.com Pateikiama įvairios (virš 600 produktų) įrangos aprašymų nuo kainų kitimo stebėjimo iki analizės ir prognozių. Taipogi, galima atsisiųsti bandomąsias arba pilnas (komercines) programinės įrangos versijas. Tačiau nepavyko rasti įrangos skirtos stabiliųjų ir su jais susijusių modelių taikymui.

StatPages.net Pateikiama virš 600 nuorodų į tinklapius atliekančius statistinius skaičiavimus arba kur galima įsigyti/rasti tokios įrangos. Bet nepavyko rasti įrangos skirtos stabiliųjų ir su jais susijusių modelių statistinei analizei.

InvestmentSeek.com Paieškos sistema skirta programinės įrangos ir mokslinės–šviečiamosios literatūros orientuotos į portfelio analizę paieškai.

toolsformoney.com Įvairių programinių priemonių aprašymas ir ekonomikos–finansų teorijos pagrindai.

topshareware.com Paieškos sistema ieškanti programinės įrangos.

2.6.2. Profesionalūs programinės įrangos kūrėjai, besiorientuojantys į finansinių produktų kūrimą

Ši tinklapių grupė išsiskiria tuo, kad čia pateikti programinės įrangos kūrėjai, kurie orientuojasi į finansinės ir statistinės analizės metodų realizavimą.

atp.com APT kuria sistemas skirtas finansų industrijos profesionalams. APT modeliai, analitika ir programiniai sprendimai rizikos valdymui gali būti panaudoti įvairiuose organizacijos lygmenyse: rizikos modeliai ir portfelio analizė – aktyvų valdytojui, hedžingo fondams, kompanijos rizikai, pensijų fondams, makleriams.

Juose atitinkamai realizuoti multifaktoriniai modeliai, prognozavimo klaidų aptikimas, rizikos priskyrimas, beta analizė, portfelio sudarymo įrankiai, mokesčių atžvilgiu optimalūs modeliai; statistiniai rizikos modeliai ir hedžingo priemonės (skirtos akcijoms, obligacijoms, fiučeriams, opcionams ir t.t.), trumpo periodo volatiliškumo modeliai, specializuoti grąžų strategijos parinkimo įrankiai, kasdieninės rizikos ataskaitos, realaus laiko Excel'io priedai, integruoti į daugelį populiarių portfelio valdymo sistemų; įvairios priemonės korporacinei rizikai vertinti; pensijų fondų tradicinės kasdieninės ataskaitos, portfelio apžvalga ir saugumo barjerų lygis (sistema automatinė); statistiniai rizikos modeliai, multifaktoriniai klientų ataskaitų modeliai, realaus laiko rizikos ribų nustatymas, specialaus maklerio „krepšelio" sudarymas, opcionų hedžingo galimybės ir netiesiniai sandorių kaštai. Kiekviena iš šių sistemų turi portfelio analizės ir optimizavimo procedūras, rizikos analizę ir panašias posistemes.

DataArt DataArt kuria sistemas reikalingas investicijų valdymui, fondų hedžingui ir bankinei industrijai tiek JAV, tiek ir Europoje. Jie patys teigia, kad jie kuria integruotas sistemas leidžiančias atlikti įvairių investavimo procesų matematinius tyrimus:

* užsakymų vykdymas ir valdymas;
* portfelio analizė;
* daugiamačiai pelno–nuostolio matavimai;
* rizikos valdymas, VaR;
* scenarijų įvertinimas, sukrėtimų ir jautrumo analizė;
* aktyvų tarpusavio ryšio analizė;
* vykdymo ataskaitos ir sprendimų priėmimo pagalbinės priemonės;
* daugelio instrumentų įkainojimas;
* rinkos stebėjimas realiu laiku.

Taipogi yra specializuotos posistemės skirtos hedžingo fondams ir fondų fondams. Visa sistema sukurta taip, kad esant reikalui gali būti integruota su kitomis populiariomis sistemomis: Bloomberg, VPM, Sophis, Portware, FMC, RiskData, MACE, Tradar, Reuters RMDS & DataFeeds ir daugeliu kitų.

Insightful Finance Solutions & SolutionMetrics Pty Ltd. Insightful tiekia programinę įrangą 35 iš 50 stambiausių finansines paslaugas teikiančių kompanijų ir 8 iš 10 svarbiausių pasaulio bankų. Savo sukauptas žinias (kiekybinės prekybos strategijų, portfelio optimizavimo metodų ir rizikos valdymo) ši kompanija jau keletą pastarųjų dešimtmečių taiko kurdama programinę įrangą. Nuolat ją atnaujina atsižvelgdama į rinkos reguliavimo ir kitus pasikeitimus. Sukaupta didžiulė įvairių metodų ir modelių biblioteka, kuri yra integruota į S-PLUS platformą. Greta kitos programinės įrangos, kuriami modernūs finansinės analizės sprendimai skirti paskolų portfelio įvertinimui, portfelio optimizavimui, rizikos valdymui, prekybos strategijoms analizuoti, Basel II, kiekybinei duomenų analizei su Excel ir S-PLUS, kliento elgesio modeliavimui. Deja, ji gana brangi.

StatPro.com StatPro ruošia portfelio analizės sprendimus globalinei aktyvų valdymo industrijai. Vienas iš pirminių iššūkių aktyvų valdyme yra švarių ir analizei paruoštų duomenų išgavimas iš milžiniško informacijos kiekio bei rizikos ir elgesio matavimai ne vienu, bet daugeliu metodų. Šios kompanijos sukurti moduliniai programiniai produktai gali būti naudojami sudarant įvairias jų kombinacijas, priklausomai nuo kliento verslo poreikių. StatPro verslo tikslas, kaip teigia jų informacijos šaltiniai, yra kurti produktus skirtus finansų industrijoje svarbiausiai analizei atlikti, o kartu dirbančius labai našiai ir teikiančius ekonominę naudą.[3]

Whitebirch Software, Inc. Projected Financials (www.projectedfinancials.com) Inc. Projected Financials pabrėžia, kad jų programinė įranga iš visų kitų finansinės programinės įrangos kūrėjų produktų išsiskiria šiais aspektais:

- įdiegtas finansinio modeliavimo paketas;
- taikomi aukštesnių eilių finansiniai modeliai[4];
- realaus laiko tarpusavio bendradarbiavimo su klientais, bankais, kolegomis ir bendradarbiais galimybės;
- produktus galima pritaikyti ir kitose verslo sferose, pradedant nuo mažų, naujai įsikūrusių firmų iki multimilijardinių kompanijų.

Quantrix.com Quantrix kompanija siūlo finansinės analizės ir modeliavimo produktus, kurie išsiskiria lengvu suprantamumu ir gilumu. Jie teigia, kad:

- programinė įranga padeda pažvelgti į problemą iš vidaus, tačiau per dinaminį modeliavimą;
- programinė įranga organizuota pagal intuityvią architektūrą ir yra struktūriškai organizuota[5];
- yra įdiegtas daugiamatis skaičiavimo mechanizmas[6];
- viskas pagrįsta aiškia logika, modeliai yra lengvai suprantami, o formules pakanka apibrėžti vieną kartą;
- prekiaujama tiek standartine, tiek profesionalia įrangos versijomis[7].

wheatworks.com Šios kompanijos šūkis „Financial Math Made Easy", o jie kuria Windows® operacinei sistemai skirtą programinę įrangą. Iš tinklapio wheatworks.com galima atsisiųsti bandomąsias versijas.

2.6.3. Profesionalūs finansų patarėjai ir konsultantai

Šios grupės tinklapių yra labai daug, tačiau čia pateiksiu tik vieną įdomų pavyzdį.

palisade.com Teikia mokymo ir konsultavimo paslaugas nuotoliniu būdu ir mokymo centruose, priklausomai nuo kliento poreikių ir užimtumo.

2.7. Finansinių duomenų šaltiniai

Dauguma finansinių institucijų (bankai, kredito unijos, vertybinių popierių biržos ir t.t.) turi duomenų saugyklas, kaupiančias finansinius duomenis. Neretai ši informacija yra daugialypė ir kompleksinė. Žinių paieškos sistemos finansiniuose duomenyse atlieka statistinę duomenų analizę ir pateikia rekomendacijas investuotojams.

Nagrinėjant finansines sekas visada susiduriama su gana rimta problema – finansinių duomenų

[3]"Sistema daugiau nei atsipirko ir gerokai pranoko visus lūkesčius. Nuolat didinamas funkcionalumas ir keliama jo vertė dėl veiklos ataskaitų perdavimo kūrėjams" - F&C, UK

[4]Taikomi inovatyvūs modeliai. Projected Financials padeda savo klientams transformuodami verslo duomenis į finansinę įžvalgą.

[5]Lentelės, matmenys ir elementai su modeliu ar konkrečiu uždaviniu yra susieti dinamiškai.

[6]Kol atliekami vieni ar kiti skaičiavimai, galima keisti išvaizdą, modelio charakteristikas ir kitus parametrus.

[7]Profesionalioje versijoje įdiegta OLAP tipo duomenų integracija ir Quantrix sistemos programavimo interfeisas (QAPI).

bazių informacija beveik visada nėra laisvai prieinama, nors už tam tikrą mokestį ją galima gauti. Tačiau viešose informacinėse sistemose yra pateikiama pakankamai informacijos, kad susidarytume bendrą vaizdą apie konkrečią įmonę ir jos akcijas.

Paveiksle 2.2 pavaizduotas Baltijos šalių vertybinių popierių biržos tinklapis [158] su informacija apie vieną iš Lietuvos bendrovių. Baltijos šalių rinkos yra laikomos mažomis besivystančiomis rinkomis. Čia galima rasti informacija apie prekybą, kainos istoriją, naujienas, ataskaitas, akcijų emisiją ir patį emitentą.

Tuo tarpu paveiksle 2.3 pateikiamas iš Baltijos šalių vertybinių popierių biržos duomenų kaupyklos gauto duomenų failo pavyzdys. Standartiškai tai kableliais skiriamų laukų arba kitaip CSV (angl. *comma delimited*) tipo failas. Šio failo struktūra:

1. Informacija apie akciją:
   – SECURITY DETAIL VIEW (EQUITY)
   – Kompanijos pavadinimas (santrumpa)
   – Period: 2000-01-01 – 2006-01-27
   – Currency: valiuta
   – Marketplace: birža
   – Name: santrumpa
2. Tuščia eilutė;
3. Duomenų stulpelių pavadinimų eilutė: Date;Average Price;Open Price;High Price;Low Price; Last close Price;Last Price;Price Change,%;Best bid;Best ask;Deals;No of shares;Turnover
4. Duomenų stulpeliai einantys iki failo pabaigos. Laukai duomenų stulpeliuose skiriami kabliataškiais, tarpai nenaudojami.

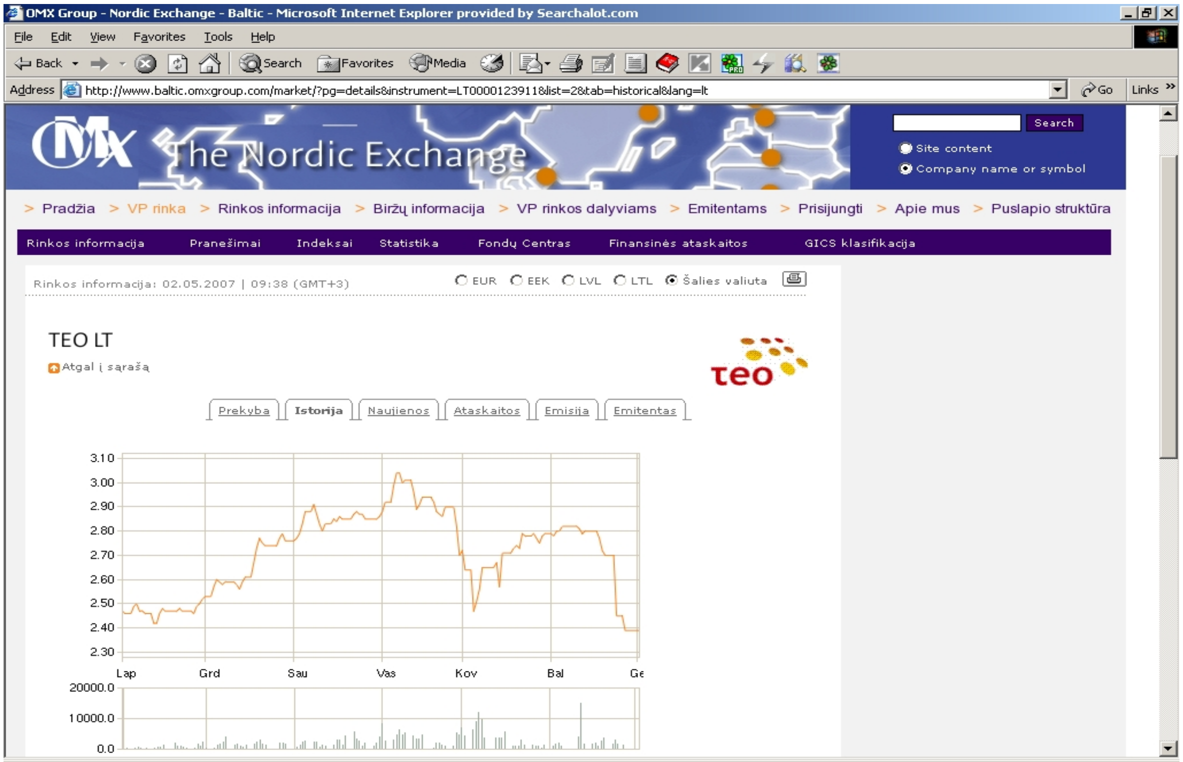
Šiuo metu istoriniai duomenys apie prekybą pateikiami nuo 2000 metų sausio 1 dienos. Ši informacija yra laisvai prieinama. Pilnose duomenų bazėse, už kurias reikia papildomai mokėti pinigus, kasdien apie konkrečią įmonę Baltijos šalių v.p. birža fiksuoja tokią informaciją:

- unikalus prekybos sesijos kodas ir data (sveikas skaičius, data);
- akcijų leidėjas (tekstas);
- nominali akcijos vertė (realus skaičius, valiuta);
- paskutinės prekybos kaina (realus skaičius, valiuta);
- atidarymo kaina (realus skaičius, valiuta);
- minimali–maksimali prekybos kaina (realus skaičius, valiuta);
- vidutinė dienos kaina (realus skaičius, valiuta);
- uždarymo kaina (realus skaičius, valiuta), darbe žymima P;
- kainos pokytis (realus skaičius, %);
- pasiūla–paklausa (sveikas skaičius);
- sandorių skaičius Centrinėje rinkoje (CR) (sveikas skaičius);
- CR sandoriai išreikšti vienetais (sveikas skaičius);
- CR sandoriai išreikšti valiuta (realus skaičius, valiuta);
- minimali–maksimali kaina per pastarąsias 4 savaites (realus skaičius, valiuta);
- minimali–maksimali kaina per pastarąsias 52 savaites (realus skaičius, valiuta);
- susijusi rinkos informacija (tekstas);
- kita.

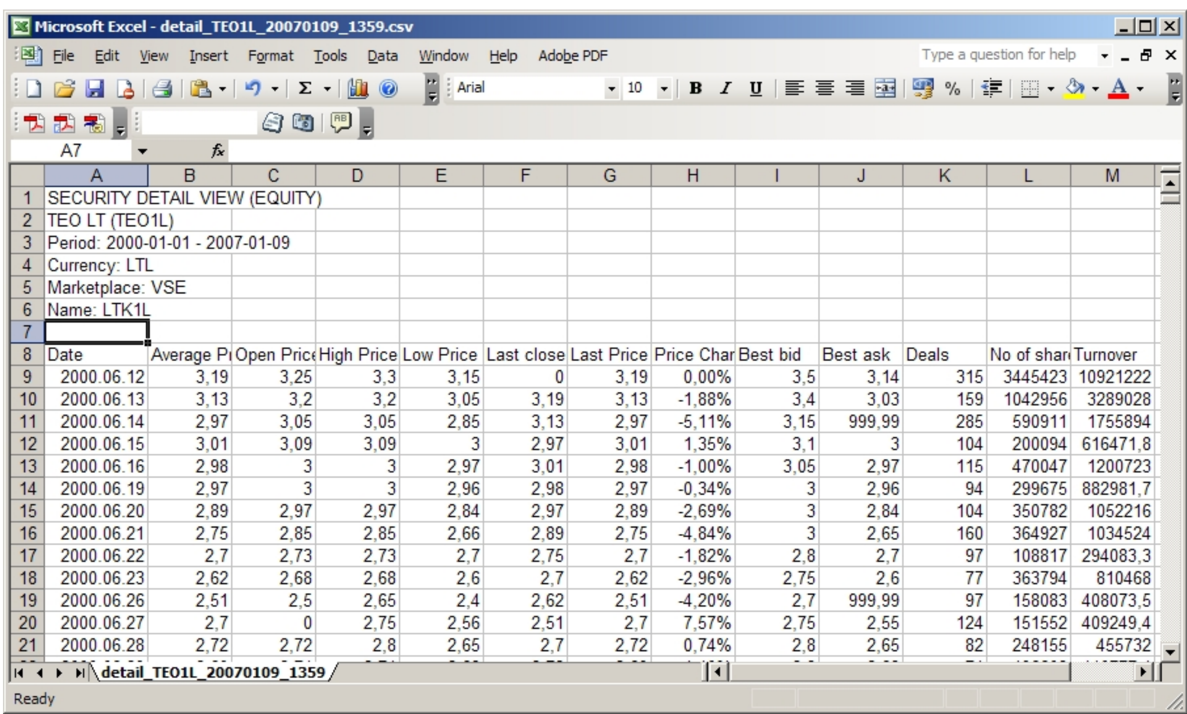
Tačiau tai nėra vienintelė kaupiama informacija. Yra fiksuojami visi pasiūlymai ir kiekvieno sandorio informacija (prekybos metu).

Panašią vienos dienos prekybos informaciją pateikia ir *finance.yahoo.com* (žr. 2.4 ir 2.5 paveikslus), kurios istorinių duomenų failo stuktūra yra tokia:

1. Duomenų stulpelių pavadinimų eilutė: Date,Open,High,Low,Close,Volume,Adj. Close (prekybos data (data);atidarymo kaina (realus skaičius, valiuta);maksimali prekybos kaina (realus

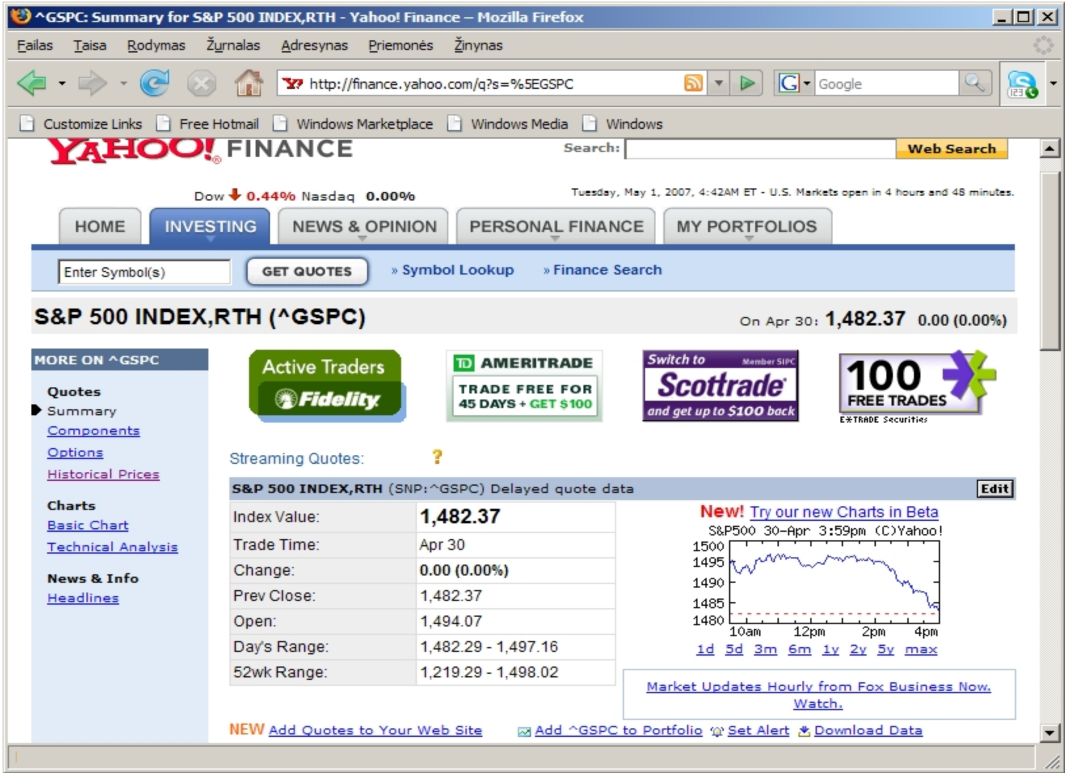


Paveikslas 2.2: Baltijos šalių vertybinių popierių tinklapis.

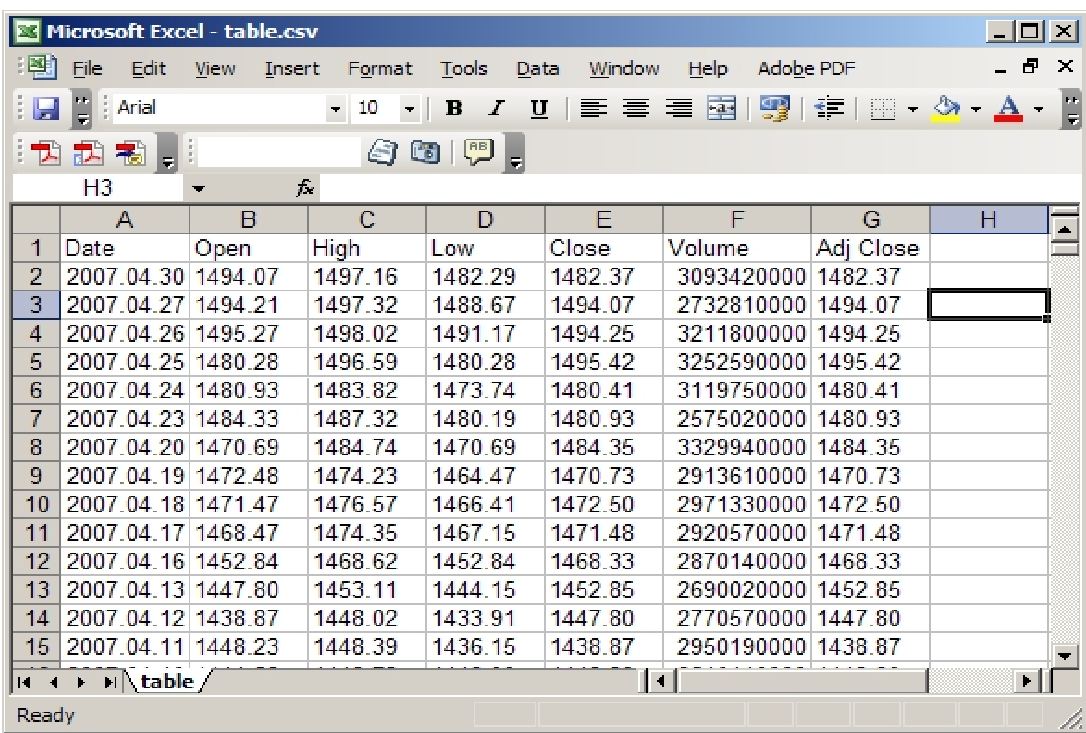


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	SECURITY DETAIL VIEW (EQUITY)												
2	TEO LT (TEO1L)												
3	Period: 2000-01-01 - 2007-01-09												
4	Currency: LTL												
5	Marketplace: VSE												
6	Name: LTK1L												
7													
8	Date	Average Pı	Open Pric	High Price	Low Price	Last close	Last Price	Price Char	Best bid	Best ask	Deals	No of shar	Turnover
9	2000.06.12	3,19	3,25	3,3	3,15	0	3,19	0,00%	3,5	3,14	315	3445423	10921222
10	2000.06.13	3,13	3,2	3,2	3,05	3,19	3,13	-1,88%	3,4	3,03	159	1042956	3289028
11	2000.06.14	2,97	3,05	3,05	2,85	3,13	2,97	-5,11%	3,15	999,99	285	590911	1755894
12	2000.06.15	3,01	3,09	3,09	3	2,97	3,01	1,35%	3,1	3	104	200094	616471,8
13	2000.06.16	2,98	3	3	2,97	3,01	2,98	-1,00%	3,05	2,97	115	470047	1200723
14	2000.06.19	2,97	3	3	2,96	2,98	2,97	-0,34%	3	2,96	94	299675	882981,7
15	2000.06.20	2,89	2,97	2,97	2,84	2,97	2,89	-2,69%	3	2,84	104	350782	1052216
16	2000.06.21	2,75	2,85	2,85	2,66	2,89	2,75	-4,84%	3	2,65	160	364927	1034524
17	2000.06.22	2,7	2,73	2,73	2,7	2,75	2,7	-1,82%	2,8	2,7	97	108817	294083,3
18	2000.06.23	2,62	2,68	2,68	2,6	2,7	2,62	-2,96%	2,75	2,6	77	363794	810468
19	2000.06.26	2,51	2,5	2,65	2,4	2,62	2,51	-4,20%	2,7	999,99	97	158083	408073,5
20	2000.06.27	2,7	0	2,75	2,56	2,51	2,7	7,57%	2,75	2,55	124	151552	409249,4
21	2000.06.28	2,72	2,72	2,8	2,65	2,7	2,72	0,74%	2,8	2,65	82	248155	455732

Paveikslas 2.3: Duomenys iš Baltijos šalių vertybinių popierių biržos.



Paveikslas 2.4: *finance.yahoo.com* tinklapis.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	
2	2007.04.30	1494.07	1497.16	1482.29	1482.37	3093420000	1482.37	
3	2007.04.27	1494.21	1497.32	1488.67	1494.07	2732810000	1494.07	
4	2007.04.26	1495.27	1498.02	1491.17	1494.25	3211800000	1494.25	
5	2007.04.25	1480.28	1496.59	1480.28	1495.42	3252590000	1495.42	
6	2007.04.24	1480.93	1483.82	1473.74	1480.41	3119750000	1480.41	
7	2007.04.23	1484.33	1487.32	1480.19	1480.93	2575020000	1480.93	
8	2007.04.20	1470.69	1484.74	1470.69	1484.35	3329940000	1484.35	
9	2007.04.19	1472.48	1474.23	1464.47	1470.73	2913610000	1470.73	
10	2007.04.18	1471.47	1476.57	1466.41	1472.50	2971330000	1472.50	
11	2007.04.17	1468.47	1474.35	1467.15	1471.48	2920570000	1471.48	
12	2007.04.16	1452.84	1468.62	1452.84	1468.33	2870140000	1468.33	
13	2007.04.13	1447.80	1453.11	1444.15	1452.85	2690020000	1452.85	
14	2007.04.12	1438.87	1448.02	1433.91	1447.80	2770570000	1447.80	
15	2007.04.11	1448.23	1448.39	1436.15	1438.87	2950190000	1438.87	

Paveikslas 2.5: Duomenų iš *finance.yahoo.com* failo pavyzdys.

skaičius, valiuta);minimali prekybos kaina (realus skaičius, valiuta);uždarymo kaina (realus skaičius, valiuta), darbe žymima P;sandoriai išreikšti vienetais (sveikas skaičius); patikslinta uždarymo kaina).

2. Duomenų stulpeliai einantys iki failo pabaigos. Laukai duomenų stulpeliuose skiriami kableliais, tarpai nenaudojami.

Reikia paminėti, kad duomenys šiuose failuose pateikiami nuo vėliausios dienos iki seniausių laikų. Tinklapyje *finance.yahoo.com* galima rasti beveik visus[8] reikiamus duomenis apie stambiausias kompanijas, indeksus, fondus ir kt. iš didžiųjų pasaulio biržų (paveikslas 2.4).

Kadangi nėra griežto istorinių kainų saugojimo duomenų standarto tai skirtingos duomenų bazės kaupia skirtingą informaciją. Istoriškai susiklostė, kad biržos atidarymo ir uždarymo metu užfiksuotos kainos yra pateikiamos ataskaitose, todėl jos dažniausiai figūruoja įvairiuose tyrimuose ir analizėse. Nors finansinėse duomenų bazėse yra kaupiama daugybė informacijos, investiciniam sprendimui priimti neretai pakanka tik biržos uždarymo metu nustatytos kainos (uždarymo kainos) ir tik retais atvejais atliekant analizę reikia atsižvelgti į dienos sandorių skaičių ar apyvartą [13]. Tai ypač svarbu tiriant pasyvumo fenomeną (žr. 2.3 ir 3.4 skyrius) besivystančiose finansų rinkose[9]. Šio svarbaus prekybos rodiklio tyrimų finansinėje literatūroje nepavyko aptikti.

Prieš atliekant vienokią ar kitokią statistinę analizę būtina atlikti duomenų atrinkimą, patikrinimą ir transformaciją.

2.7.1. Duomenų atranka

Atranka pradedama nuo informacijos apie tiriamą objektą paieškos duomenų kaupykloje(-se). Tuomet iš daugybės informacinių laukų reikia išsirinkti tinkamą konkrečiu atveju. Kaip jau buvo minėta, dažniausiai pasirenkamas uždarymo kainos laukas. Šio duomenų bazės lauko konkretūs įrašai matematinių modelių kalboje atitinka konkrečius duomenų sekos elementus turinčius tam tikrą indeksą, o pats laukas atitinka kainų seką.

2.7.2. Duomenų patikrinimas

Suformavus pradinę kainų seką patariama atlikti duomenų patikrinimą. Trumpai tariant reikia iš duomenų sekos pašalinti netinkamus įrašus atsiradusius dėl nežinomų priežasčių. Dažniausiai tai būna netinkamo tipo įrašai, tokie kaip informacija apie akcininkų susirinkimą ir dėl to nevykdomą prekybą. Atlikus patikrinimą duomenis jau galima perduoti programiniams moduliams, kurie atlieka statistinė ir kitokią duomenų analizę.

2.7.3. Duomenų transformacija

Statistiniuose tyrimuose finansinių duomenų transformacija atliekama dėl daugelio priežasčių. Viena iš pagrindinių yra ta, kad norima išvengti priklausomybės nuo konkrečios valiutos, todėl duomenys transformuojami į santykinius dydžius (bendrąsias pajamas, pelno normą ir grąžą), kitaip tariant bedimensinį dydį. Laikydami, kad P_i – aktyvo vertė i-tuoju laiko momentu, o P_{i+1} – aktyvo vertė po vieno periodo, tuomet bendrąsias pajamas iš aktyvo apskaičiuojame pagal formulę

$$r_i = \frac{P_{i+1}}{P_i}.$$

Laikydamiesi tų pačių pažymėjimų pelno normą arba grąžą skaičiuosime pagal formulę

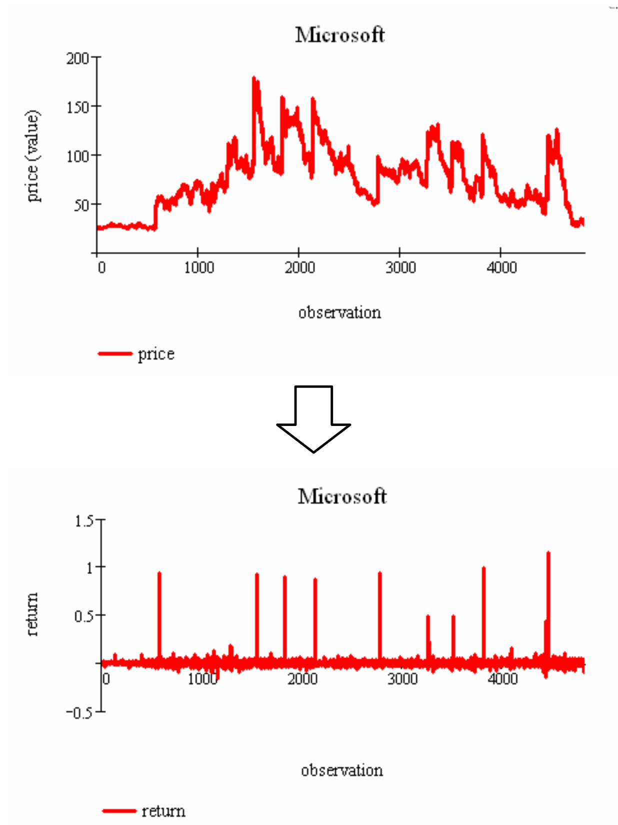
$$X_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{P_i} \qquad \text{arba} \qquad r_i = 1 + R_i.$$

Kita vertus kai kuriuose modeliuose grąžą (logaritminę grąžą) galima apskaičiuoti ir kitu

[8] istorinius akcijų duomenis, metines ir kitas ataskaitas, opcionų rinkos vertes ir pan.

[9] Pabaltijo ir "Rytų" Europos šalių, Centrinės ir Pietų Amerikos, Afrikos ir Azijos (išskyrus Japonijos ir Honkongo) vertybinių popierių rinkos.

būdu
$$R_i = \ln \frac{P_{i+1}}{P_i} = \ln P_{i+1} - \ln P_i,$$
o kai kainos pokytis $P_{i+1} - P_i$ yra nedidelis galima laikyti, kad
$$R_i = \ln P_{i+1} - \ln P_i \approx \frac{P_{i+1} - P_i}{P_i} = X_i, \tag{2.2}$$
kur $P_i,\ i = 1, \ldots, n$ yra akcijų kainų seka, o $X_i = X(i)$ yra grąža i-tuoju laiko momentu. Tokia transformacija gali būti pavaizduota 2.6 schema.



Paveikslas 2.6: Duomenų transformavimo schema.

Iš grafikų galima pastebėti, kad kainų kitimo procesas nėra stacionarus (tai patvirtina ir praktiniai bei teoriniai tyrimai). Stacionarumas yra dar viena iš priežasčių kodėl kainos keičiamos atitinkamais pokyčiais, kurie savo ruožtu yra laikomi stacionariais. Nors tai neretai dar reikia įrodyti praktiškai, tačiau bendru atveju sudarant matematinius modelius pakanka sutarti, kad pokyčiai turi būti stacionarūs.

2.7.4. Finansinių duomenų kiekis

Akcijų birža prekybos metu realiu laiku registruoja kiekvieną įvykusį sandorį, kiekvieną pasiūlymą pirkti arba parduoti v.p., o taip pat ir visą kitą informaciją, todėl aktyvioje ir didelėje rinkoje susikaupia didžiuliai informacijos kiekiai. Šios informacijos apdorojimas ir ataskaitų pateikimas yra viena iš duomenų gavybos sričių. Pavyzdžiui, 2007/01/08 dieną NYSE biržoje S&P 500 fondo apyvarta buvo 2763340000 vienetų, t.y. apie 10000 sandorių! Taip per metus apie vieną finansinį indeksą susidaro apie 25 mln. sandorių įrašų. Tokio informacijos kiekio apdorojimas yra rimta problema. Tuo tarpu Baltijos Biržoje kotiruojamomis TEO akcijomis 2007/01/08 įvyko tik apie 200 sandorių! Toks sąlyginai nedidelis informacijos kiekis yra netgi per mažas analizei atlikti (pvz. savastingumui nustatyti). Šie du pavyzdžiai iliustruoja, kad skirtingose rinkose kaupiami skirtingi informacijos kiekiai.

Norint atlikti analizę abiejose rinkose pakanka analizuoti biržos uždarymo duomenų įrašus. Tačiau netgi tokiu atveju duomenų kiekiai yra labai skirtingi. Tokia situacija iš esmės susidarė dėl vertybinių popierių biržų ypatybių. Baltijos šalių biržos buvo atidarytos tik po Nepriklausomybės atgavimo XX amžiaus pabaigoje (pvz., Lietuvos Nacionalinė Vertybinių Popierių Birža buvo įkurta 1993 metais), kai tuo tarpu New York (NYSE) ar Londono biržos veikia nuo XVIII–XIX amžių. Pavyzdžiui, NYSE birža apie vieną iš seniausiai skaičiuojamų indeksų DJTA nuo 1896 metų sukaupė apie 30000 įrašų. Baltijos šalių biržose yra apie daugumą indeksų yra sukaupta 3500 įrašų, iš kurių laisvai prieinami yra apie 2000 (nuo 2000 metų).

Analizuojat besivystančias rinkas neretai pastebimas pasyvumo fenomenas[13]. Besivystančiose rinkose prekybos metu sandoriai įvyksta sąlyginai retai, o kartais ir visai neįvyksta, dėl šios ir kitų priežasčių vertybinio popieriaus kaina gali nesikeisti ištisas savaites. Tokiu atveju grąžų sekose atsiranda sąlyginai didelis „nulinių" įrašų skaičius, kuris stipriai įtakoja pačios sekos elgesį ir charakteristikas (žr. [12] ir [13]).

Toliau pateikiamas analizuojamų finansinių instrumentų sąrašas.

2.1. Lentelė. Kompanijos arba indekso pavadinimas, žymėjimas, tiriamasis periodas, sekos ilgis (N), nulinių grąžų procentinė dalis sekoje

Pilnas pavadinimas (NYSE indeksų klasifikacija)	indeksas	periodas	N	nulių(%)
AIM S&P 500 Index Inv (^ISPIX)	ISPIX	10/08/1998–27/05/2005	1712	3,45
AMEX computer technology (^XCI)	AMEX	26/08/1983–27/05/2005	5486	0,15
AT&T Corp (T)	AT&T	02/01/1962–27/05/2005	10928	10,48
BP PLC(BP)	BP	03/01/1977–27/05/2005	7171	5,75
CAC 40 (^FCHI)	FCHI	01/03/1990–30/05/2005	3838	0,42
Camden National Corp (CAC)	CAC	08/10/1997–27/05/2005	1922	16,25
Coca-Cola Co (Coke) (KO)	Coca	02/01/1962–27/05/2005	10928	6,87
DAX IND (^GDAXI)	GDAXI	26/11/1990 –30/05/2005	3652	0,22
Dow Jones AIG Commodity Index (^DJC)	DJC	03/01/1991–27/05/2005	3634	1,57
Dow Jones Company Inc (DJ)	DJ	01/07/1985–27/05/2005	5019	7,77
Dow Jones Industrial Average	DJIA	26/05/1896–16/01/2004	26958	0,66
Dow Jones Transportation Average	DJTA	26/10/1896–26/08/2003	29296	0,88
Fiat SpA (FIA)	FIAT	30/06/1989–27/05/2005	4014	15,75
General Electric Co (GE)	GE	02/01/1962–27/05/2005	10928	5,95
General Motors Corp (GM)	GM	02/01/1962–27/05/2005	10928	6,41
International Business Machines (IBM)	IBM	2/01/1962–27/05/2005	10928	3,32
Lockheed Martin Corp (LMT)	LMT	03/01/1977–27/05/2005	7172	6,40
McDonald's Corp (MCD)	MCD	02/01/1970–27/05/2005	8935	6,10
Merrill Lynch & Co Inc (MER)	MER	03/01/1977–27/05/2005	7166	5,78
Microsoft Corp (MSFT)	MSFT	13/03/1986–27/05/2005	4849	3,34
NASDAQ 100 Trust Series 1 (QQQQ)	NASDAQ	10/03/1999–27/05/2005	1566	0,77
Nike Inc (NKE)	NIKE	19/08/1987–27/05/2005	4480	4,06
NIKKEI 225 Index (^N225)	NIKKEI	04/01/1984–30/05/2005	5267	0,23
Koninklijke Philips Electronics (PHG)	Phile	30/12/1987–27/05/2005	4393	9,38
S&P 500 Index (^SPX)	S&P	03/01/1950–27/05/2005	13941	0,88
Sony Corp (SNE)	SONY	06/04/1983–27/05/2005	5585	7,20

2.2. Lentelė. Kompanijos pavadinimas, žymėjimas, tiriamas periodas, sekos ilgis (N), nulinių grąžų skaičius (%) ir rinka kurioje išleistas v.p.

Pavadinimas	indeksas	periodas	N	nulių(%)	rinka
Alita	ALT1L	2000/01/01–2006/01/27	1528	56,81	Lietuvos
Anykščių vynas	ANK1L	2000/01/01–2006/01/27	1520	68,29	Lietuvos
Apranga	APG1L	2000/01/01–2006/01/25	1383	63,05	Lietuvos
Alytaus tekstilė	ATK1L	2000/01/01–2006/01/27	1345	79,18	Lietuvos
Latvijas balzams	BAL1R	2000/01/01–2006/01/27	1542	49,29	Latvijos
Baltika	BLT1T	2000/01/01–2006/01/25	1543	47,18	Estijos
Dvarčionių keramika	DKR1L	2000/01/01–2006/01/27	1269	57,37	Lietuvos
Ditton Pievadkēžu Rūpnīca	DPK1R	2000/01/01–2006/01/27	1542	63,23	Latvijos
Ekranas	EKR1L	2000/01/01–2006/01/25	1528	35,41	Lietuvos
Eesti Telekom	ETLAT	2000/01/01–2006/01/25	1543	12,64	Estijos
Grindeks	GRD1R	2000/01/01–2006/01/25	1541	55,03	Latvijos
Grigiškės	GRG1L	2000/01/01–2006/01/27	1527	48,92	Lietuvos
Gubernija	GUB1L	2000/01/04–2006/01/27	407	51,84	Lietuvos
Latvijas Gāze	GZE1R	2000/01/01–2006/01/25	1541	33,48	Latvijos
Harju Elekter	HAE1T	2000/01/01–2006/01/25	1543	41,74	Estijos
Invalda	IVL1L	2000/01/01–2006/01/27	1532	49,87	Lietuvos
Klaipėdos baldai	KBL1L	2000/01/01–2006/01/27	1526	55,83	Lietuvos
Klaipėdos jūrų krovinių kompanija	KJK1L	2000/01/01–2006/01/27	1523	81,29	Lietuvos
Klementi	KLEAT	2000/01/01–2006/01/27	1544	62,82	Estijos
Kalev	KLV1T	2000/01/01–2006/01/27	1544	45,92	Estijos
Klaipėdos nafta	KNF1L	2000/01/01–2006/01/27	1098	49,36	Lietuvos
Kauno energija	KNR1L	2000/01/01–2006/01/27	593	73,69	Lietuvos
Lisco Baltic Service	LBS1L	2000/01/01–2006/01/27	1149	59,53	Lietuvos
Lietuvos dujos	LDJ1L	2000/01/01–2006/01/27	1480	37,64	Lietuvos
Lietuvos elektrinė	LEL1L	2000/01/01–2006/01/27	1006	36,58	Lietuvos
Lietuvos energija	LEN1L	2000/01/01–2006/01/27	1414	49,01	Lietuvos
Lifosa	LFO1L	2000/01/01–2006/01/27	1445	67,40	Lietuvos
Lietuvos jūrų laivininkystė	LJL1L	2000/01/01–2006/01/27	1150	64,87	Lietuvos
Limarko laivininkystės kompanija	LLK1L	2000/01/01–2006/01/27	1207	68,27	Lietuvos
Liepājas metalurgs	LME1R	2000/01/01–2006/01/27	1542	51,49	Latvijos
Linas	LNS1L	2000/01/01–2006/01/27	1531	51,86	Lietuvos
Latvijas Kugniecība	LSC1R	2000/01/01–2006/01/25	911	47,09	Latvijos
Lietuvos Telekomas (TEO)	LTK1L	2000/01/01–2006/01/25	1419	26,07	Lietuvos
Merko Ehitus	MKO1T	2000/01/01–2006/01/25	1543	33,96	Estijos
Mažeikių nafta	MNF1L	2000/01/01–2006/01/27	1409	32,93	Lietuvos
Mažeikių elektrinė	MZE1L	2000/01/01–2006/01/27	1004	59,56	Lietuvos
NORD/LB Lietuva (DNB/Nord)	NDL1L	2000/01/01–2006/01/27	1422	85,65	Lietuvos
Norma	NRM1T	2000/01/01–2006/01/27	1544	18,85	Estijos
Olainfarm	OLF1R	2000/01/01–2006/01/27	1542	57,59	Latvijos
Panevėžio statybos trestas	PTR1L	2000/01/01–2006/01/27	1524	77,95	Lietuvos
Pieno Žvaigždės	PZV1L	2000/01/01–2006/01/27	1524	51,71	Lietuvos
Rīgas kugu būvētava	RKB1R	2000/01/01–2006/01/27	1542	61,74	Latvijos
Rakvere Lihakombinaat	RLK1T	2000/01/01–2006/01/27	1544	64,70	Estijos
Rytų skirstomieji tinklai	RST1L	2000/01/01–2006/01/27	1006	32,41	Lietuvos
Rokiškio sūris	RSU1L	2000/01/01–2006/01/27	1527	42,24	Lietuvos
Rīgas Transporta flote	RTF1R	2000/01/01–2006/01/27	1542	66,80	Latvijos
Šiaulių bankas	SAB1L	2000/01/01–2006/01/27	1503	64,01	Lietuvos
Sanitas	SAN1L	2000/01/01–2006/01/27	1493	61,09	Lietuvos
Saku Õlletehas	SKU1T	2000/01/01–2006/01/27	1544	27,72	Estijos
Snaigė	SNG1L	2000/01/01–2006/01/27	1522	42,25	Lietuvos
Snoras	SRS1L	2000/01/01–2006/01/27	1521	56,74	Lietuvos
Stumbras	STU1L	2000/01/01–2006/01/27	1477	62,42	Lietuvos

Tęsinys kitame puslapyje...

2.3. Lentelė. Kompanijos pavadinimas, žymėjimas, tiriamas periodas, sekos ilgis (N), nulinių grąžų skaičius (%) ir rinka kurioje išleistas v.p.(tęsinys)

Pavadinimas	indeksas	periodas	N	nulių(%)	rinka
...tęsinys					
Tallinna Farmaatsiatehas	TFA1T	2000/01/01–2006/01/27	1544	64,05	Estijos
Tallinna Kaubamaja	TKM1T	2000/01/01–2006/01/27	1544	43,65	Estijos
Ūkio bankas	UKB1L	2000/01/01–2006/01/27	1527	47,61	Lietuvos
Utenos trikotažas	UTR1L	2000/01/01–2006/01/27	1508	65,58	Lietuvos
Vilniaus baldai	VBL1L	2000/01/01–2006/01/27	1422	45,29	Lietuvos
Vilniaus degtinė	VDG1L	2000/01/01–2006/01/27	948	77,00	Lietuvos
Ventspils nafta	VNF1R	2000/01/01–2006/01/27	1542	41,25	Latvijos
Vilniaus Vingis	VNG1L	2000/01/01–2006/01/25	1525	36,79	Lietuvos
Viisnurk	VNU1T	2000/01/01–2006/01/27	1544	47,93	Estijos
Valmieras Stikla Škiedra	VSS1R	2000/01/01–2006/01/27	1543	52,62	Latvijos
VST	VST1L	2000/01/01–2006/01/27	956	40,90	Lietuvos
Žemaitijos pienas	ZMP1L	2000/01/01–2006/01/27	1482	54,52	Lietuvos

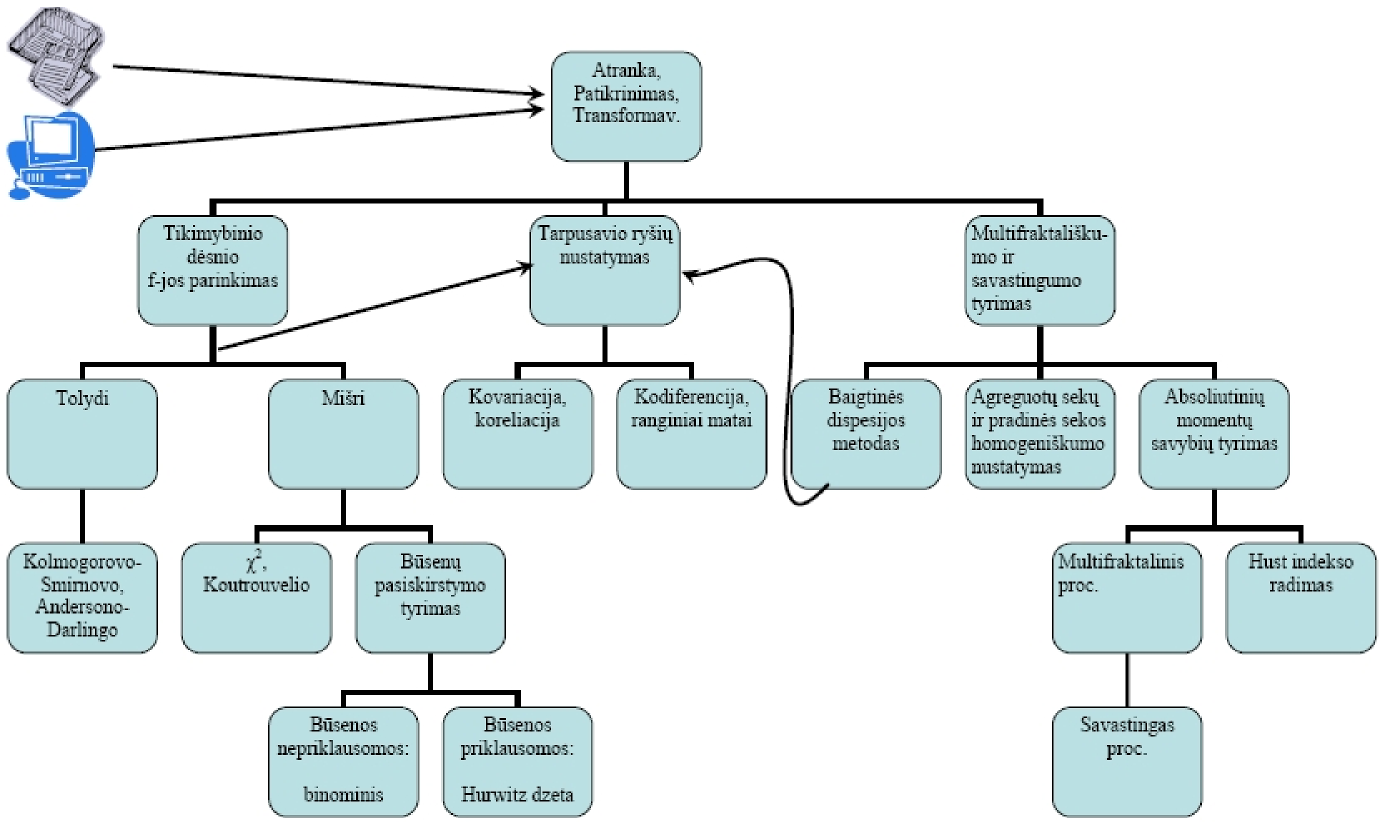
2.8. 2-o skyriaus išvados

Išanalizavus esamus finansų modeliavimo rezultatus galima daryti tokias išvadas:

- Iš duomenų saugyklose kaupiamos informacijos statistinei duomenų analizei atlikti neretai pakanka biržos uždarymo metu užfiksuotos kainos. Sekančiuose duomenų apdorojimo stadijose šis rodiklis transformuojamas į grąžas ar kitą panašią charakteristiką.
- Priklausomai nuo finansinio instrumento kilmės ir biržos, kurioje jis kotiruojamas ar skaičiuojamas, skiriasi ir duomenų sekų ilgiai (senose biržose sekų ilgiai gali siekti 30 tūkst., o naujose (BŠ) iki 2 tūkst. elementų), o taip pat skiriasi ir duomenų kokybė. Taipogi skiriasi ir tokių sekų analizės metodai.
- Finansiniams duomenims yra būdingas fraktališkumo savybės. Savastingumas ir multifraktališkumas apibūdina finansinių procesų prognozuojamumą arba chaotiškumą.
- Vertybinių popierių portfelio parinkimo uždavinio pagrindinis tikslas yra surasti tokius aktyvų svorius bendrame portfelyje, kad laukiamas pelnas ir rizika atitiktų investuotojo pasirinkimą. Realių rinkų duomenys pasižymi sunkiomis uodegomis, didesne nei įprasta asimetrija ir ekscesu, todėl vietoje klasikinės Markowitz vidurkio–dispersijos teorijos, portfeliui parinkti, reikia taikyti robastinius rizikos matus (VaR/CVaR, MAD, MiniMax ir kitus).
- Stabiliųjų ir kitų dėsnių taikymą multifraktališkumo ir savastingumo savybėms nagrinėti apsunkina statistinių bei kitų metodų ir programinių priemonių trūkumas. Kita vertus šių modelių panaudojimas finansų modeliavime duoda apčiuopiamą ekonominę naudą.

3. Vertybinių popierių indeksų modeliavimas ir modelių patikimumas

Šioje disertacijos dalyje aptariama tyrimų metodologija, duomenų transformavimas ir charakteristikos, tikimybiniai dėsniai apibūdinantys duomenis, šių dėsnių parametrų įvertinimo metodai, aprašomi suderinamumo ir kiti testai, reikalingi patikrinti sudarytų modelių adekvatumą. Taip pat pateikiami atitinkami algoritmai ir jų eksperimentinio patikimumo testų rezultatai. Visuose eksperimenduose rekomenduojama laikytis tyrimų eigos pateiktos 3.1 schemoje.



Paveikslas 3.1: Finansinių rinkų tyrimo ir analizės schema

3.1. Duomenų apdorojimas ir analizė

Baltijos ir kitų Centrinės ir Rytų Europos šalių finansų rinkos yra laikomos mažomis besivystančiomis (angl. *emerging markets*). Todėl duomenų sekos yra gana trumpos ir remiantis jomis sunku gauti patikimas statistines išvadas. Tokių rinkų duomenų analizei sunku pritaikyti klasikinius statistinės analizės metodus (dėl savastingumo, mažo likvidumo ir pan. įtakos). Vienas dažniausiai nagrinėjamų finansų analizės objektų yra akcijų kainų grąžos. Nagrinėsime šių finansinių rodiklių statistinius modelius atsižvelgdami į jų savybes mažose besivystančiose rinkose.

Analizės metu akcijų kainas keičiame jų grąžomis [149]:

$$X_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{P_i}, \tag{3.1}$$

kur $P_i,\ i = 1, ..., n$ yra akcijų kainų seka, o $X_i = X(i)$ yra grąža i-tuoju laiko momentu (plačiau žr. 2.7.3 Skyrių).

Algoritmas 1 Duomenų transformavimas

■*Tikslas*: iš užduoto duomenų failo $file$ nuskaityti n duomenų kiekį į masyvą Y ir pagal formulę (3.1) transformuoti juos į grąžas. Tokiu būdu sudarant vektorių X, kurio ilgis priklauso nuo A reikšmės: jei $A \neq 0$ tai X ilgis yra $n-1$, priešingu atveju ilgis priklauso nuo nulinių grąžų skaičiaus pradinėje sekoje;

Įėjimo parametrai: $file$ – duomenų failo tipas, n sveikas skaičius (duomenų kiekis skaitomas iš $file$), A – loginio tipo;

Išėjimo parametrai: X yra $n-1$ matis realių skaičių masyvas (grąžų seka);

Naudojama atmintis: reikia saugoti Y, n matį realių skaičių masyvą;

Laiko sąnaudos: tiesiogiai proporcingos duomenų failo ilgiui n;

Aprašymas:

- duomenys (akcijų kainos) nuskaitomi į vektorių Y kurio ilgis n;
- duomenų vektorius Y transformuojamas į grąžų vektorių X pagal formulę (2.2). Jei norima sekoje palikti nulines grąžas ($A \neq 0$) tai sekos X ilgis bus $n-1$, jei nulinės grąžos pašalinamos iš sekos tuomet X ilgis bus $n-k-1$, čia k yra nulinių grąžų skaičius sekoje Y.

Algoritmas:

1. Y =READFILE($file, n$);
2. $j = 0$, $i = 0$;
3. WHILE($i < n-1$) DO /* šis ciklas eina per visą seka Y_i ir formuoja seką X_j
   3.1. $X_j = (Y_{i+1} - Y_i)/Y_i$;
      3.1.1. IF ($A = 0$) AND ($X_j = 0$)
      3.1.2. $i = i + 1$;
      3.1.3. ELSE $i = i + 1$, $j = j + 1$;
4. RETURN X; /* algoritmo pabaiga*/■

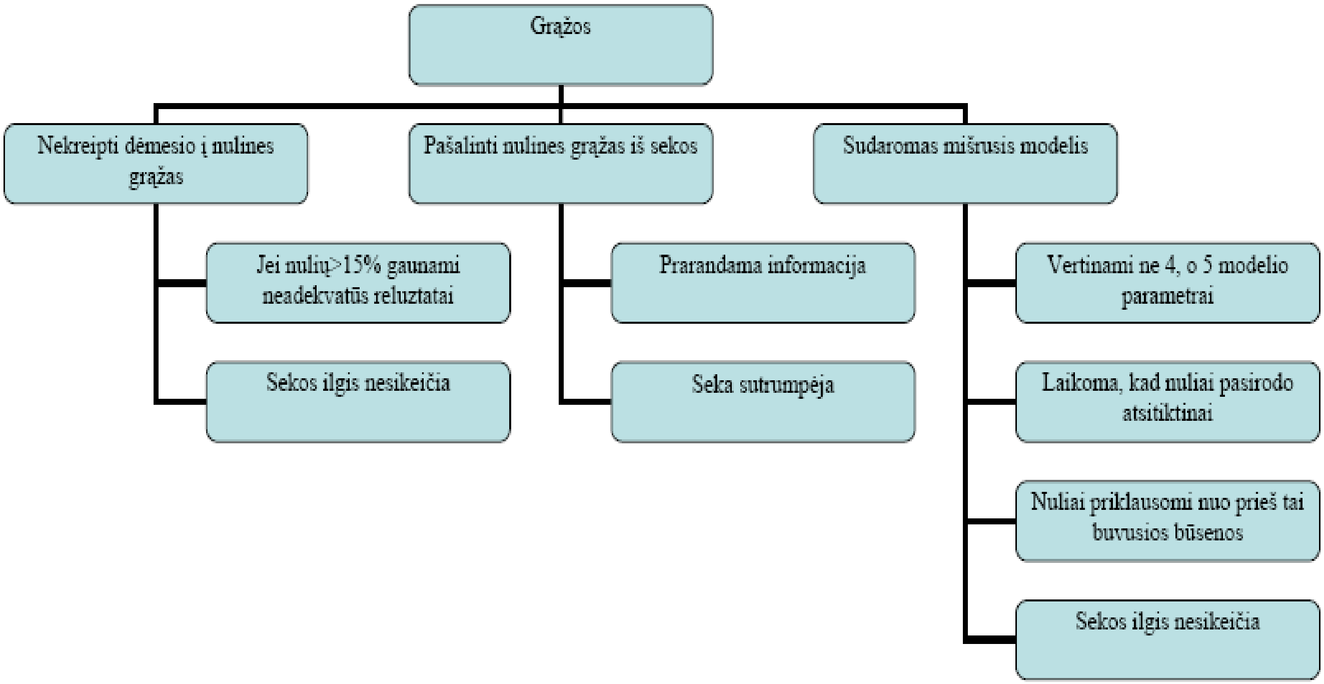
3.1.1. Rinkos pasyvumo įtaka duomenims

Baltijos ir kitų Centrinės ir Rytų Europos šalių finansų rinkos yra palyginti naujos, todėl jos yra vis dar besivystančios, o kai kurie finansiniai instrumentai yra mažai likvidūs. Neretai besivystančiose rinkose yra stebimas stagnacijos efektas, pasireiškiantis prekybos pasyvumu. Ilgais laiko intervalais nevykstant prekybai konkrečiu vertybiniu popieriumi, jo kaina nesikeičia ir grąža tampa lygi nuliui. Jei stagnacija užsitęsia, tai „nulinių grąžų" skaičius gali pasiekti 89% visos sekos ilgio ir duomenų pasiskirstymo dėsnis artėja į išsigimusį. Dėl šios priežasties Baltijos šalių rinkose dažniausiai taikomi tolydieji (Gauss'o, stabilieji, hiperboliniai ir t.t.) dėsniai neadekvačiai aprašo akcijų kainų grąžų sekas. Šią problemą galima spręsti trimis būdais:

1. iš duomenų pašalinti „nulines" grąžas ir nagrinėti likusią sekos dalį (žr. 3.2 skyrių);
2. sudaryti bendresnį – mišrųjį modelį, atsižvelgianti į stagnacijos efektą (žr. 3.4 skyrių);
3. nepaisyti pasyvumo ir nagrinėti grąžas kaip tolydųjį atsitiktinį dydį (žr. 3.2 ir 3.4 skyrius).

Šie būdai turi ir privalumų ir trūkumų (pav. 3.2). Pirmuoju atveju duomenys yra iškraipomi (nes gali tekti nagrinėti tik apie 50% duomenų). Tačiau šiuo atveju nekyla problemų taikant standartinius statistinius metodus. Antruoju atveju yra analizuojami visi duomenys, tačiau mišriajam modeliui sudėtinga taikyti statistinius duomenų pasiskirstymo parametrų vertinimo, suderinamumo ir kitus testus. Trečiuoju atveju analizuojami visi duomenys, tačiau gauti rezultatai gali būti neadekvatūs, jei „nulinių" grąžų skaičius viršina 10–15% visos sekos ilgio.

Disertacijoje nagrinėjamas mišrusis grąžų modelis, laikant, kad su tam tikra tikimybe p grąžos yra pasiskirsčiusios pagal tam tikrą tolydųjį dėsnį arba su tikimybe $1-p$ jos lieka nepakitusios (žr. skyrių 3.4).



Paveikslas 3.2: Rekomenduojama duomenų analizės schema.

3.2. Statistiniai metodai vienmačių finansinių sekų stabilumui nustatyti

Stabilusis atsitiktinis dydis žymimas $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Kiekvienas stabilusis skirstinys turi stabilumo indeksą α, kuris yra esminis charakterizuojant finansinius (ir kitus) duomenis. Modeliuojant finansines sekas paprastai laikoma, kad $\alpha \in (1, 2]$. Tam yra keletas priežasčių:

1. kai $\alpha > 1$, egzistuoja baigtinis pirmasis skirstinio momentas. Tokiu atveju egzistuoja laukiama finansinio instrumento grąža;
2. empiriniai tyrimai patvirtina, kad finansiniams duomenims, kaip taisyklė, $\alpha > 1$, o naujausi tyrimai rodo, kad $\alpha \approx 1,5$ (išsivysčiusiose rinkose);
3. stabilieji atsitiktiniai dydžiai tenkina Apibendrintą Centrinę Ribinę Teoremą (ACRT), kuri teigia, kad stabilieji dėsniai yra vieninteliai atitinkamai centruotų ir normuotų bei nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumų asimptotiniai skirstiniai [79]. Iš ACRT išplaukia, kad stabilumo indeksas gali būti tik iš intervalo $0 < \alpha \leqslant 2$.

Likusieji stabiliojo dėsnio parametrai atitinkamai apibūdina: β – asimetriją, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\mu \in \mathbf{R}$ – poslinkį, o σ yra mastelio parametras, $\sigma > 0$.

Kuo mažesnis skirstinio stabilumo indeksas, tuo stipresnis leptokurtiškumas, t.y. tankio funkcija bus su aukštesniu maksimumu ir sunkesne uodega. Jei asimetriškumo indeksas yra lygus nuliui (kaip Gauss'o atveju) tai tuomet skirstinys yra simetriškas. Jei $\beta > 0$ ($\beta < 0$), skirstinys yra pasviręs į dešinę (kairę). Jei $\beta = 0$ ir $\mu = 0$, tai stabilusis skirstinys yra vadinamas simetrišku α-stabiliuoju ($S\alpha S$). Jei $\beta = 1$ tai dėsnis yra vadinamas stabiliojo dėsnio subordinatioriumi. Mastelio parametras apibendrina standartinio nuokrypio apibrėžimą. Stabilusis dispersijos analogas yra variacija υ_α, kuris apibūdinamas σ^α.

Yra keli ekvivalentiški α-stabiliųjų dėsnių apibrėžimo būdų.

1. Jei tiesinė nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių suma priklauso tai pačiai

skirstinių šeimai, tai ta šeima vadinama stabiliąja. Formaliai, atsitiktinis dydis r turi stabilųjį pasiskirstymą, jei kiekvienam $a > 0$ ir $b > 0$ egzistuoja konstanta $c > 0$ ir $d \in \mathbf{R}$ tokios, kad

$$ar_1 + br_2 \stackrel{d}{=} cr + d$$

kur r_1 ir r_2 yra nepriklausomos r kopijos, o lygybė „$\stackrel{d}{=}$" suprantama pasiskirstymo funkcijų prasme (čia ir toliau).

2. sakoma, kad atsitiktinis r dydis yra α-stabilusis, jei kiekvienam $n \geqslant 2$ egzistuoja tokia konstanta C_n ir realus skaičius D_n tokie, kad

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n \stackrel{d}{=} C_n r + D_n$$

kur $r_1, r_2, \ldots, r_n$ yra nepriklausomos r kopijos. Iš (Feller [47], Teorema VI.1.1) išplaukia, kad

$$C_n = n^{1/\alpha}.$$

3.2.1. Atskiri stabiliojo dėsnio atvejai

Stabiliųjų skirstinių tikimybinis tankis tik išimtiniais atvejais yra išreiškiamas elementariomis funkcijomis:

- normalusis skirstinys yra gaunamas, kai $\alpha = 2$. Todėl kalbėdami apie normalųjį pasiskirstymą, laikysime, kad jis yra α-stabilusis, simetriškas skirstinys su $\alpha = 2$, $\beta = 0$;
- Koši (Cauchy) skirstinys yra gaunamas, kai $\alpha = 1, \beta = 0$;
- Lévy skirstinys

$$p(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sigma}{2\pi x^3}} e^{-\sigma/(2x)}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

  yra gaunamas, kai $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ ($\beta = -1$)
- Holtsmarko skirstinys (nėra išreiškiamas elementariomis funkcijomis) yra gaunamas, kai $\alpha = 3/2$
- Išsigimęs skirstinys yra stabilusis, kai $\alpha = 0$.

3.2.2. Pagrindinės α-stabiliojo dėsnio savybės

Iš stabiliojo dėsnio savybių išplaukia, kad, kai $\alpha < 1$, neegzistuoja pirmasis momentas, o kai $\alpha < 2$ neegzistuoja antrasis momentas. Vienintelis stabilusis skirstinys, turintis baigtinį pirmąjį ir antrąjį momentus, yra Gauss'o [133]. Toliau pateikiamos kitos svarbios savybės.

- Adityviojo stabilumo savybė

Fundamentalioji stabiliųjų dėsnių savybė ([79]): Tegul $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir

$$\eta_n = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_n),$$

čia $b_n > 0$ ir a_n atitinkamai yra normuojančios ir centruojančios konstantos.

Jei $F_n(x)$ – atsitiktinių dydžių η_n pasiskirstymo funkcija, tai ribinis funkcijų $F_n(x)$ pasiskirstymas, kai $n \to \infty$, gali būti tik stabilusis. Atvirkščiai, bet kokiam stabiliajam skirstiniui $F(x)$ egzistuoja atsitiktinių dydžių seka, tokia, kad $F_n(x)$ konverguoja į $F(x)$, kai $n \to \infty$.

Iš šios teoremos seka, kad stabilieji skirstiniai yra be galo dalūs.

- Adityvumo savybė

Jei $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$ ir su $i = 1, 2$, o visi X_i tarpusavyje yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai

$$X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

čia

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/2}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2,$$

(žr. [133]);

- Pareto savybė ([133] ir [79])

Tegul $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ su $0 < \alpha < 2$. Tuomet didelių kvantilių tikimybes galima įvertinti tokiu būdu:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda^\alpha \mathbf{P}(X > \lambda) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha \quad \text{ir} \quad \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda^\alpha \mathbf{P}(X < -\lambda) = C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \sigma^\alpha,$$

t.y. $P(X > \lambda) \approx \frac{C_\alpha}{\lambda^\alpha}$, kai $\lambda \to \infty$, čia

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, \mathrm{d}x \right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}, & \text{jei} \quad \alpha \neq 1, \\ \dfrac{2}{\pi}, & \text{jei} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

- Momentų savybė

Atsitiktinio dydžio X p-tasis momentas

$$\mathbf{E}\,|X|^p = \int_0^\infty \mathbf{P}\left(|X|^p > y\right) \mathrm{d}y$$

yra baigtinis, jei $0 < p \leqslant \alpha$, o priešingu atveju jis neegzistuoja. Todėl, kai $\alpha < 1$ neegzistuoja pirmasis momentas, o kai $\alpha < 2$ neegzistuoja antrasis momentas. Vienintelis stabilusis skirstinys turintis baigtinį pirmąjį ir antrąjį momentus yra Gauss'o [133].

- β-savybė

Tegul X pasiskirstęs pagal $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ su $\alpha < 2$. Tada egzistuoja tokie du nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę a.d. Y_1 ir Y_2 su pasiskirstymo funkcija $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ [133], tokie, kad

$$X = \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_2, \text{ jei } \alpha \neq 1,$$

ir

$$X = \left(\frac{1+\beta}{2}\right) Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right) Y_2 + \sigma \left[\frac{1+\beta}{\pi} \ln\left(\frac{1+\beta}{2}\right) - \frac{1-\beta}{\pi} \ln\left(\frac{1-\beta}{2}\right) \right],$$

jei $\alpha = 1$.

- Stabilieji a.d. turi savybę, kuri gali būti užrašyta (Ribinio pasiskirstymo centruojančios ir normuojančios konstantos.)
  - Tegul $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi a.d. pasiskirstę pagal $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, tuomet

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \begin{cases} S_\alpha(\sigma n^{1/\alpha}, \beta, \mu n) & \alpha \neq 1, \\ S_\alpha(\sigma n, \beta, \mu n - \dfrac{2}{\pi}\sigma\beta n \ln n) & \alpha = 1. \end{cases}$$

  - Jei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi a.d. pasiskirstę pagal $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, tuomet ([133])

$$\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} n^{1/\alpha} X_1 + \mu(n - n^{1/\alpha}), & \alpha \neq 1, \\ n X_1 + \dfrac{2}{\pi}\sigma\beta n \ln n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

3.2.2.1. Charakteringoji funkcija

Stabilieji skirstiniai bendru atveju neturi pasiskirstymo ir tikimybinio tankio funkcijų analitinių išraiškų išreikštų elementariomis funkcijomis [133]. Todėl jie dažniausiai aprašomi charakteringosiomis funkcijomis.

Charakteringosios funkcijos pavidalas priklauso nuo pasirinktos parametrizacijos. Yra išskiriamos kanoninė, Zolotariovo, Nolano ir kitos parametrizacijos.

Atsitiktinio α-stabiliojo dydžio r charakteringoji funkcija kanoninėje parametrizacijoje yra tokia:

$$\Phi_r(\theta) = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - \mathrm{i}\beta \,\mathrm{sign}(\theta) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) + \mathrm{i}\mu\theta\right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{-\sigma |\theta| \left(1 + \frac{2}{\pi}\mathrm{i}\beta \,\mathrm{sign}(\theta) \ln|\theta|\right) + \mathrm{i}\mu\theta\right\}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

kur $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$.

Tarp kanoninės ir Zolotariovo parametrizacijų yra galimas perėjimas (Zolotoriov [156], B parametrizacija), kuomet parametras β keičiamas į β_B, o parametras σ į σ_B tokiu būdu:

$$\beta_B = \frac{2}{(\alpha-2)\pi} \arctan\left(\beta \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right),$$

$$\sigma_B = \sigma \cos^{\frac{1}{\alpha}}\left(\beta_B \frac{(\alpha-2)\pi}{2}\right).$$

Atskiru atveju a.d. $A \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, Laplaso transformacija $\mathbf{E}[\exp(-\gamma A)]$, $\gamma > 0$, kai $0 < \alpha < 2$, $\sigma > 0$ yra lygi

$$\mathbf{E}[\exp(-\gamma A)] = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\sigma^\alpha}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\gamma^\alpha\right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi}\gamma\ln\gamma\right\}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

(žiūrėti [133]).

3.2.2.2. Tikimybinis tankis

Pritaikius atvirkštinės Laplaso transformacijos formulę gauname stabiliojo skirstinio tikimybių tankio išraišką [79]:

$$p(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}\theta x} \exp\left\{\mathrm{i}\mu\theta - \sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - \mathrm{i}\beta\,\mathrm{sign}(\theta)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right\} \mathrm{d}\theta, \alpha \neq 1, \\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}\theta x} \exp\left\{\mathrm{i}\mu\theta - \sigma|\theta|\left(1 + \frac{2}{\pi}\mathrm{i}\beta\,\mathrm{sign}(\theta)\ln|\theta|\right)\right\} \mathrm{d}\theta, \qquad \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Stabiliajam skirstiniui su tankio funkcija $p(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma)$, $\alpha > 0$ galioja lygybė

$$p(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma) = \begin{cases} \sigma^{-1/\alpha} p\left((x-\mu)\sigma^{-1/\alpha}, \alpha, \beta, 0, 1\right), & \alpha \neq 1, \\ \sigma^{-1} p\left((x-\mu)\sigma^{-1} - \beta\frac{2}{\pi}\ln(\sigma), 1, \beta, 0, 1\right), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Nemažinant bendrumo, galima laikyti, kad jei $\mu = 0$ ir $\sigma = 1$, bei $p(x,\alpha,\beta) = p(x,\alpha,\beta,0,1)$, tai

$$p(x,\alpha,\beta) = p(-x,\alpha,-\beta).$$

Tarkime, turime stabilųjį skirstinį su tankio funkcija $p(x,\alpha,\beta)$. Jei $0 < \alpha < 1$ ir $x > 0$, tai tankio funkciją galima išreikšti tokia suma

$$p(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\alpha(\beta+1)\right)\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{k!}x^{-k\alpha}.$$

Galima įsitikinti, kad kai $\alpha > 1$ tai ši eilutė diverguoja.

Jei $1 < \alpha < 2$, $x > 0$, tai

$$p(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\alpha k + (k+1)(2-\alpha)\beta}{\alpha}\right)\right]\frac{\Gamma((k+1)/\alpha)}{\alpha k!}x^k.$$

Jei $\alpha < 1$ ši eilutė diverguoja. Jei $\alpha = 1$, $x > 0$ tai bet kokiam N galioja ši apytikslė formulė

$$p\left(x + \frac{2\beta}{\pi}\ln x, 1, \beta\right) \approx \frac{1}{\pi x}\sum_{k=0}^{N}\frac{b_k}{k!}x^{-k} + O\left(x^{-N-2}\right),$$

kur

$$b_k = \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-t} t^k \left(\mathrm{i} + \mathrm{i}\beta - \frac{2\beta}{\pi} \ln t \right)^k \mathrm{d}t.$$

Šiame darbe tankio funkcijai skaičiuoti yra naudojama integralinė išraiška išplaukianti iš charakteringosios funkcijos kanoninės parametrizacijos (žr. [133] formulė (1.1.6) arba [157] formulė (2.1)) apvertimo

$$p(x, \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi\sigma} \int_0^\infty e^{-t^\alpha} \cos\left(t \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) - \beta t^\alpha \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \mathrm{d}t.$$

Iš [156] Lemos 2.2.3, bei Zolotariovo integralines formulės (žr. [156], Teorema 2.2.3) išplaukia dar viena tankio funkcijos išraiška (kai $\alpha \neq 1$, Zolotariovo parametrizacijoje)

$$p(x, \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \begin{cases} \dfrac{\alpha \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{1/(\alpha-1)}}{2\sigma |\alpha - 1|} \displaystyle\int_{-\theta}^{1} U_\alpha(\varphi, \theta) \exp\left\{ \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^{\alpha/(\alpha-1)} U_\alpha(\varphi, \theta) \right\} \mathrm{d}\varphi, & x \neq \mu, \\ \dfrac{1}{\pi\sigma} \Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right) \cos\left(\dfrac{1}{\alpha} \arctan\left(\beta \tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right), & x = \mu. \end{cases} \tag{3.3}$$

čia

$$U_\alpha(\varphi, \theta) = \left(\frac{\sin\left(\alpha(\varphi + \theta)\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}((\alpha-1)\varphi + \alpha\theta)\right)}{\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)} \right),$$

$$\theta = \arctan\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \frac{2}{\alpha\pi} \operatorname{sign}(x - \mu).$$

Tad atlikę pakeitimus šį integralą galime skaičiuoti pagal 96 mazgų Gauss'o kvadratūrą (Zolotariovo parametrizacijoje):

$$p(x, \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \begin{cases} \dfrac{1+\theta}{2} \dfrac{\alpha |y|^{1/(\alpha-1)}}{2\sigma |1-\alpha| \cdot \psi(\alpha, \beta)} \displaystyle\sum_{i=1}^{96} w_i U_\alpha(t_i, \theta) \exp\left\{ -|y|^{\alpha/(\alpha-1)} U_\alpha(t_i, \theta) \right\}, & y \neq 0, \\ \dfrac{1}{\pi\sigma} \Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right) \cos\left(\dfrac{1}{\alpha} \arctan\left(\beta \tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right), & y = 0. \end{cases}$$

čia $y = \frac{x-\mu}{\sigma \cdot \psi(\alpha,\beta)}$, $\psi(\alpha, \beta) = \left[1 + \left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right)^2 \right]^{1/2\alpha}$, $t_i = \dfrac{1 - \theta + (1+\theta) z_i}{2}$, o z ir w yra atitinkamai kvadratūros abscisės ir ordinatės.

Tikimybinio tankio funkcijos pavyzdys kai $-4 \leqslant x \leqslant 4$ pateiktas paveiksluose 3.3 ir 3.4.

Tuo atveju kai $\alpha = 1$ ir $\beta \neq 0$ taikoma ši formulė

$$p(x, \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{\pi \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right)}{4|\beta|\sigma} \sum_{i=1}^{96} w_i \mathit{U1}(z_i, \beta) \exp\left\{ \exp\left(-\frac{y}{\beta} \right) \mathit{U1}(z_i, \beta) \right\}$$

čia

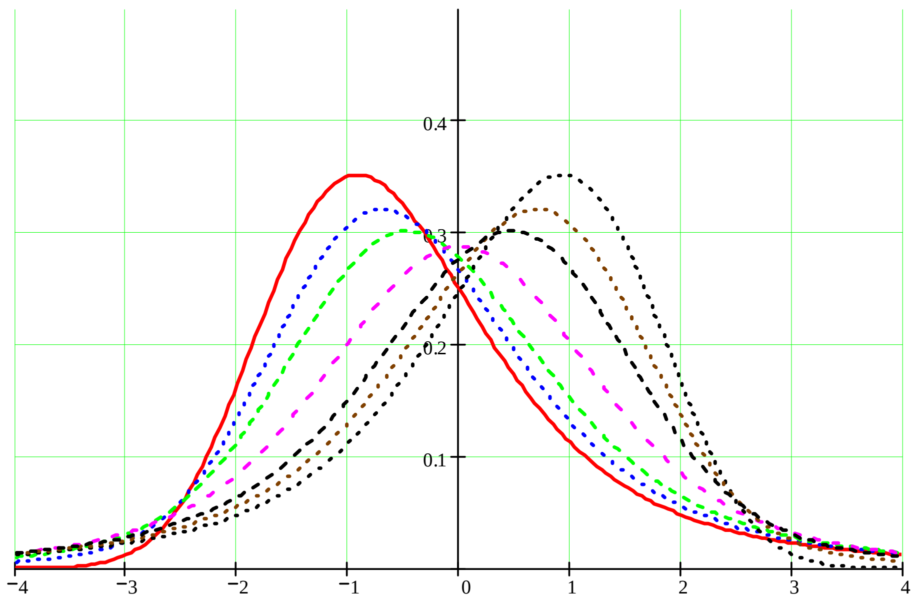
$$y = \frac{x - \mu - 2\sigma\beta \ln(\sigma)/\pi}{2\sigma/\pi},$$

$$\mathit{U1}(\varphi, \beta) = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \beta\varphi}{\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)} \exp\left(\frac{\pi}{2} \left(\varphi + \frac{1}{\beta} \right) \tan\left(\frac{\pi\varphi}{2} \right) \right),$$

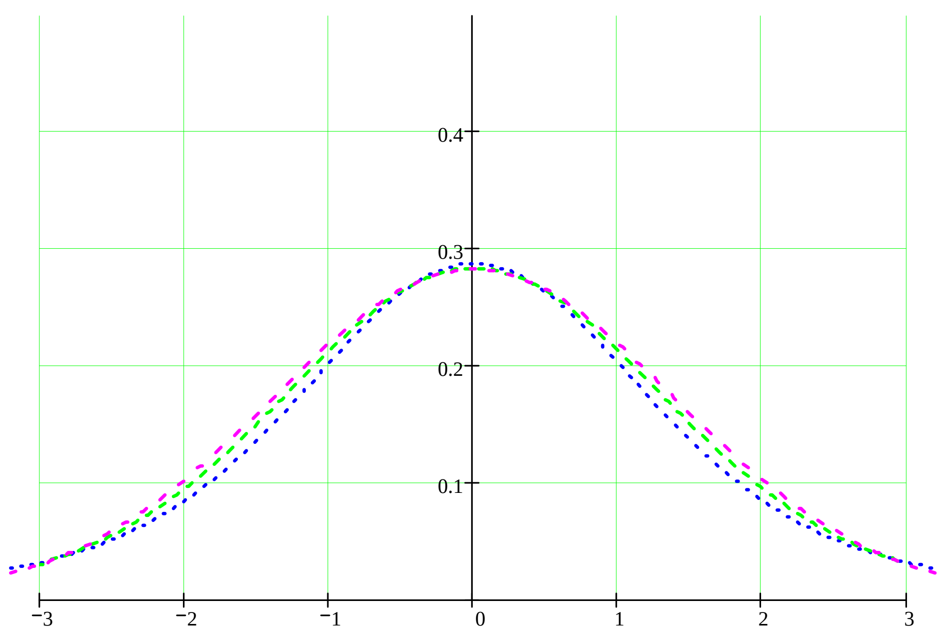
z ir w yra atitinkamai kvadratūros abscisės ir ordinatės

Stabiliojo dėsnio tikimybės yra gaunamos standartiniu būdu integruojant tankio funkciją

$$F(x, \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{x} p(t, \alpha, \beta, \mu, \sigma) \mathrm{d}t$$



Paveikslas 3.3: Tikimybinio tankio funkcijos grafikai, kai $\alpha = 1.5$, $\beta = (-1, -0.75, -0.5, 0, 0.5, 0.75, 1)$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$.



Paveikslas 3.4: Tikimybinio tankio funkcijos grafikai, kai $\alpha = (1.25, 1.5, 1.75, 1.95)$, $\beta = 0.5$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$.

arba skaičiuojant tokias sumas [69]

$$F(x,\alpha,0,0,1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\Gamma((2k-1)/\alpha)}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

arba

$$F(x,\alpha,0,0,1) = 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\Gamma(\alpha k)}{k!}x^{-\alpha k}\sin\left(\frac{k\pi\alpha}{2}\right).$$

Tačiau praktikoje tokiu būdu apskaičiuoti pasiskirstymo funkciją pavyksta tik keletu išimtinių atvejų, todėl yra taikoma 96 mazgų Gauss'o kvadratūra

$$F(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma) = \begin{cases} CC + \frac{\operatorname{sign}(1-\alpha)}{4}\left(1 + o\left(\frac{x-\mu}{\sigma},\alpha,\beta\right)\right)\sum\limits_{i=1}^{96} w_i ff\left(\frac{x-\mu}{\sigma}, y_i, \alpha, \beta\right), & \frac{x-\mu}{\sigma} > 0,\\ 1 - \left[CC + \frac{\operatorname{sign}(1-\alpha)}{4}\left(1 + o\left(-\frac{x-\mu}{\sigma},\alpha,-\beta\right)\right)\sum\limits_{i=1}^{96} w_i ff\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}, y_i, \alpha, -\beta\right)\right], & \frac{x-\mu}{\sigma} < 0\\ \frac{1-2\arctan(\alpha\cdot\tan(\pi\alpha/2))}{\pi\alpha/2}, & \frac{x-\mu}{\sigma} = 0 \end{cases}$$

čia w_i Gauss'o kvadratūros ordinatės, $y_i = \frac{1+xs_i+(xs_i-1)o(\frac{x-\mu}{\sigma},\alpha,\beta)}{2}$, xs_i yra Gauss'o kvadratūros abscisės, o

$$CC = 1 - \left(\frac{1+\operatorname{sign}(1-\alpha)}{4}\right)\cdot\left(1 + \frac{2\arctan(\beta\tan(\pi\alpha/2))}{\pi\alpha}\right),$$

$$o(x,\alpha,\beta) = \operatorname{sign}(x)\frac{2}{\pi\alpha}\arctan(\beta\tan(\pi\alpha/2)),$$

$$ff(x,y,\alpha,\beta) = \exp\left\{-|x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\cdot\left(\frac{\sin(\alpha\pi(y+o(x,\alpha,\beta))/2)}{\cos(y\pi/2)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\cdot\frac{\cos\left(\pi(y(\alpha-1)+\alpha o(x,\alpha,\beta))/2\right)}{\cos(y\pi/2)}\right\}.$$

Kvadratūrinėms formulėms taikyti siūlomas toks algoritmas:

Algoritmas 2 Pasiskirstymo funkcijos skaičiavimas *pasiskirstymas*(X, par)

■ *Tikslas*: Apskaičiuoti pasiskirstymo funkcijos reikšmę taške X su parametrais par;

Įėjimo parametrai: X (realus skaičius) duotasis taškas, par masyvas saugantis keturis realius stabiliojo dėsnio parametrus;

Išėjimo parametrai: *pasi* (realus skaičius iš intervalo $[0,...,1]$) pasiskirstymo funkcijos reikšmė;

Naudojama atmintis: atminties beveik nenaudoja;

Laiko sąnaudos: labai priklauso nuo kvadratūrinės pasiskirstymo funkcijos apskaičiavimo;

Aprašymas:

- centruojam ir normuojam x: $x3 = (x - par[2])/par[3]$;
- jei $x3 > 0$ funkciją apskaičiuojam pagal $GF(x3, par[0], par[1])$;
- jei $x3 < 0$ funkciją apskaičiuojam pagal $1 - GF(-x3, par[0], -par[1])$;
- jei $x3 = 0$ taikoma speciali funkcija $\left(\frac{1-2\arctan(\alpha\cdot\tan(\pi\alpha/2))}{\pi\alpha/2}\right)$

Algoritmas:

1. $b = par[1]$;
2. $x3 = (X - par[2])/par[3]$;
3. IF $(x3 > 0)$ THEN $pasi = GF(x3, par)$;

   3.1. ELSE IF $(x3 < 0)$ THEN

      3.1.1. $par[1] = -par[1]$;
      3.1.2. $pasi = 1 - GF(-x3, par)$;
      3.1.3. $par[1] = b$;

3.2. ELSE

3.2.1. $pasi = (1 - 2 \cdot \arctan(par[1] \cdot \tan(pi \cdot par[0]/2))/(pi \cdot par[0]))/2;$

4. IF $(pasi < 1e - 307)$ THEN $pasi = 1e - 20;$
5. IF $(pasi >= 1)$ THEN $pasi = 0.9999999999999999;$
6. RETURN $pasi;$

Comments:

▲

$$GF(x3, \alpha, \beta) = CC + \frac{\text{sign}(1-\alpha)}{4}\left(1 + o(x3, \alpha, \beta)\right)\sum_{i=1}^{96} w_i ff(x3, y_i, \alpha, \beta),$$

čia w_i Gauss'o kvadratūros ordinatės, $y_i = \frac{1+x_i+(x_i-1)o(x3,\alpha,\beta)}{2}$, x_i yra Gauss'o kvadratūros abscisės, o

$$CC = 1 - \left(\frac{1 + \text{sign}(1-\alpha)}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{2\arctan(\beta\tan(\pi\alpha/2))}{\pi\alpha}\right),$$

$$o(x3, \alpha, \beta) = \text{sign}(x3)\frac{2}{\pi\alpha}\arctan(\beta\tan(\pi\alpha/2)),$$

$$\begin{aligned} ff(x3, y, \alpha, \beta) \quad = \quad \exp\Bigg\{ & -|x3|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \cdot \left(\frac{\sin(\alpha\pi(y + o(x3,\alpha,\beta))/2)}{\cos(y\pi/2)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ & \times \frac{\cos\left(\pi(y(\alpha-1) + \alpha o(x3,\alpha,\beta))/2\right)}{\cos(y\pi/2)}\Bigg\}. \end{aligned}$$

▲■

3.2.2.3. α-stabilių atsitiktinių dydžių sekos generavimas

Generuojant nepriklausomų atsitiktinių dydžių seką, pasiskirsčiusią pagal α-stabilųjį dėsnį $S_\alpha(1, \beta, 0)$, $a \neq 1$, atliekami tokie veiksmai [69]:

- generuojame atsitiktinį dydį ν, tolygiai pasiskirsčiusį intervale $(-\pi/2, \pi/2)$;
- generuojame atsitiktinį dydį W, pasiskirsčiusį pagal eksponentinį dėsnį, su vidurkiu 1;
- skaičiuojame $C = \arctan\left(\beta\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)\alpha^{-1}$;
- skaičiuojame $D = \left(1 + \left(\beta\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2a}}$;
- galiausiai gauname dydį pasiskirsčiusį pagal α-stabilųjį dėsnį

$$Y = D\frac{\sin(\alpha(\nu + C))}{(\cos(\nu))^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\cos(\nu - \alpha(\nu + C))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Algoritmas 3 Stabiliųjų atsitiktinių dydžių generavimas *generavimas*(par, n)

■*Tikslas*: sugeneruoti n ilgio stabiliųjų atsitiktinių dydžių, su parametrais par, seką.

Įėjimo parametrai: par (keturmatis realių skaičių masyvas) stabilieji parametrai, n (sveikasis skaičius) generuojamos sekos ilgis.

Išėjimo parametrai: X (n matis realių skaičių masyvas) – seka pasiskirsčiusi pagal α-stabilųjį dėsnį;

Naudojama atmintis: papildomos atminties nenaudoja (atmintis reikalinga tik pačiai sekai saugoti);

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio n (yra atliktas tyrimas, kaip priklauso laikas nuo n);

Aprašymas:

1. Kadangi generuojamas atsitiktinis dydis išreiškiamas per dvi konstantas C ir D kurios priklauso tik nuo $\alpha = par[0]$ ir $\beta = par[1]$, tai šias konstantas pirmiausiai ir apskaičiuojame $C = \arctan \frac{\beta \tan(\pi\alpha/2)}{\alpha}$, $D = \left(1 + (\beta \tan(\pi\alpha/2))^2\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$;
2. Generuojame i-tąjį a.d. sekos narį $X[i]$:
   2.1. generuojame du a.d., V – tolygiai pasiskirstęs intervale $(-\pi/2;\pi/2)$ ir W – pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį;
   2.2. skaičiuojame $Y = D \cdot \frac{\sin(\alpha(V+C))}{\cos^{\frac{1}{\alpha}}(V)} \cdot \left(\frac{\cos(V-\alpha(V+C))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$;
   2.3. gauname $X[i]$: $X[i] = par[3]Y + par[2]$;
3. n kartų kartojame 2-ąjį punktą;

Algoritmas:

1. $C = \arctan(b \cdot \tan(pi \cdot a/2))/a$;
2. $D = (1 + (b \cdot \tan(pi \cdot a/2))^2)^{1/(2\cdot a)}$;
3. FOR $i = 0$ TO N DO
   3.1. $V = (RAND() \cdot pi) - (pi/2)$;
   3.2. $W = -\ln(RAND())$;
   3.3. $Y = |\cos(V - a \cdot (V + C))/W|^{(1-a)/a} \cdot D \cdot \sin(a \cdot (V + C))/ |\cos(V)|^{(1/a)}$;
   3.4. $X[i] = Y \cdot par[3] + par[2]$;
   3.5. $i = i + 1$;
4. RETURN X;

■

3.2.3. Tikimybinio tankio skaičiavimas

Integralai (3.2) ir (3.3) gali būti apskaičiuojami matematinių programinių sistemų MathCad, MAPLE, MatLab priemonėmis. Beje, jų skaičiavimui patogu taikyti Lagero ir Gauss'o kvadratūrines formules, nes tai labai pagreitina skaičiavimus, užtikrina maža skaičiavimų paklaidą (apie 10^{-6}). Geriausi rezultatai gaunami skaičiuojant pagal formulę (3.3) su 96 mazgų Gauss'o kvadratūrine formule (žr. pav. 3.5).

Kai $x \to \infty$ ir $x \to 0$ taikomos asimptotinės formulės [137]. Stabiliojo dėsnio tikimybinio tankio funkcijos aproksimacijos esant įvairiems α ir β parametrams pateiktos 3.1-oje lentelėje.

Iškyla klausimas: kada laikyti, kad x jau „pakankamai didelis" ar „pakankamai mažas" ir tankį skaičiuoti pagal asimptotines formules. Kai $x \to \pm\infty$ „perjungimo" taškas parenkamas iš lygties $p_\infty(x_{0.001}) = 0.001$, kurios sprendinys randamas kirstinių metodu. Kai $x \to \pm 0$ perjungimo taškai randami pagal tokį algoritmą

$$\begin{aligned} x_{+0} &= h \cdot (q + u) \cdot \alpha^{3/2}, \\ x_{-0} &= h \cdot (-r - u) \cdot \alpha^{3/2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Formulėse (3.4) q, r, h ir u reikšmės apskaičiuojamos pagal 3.2 Lentelę.

Koeficientai 3.2 Lentelėje parinkti atlikus išsamius praktinius bandymus su tankio funkcijomis.

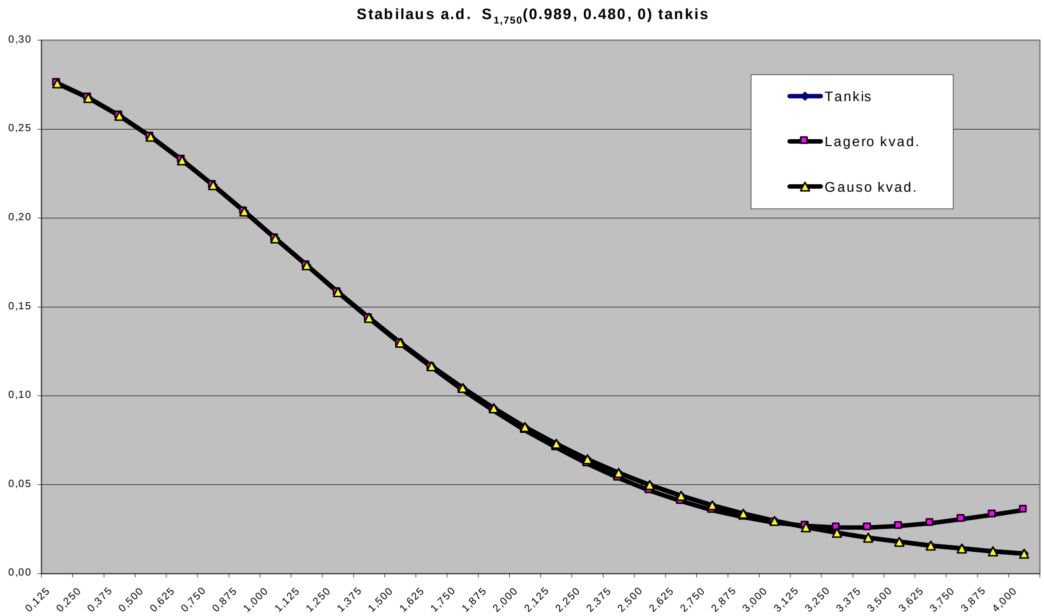
Galima pastebėti (žr. pav. 3.6, 3.7 ir 3.8), kad atlikti patikslinimai duoda apčiuopiamai geresnius rezultatus. Stabiliojo dėsnio tankiui ir pasiskirstymo funkcijai apskaičiuoti buvo sudarytos paprogramės (C++ ir JAVA kalbomis).

3.1. Lentelė. Stabiliojo dėsnio tikimybinio tankio funkcijos aproksimacijos esant įvairiems α ir β parametrams.

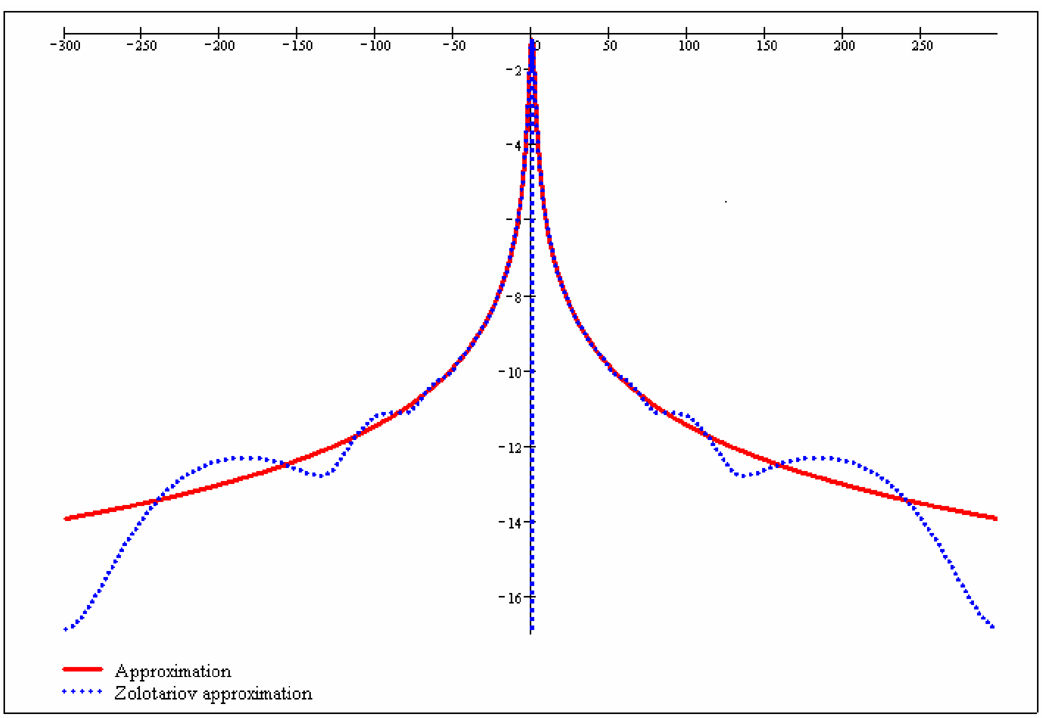
	$1<\alpha<2$
$-1<\beta\leqslant 1$, $\frac{x-\mu}{\sigma}\to+\infty$	$p_\infty(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma)=\frac{1}{\pi x}\sum\limits_{n=1}^{N} a_n x^{-\alpha n}+O(x^{-(N+1)\alpha-1})$, čia $a_n=\frac{(-1)^{n-1}\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\left(1+\beta^2\tan^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{n/2}$ $\times\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2}\alpha+\arctan\left(\beta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)\right)\right]$.
$-1\leqslant\beta<1$, $\frac{x-\mu}{\sigma}\to-\infty$	$p_\infty(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma)=\frac{1}{\pi x}\sum_{n=1}^{N} a_n(-x)^{-\alpha n}+O((-x)^{-(N+1)\alpha-1})$, čia $a_n=\frac{(-1)^{n-1}\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\left(1+\beta^2\tan^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{n/2}$ $\times\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2}\alpha+\arctan\left(-\beta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)\right)\right]$
$\beta=1$, $\frac{x-\mu}{\sigma}\to-\infty$	$p_\infty(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma)=A(\alpha)(-x)^{-1+\frac{\lambda(\alpha)}{2}}\left(1+O\left((-x)^{-\frac{\lambda(\alpha)}{2}+\varepsilon}\right)\right)$ $\times\exp\left\{-B(\alpha)(-x)^{\lambda(\alpha)}\right\}$, čia $A(\alpha)=\frac{\alpha^{\frac{-1}{2(\alpha-1)}}\cdot\left\|\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\|^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}}{\sqrt{2\pi(\alpha-1)}}$, $B(\alpha)=(\alpha-1)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}\left\|\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\|^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $\lambda(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$.
$\beta=-1$, $\frac{x-\mu}{\sigma}\to+\infty$	$p_\infty(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma)=A(\alpha)x^{-1+\frac{\lambda(\alpha)}{2}}\left(1+O\left(x^{-\frac{\lambda(\alpha)}{2}+\varepsilon}\right)\right)$ $\times\exp\left\{-B(\alpha)x^{\lambda(\alpha)}\right\}$
$\frac{x-\mu}{\sigma}\to+0$	$p_0(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma)=\frac{F_1(\alpha,\beta)+F_2(\alpha,\beta)\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)+F_3(\alpha,\beta)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{\sigma}$, čia $F_1(\alpha,\beta)=D(\alpha,\beta)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cos\left(\frac{\arctan\left(C(\alpha,\beta)\right)}{\alpha}\right)\frac{1}{\pi\alpha}$, $F_2(\alpha,\beta)=-D^2(\alpha,\beta)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\sin\left(\frac{2\arctan\left(C(\alpha,\beta)\right)}{\alpha}\right)\frac{1}{\pi\alpha}$, $F_3(\alpha,\beta)=-D^3(\alpha,\beta)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)\cos\left(\frac{3\cdot\arctan(C(\alpha,\beta))}{\alpha}\right)\frac{1}{2\pi\alpha}$ $C(\alpha,\beta)=-\beta\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)$, $D(\alpha,\beta)=\left(1+C^2(\alpha,\beta)\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}$,
$\frac{x-\mu}{\sigma}\to-0$	$p_0(x,\alpha,\beta,\mu,\sigma)=\frac{F_1(\alpha,\beta)+F_2(\alpha,\beta)\cdot\left(\frac{-x+\mu}{\sigma}\right)+F_3(\alpha,\beta)\left(\frac{-x+\mu}{\sigma}\right)^2}{\sigma}$, čia $C(\alpha,\beta)=\beta\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)$.

3.2. Lentelė. Perjungimo į aproksimacijas taškai, kai x maži.

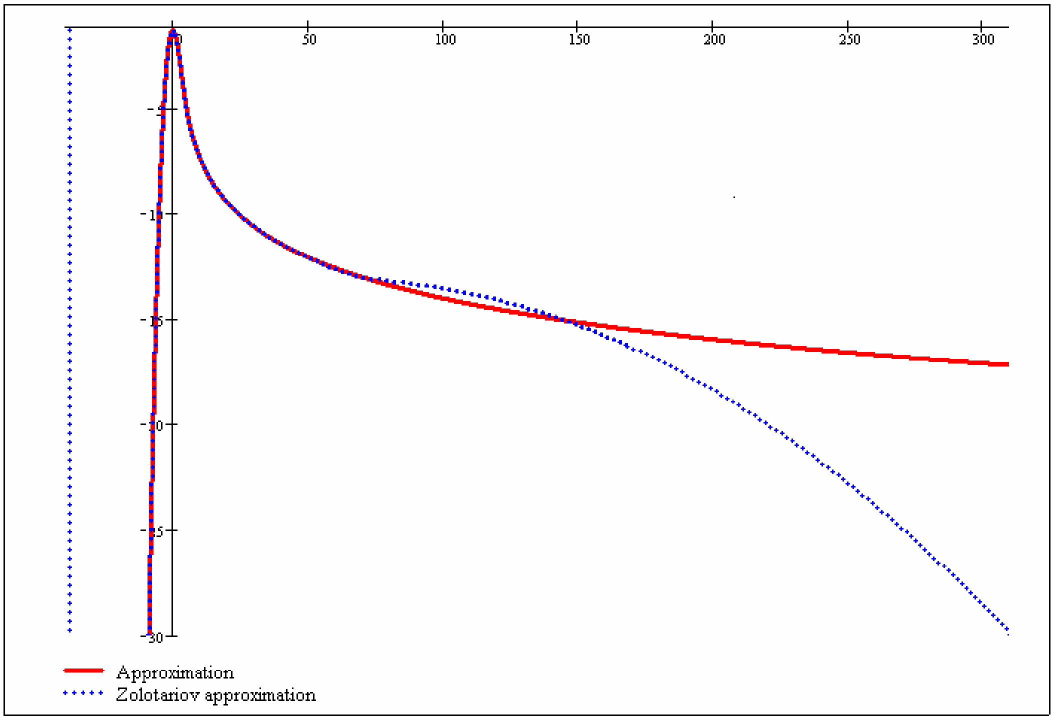
$\beta=0$	$q=0$,	$r=0$,	$u=0.45$
$\beta\neq 0$	$q=(0.75-0.25\beta)\,\|\beta\|$,	$r=(0.75+0.25\beta)\,\|\beta\|$,	$u=0.1\,\|\beta\|+0.4$
$\alpha\leqslant 1.09$	$h=1+2.5\,\|\beta\|$		
$\alpha>1.09$	$h=1$		



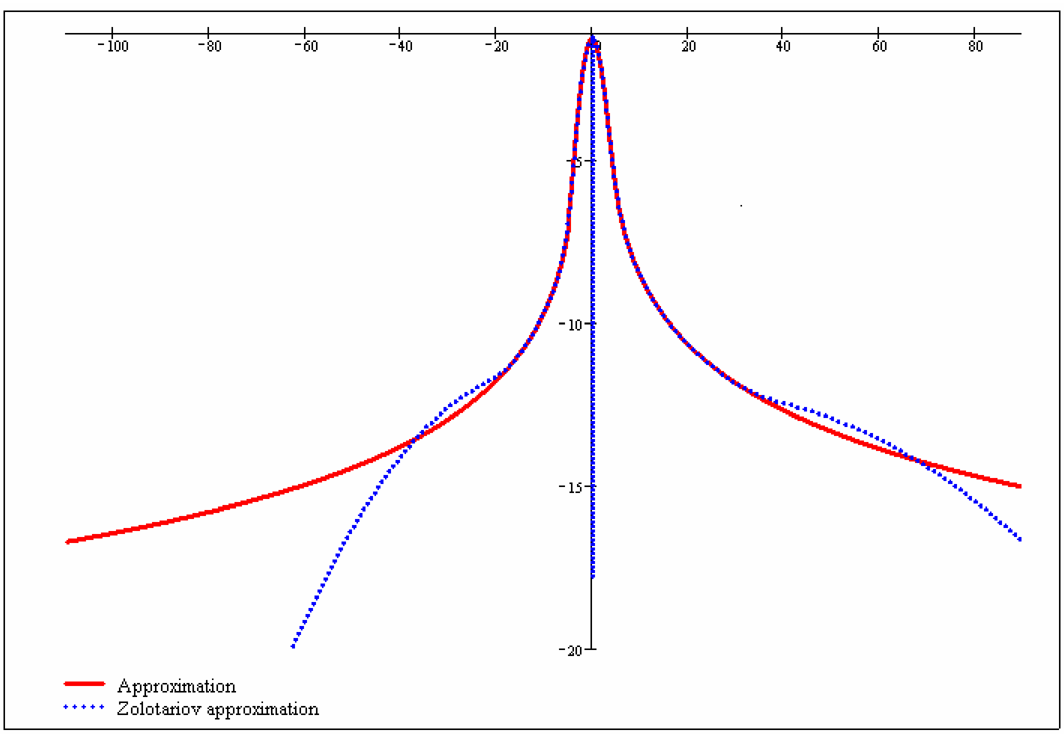
Paveikslas 3.5: Stabilaus atsitiktinio dydžio tankio, suskaičiuoto skirtingais metodais, palyginimas.



Paveikslas 3.6: Tankio funkcijos logaritmas pagal (3.3) formulę ir pagal 3.1 bei 3.2 Lenteles, čia $S_{1.5}(1,0,0)$



Paveikslas 3.7: Tankio funkcijos logaritmas pagal (3.3) formulę ir pagal 3.1 bei 3.2 Lenteles, čia $S_{1.25}(1, 1, 0)$



Paveikslas 3.8: Tankio funkcijos logaritmas pagal (3.3) formulę ir pagal 3.1 bei 3.2 Lenteles, čia $S_{1.75}(1, -0.5, 0)$

Algoritmas 4 Tankio funkcijos skaičiavimas $tankis(x, par, m, xb)$

■ *Tikslas*: Apskaičiuoti tankio funkcijos reikšmę taške x su parametrais par;

Įėjimo parametrai: x (realus skaičius) duotasis taškas, par (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų vektorius, m (sveikasis skaičius) parametrų skaičius, x-sų perjungimo taškų vektorius xb (keturmatis realių skaičių masyvas, randami pagal algoritmą 10 ir formulę (3.8));

Išėjimo parametrai: $tank$ (realusis skaičius) tankio funkcijos reikšmė;

Naudojama atmintis: atminties beveik nenaudoja;

Laiko sąnaudos: labai priklauso nuo kvadratūrinės tankio funkcijos apskaičiavimo;

Aprašymas:

- $q = 0$, $w = 0$, $r = 0$, $c = 1$;
- centruojam ir normuojam x: $x3 = (x - par[2])/par[3]$;
- jei $x3$ dideli, kirstinių metodu apskaičiuojami perjungimo taškai ir tankio funkcijos asimptotinės reikšmės pagal aproks ir funkcija $xdidelis(x, par, xb)$;
- jei x maži ($(x3 - \mu)/\sigma \to 0$ arba $x \to 0$), tai pagal eq:xmazi ir tab:xmazi apskaičiuojame h, q, r, u reikalingus perjungimui, bei pačius taškus bn ir bm. Priklausomai nuo $x3$ reikšmės bn ir bm atžvilgiu atliekamas perjungimas į $nulioapl(x, par, \pm 1)$ arba tiesiogiai taikoma tankio skaičiavimo integralinė formulė (tankis2) ir funkcija $pstable(x, par)$.

Algoritmas:

1. $q = 0$, $w = 0$, $r = 0$, $c = 1$;
2. $x3 = (x - par[2])/par[3]$;
3. $xmin = xb[0]$, $xmax = xb[1]$, $bmin = xb[2]$, $bmax = xb[3]$;
4. IF((($x3 > xmax$) AND ($par[1] > 0.9999$)) OR (($x3 < xmin$) AND ($par[1] < 0.9999$)) OR (($x3 > bmax$) AND ($par[1] > 0.9999$)) OR (($x3 > bmin$) AND ($par[1] < -0.9999$))) THEN
   - 4.1. $tank = xdidelis(x, par, xb)$;
5. ELSE
   - 5.1. IF ($|par[1]| < 0.0001$) THEN
     - 5.1.1. $u = 0.45$; $q = 0$; $r = 0$;
   - 5.2. ELSE
     - 5.2.1. $q = (0.75 - 0.25 \cdot par[1]) \cdot |par[1]|$;
     - 5.2.2. $r = (0.75 + 0.25 \cdot par[1]) \cdot |par[1]|$;
     - 5.2.3. $u = 0.1 \cdot (|par[1]| + 4)$;
   - 5.3. IF ($par[0] < 1.09$) THEN $h = (1 + 2.5 \cdot |par[1]|)$;
   - 5.4. $bn = h \cdot (q + u)/par[0]^{3/2}$
   - 5.5. $bm = h \cdot (-r - u)/par[0]^{3/2}$
   - 5.6. IF ((($x3 < bn$) AND ($x3 >= 0$)) OR (($x3 > bm$)) AND ($x3 < 0$)) THEN
     - 5.6.1. IF ($x3 >= 0$) THEN $tank = nulioapl(X, par, 1)$;
     - 5.6.2. ELSE
       $par[1] = -par[1]$;
       $tank = nulioapl(-X, par, -1)$;
       $par[1] = -par[1]$;
   - 5.7. ELSE

5.7.1. $tank = pstable(X, par)$;

6. RETURN $tank$;■

Naudotos funkcijos ir papildomi algoritmai:

Algoritmas 5 $nulioapl(X, par, z)$

■*Tikslas*: Aproksimuoti tankio funkciją parabole, taške $X \to \pm 0$;

Įėjimo parametrai: X (realusis skaičius) duotasis taškas (centruotas ir normuotas), par (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų vektorius, $z = \pm 1$ (jei $x \geqslant \mu$ tai $z = 1$, priešingu atveju $z = -1$);

Išėjimo parametrai: y (realusis skaičius) aproksimuota tankio funkcijos reikšmė taške X;

Naudojama atmintis: atminties beveik nenaudoja;

Laiko sąnaudos: nežinomos;

Aprašymas:

Algoritmas:

- $r = [1 + (par[1] \cdot \tan(pi \cdot par[0]/2))^2]^{-1/(2 \cdot par[0])}$;
- $y0 = r \cdot \Gamma(1/x[0]) \cdot \cos\{\arctan(-par[1] \cdot \tan(pi \cdot par[0]/2))/par[0]\}/(pi \cdot par[0])$;
- $y1 = -r^2 \cdot \Gamma(2/x[0]) \cdot \sin\{2 \cdot \arctan(-par[1] \cdot \tan(pi \cdot par[0]/2))/par[0]\}/(pi \cdot par[0])$;
- $y2 = -r^3 \cdot \Gamma(3/x[0]) \cdot \cos\{3 \cdot \arctan(-par[1] \cdot \tan(pi \cdot par[0]/2))/par[0]\}/(2 \cdot pi \cdot par[0])$;
- $m = (X - par[2] \cdot z)/par[3]$;
- $y = (y0 + y1 \cdot m + y2 \cdot m \cdot m)/par[3]$;
- RETURN y;.

čia $\Gamma(x)$ yra gama funkcija.■

Algoritmas 6 double xdidelis(X,par, xb){

■*Tikslas*: Aproksimuoti tankio funkciją, kai $X \to \pm\infty$;

Įėjimo parametrai: X (realusis skaičius) duotasis taškas, par (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų vektorius, x-sų perjungimo taškų vektorius xb (keturmatis realių skaičių masyvas);

Išėjimo parametrai: f (realusis skaičius) aproksimuota tankio funkcijos reikšmė taške X;

Naudojama atmintis: atminties beveik nenaudoja;

Laiko sąnaudos: nežinomos;

Aprašymas:

Algoritmas:

1. $a = par[0]$, $b = par[1]$, $m = par[2]$, $s = par[3]$;
2. $xmin = xb[0]$, $xmax = xb[1]$, $bmin = xb[2]$, $bmax = xb[3]$;
3. $x3 = (X - m)/(s)$;——————————centruojam ir normuojam X;
4. IF $((x3 > xmax)$ AND $(b > -0.9999))$

   4.1. $f = xdidx(x3, a, b, s)$;

5. IF $((x3 < bmax)$ AND $(b > 0.9999))$

   5.1. $f = xdidb(x3, a, s)$;

6. if $((x3 < xmin)$ AND $(b < 0.9999))$

   6.1. $f = xdidx(-x3, a, -b, s)$;

7. if $((x3 > bmin)$ AND $(b < -0.9999))$

7.1. $f = xdidb(-x3, a, s)$;

8. RETURN f;

Comment:▲

$$xdidb(x,a,s) = a^{-1/(2\cdot(a-1))}x^{-1+a/(2\cdot(a-1))}\cdot\frac{|\cos(\pi a/2)|^{1/(2(a-1))}}{s\sqrt{2\pi(a-1)}} \times\exp\left[-(a-1)\cdot a^{-\frac{a}{a-1}}\cdot\left|\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)\right|^{\frac{1}{a-1}}\cdot x^{\frac{a}{a-1}}\right]; \quad (3.5)$$

$$xdidx(x,a,b,s) = \frac{1}{\pi\,x\,s}\sum_{i=1}^{5}(-1)^i\frac{\Gamma(a\,i+1)}{\Gamma(i+1)}\cdot\left[1+\left(b\tan\left(\frac{a\pi}{2}\right)\right)^2\right]^{i/2} \times x^{-a\,i}\sin\left[i\left(\frac{a\pi}{2}+\arctan\left(b\tan\left(\frac{a\pi}{2}\right)\right)\right)\right]; \quad (3.6)$$

▲■

Algoritmas 7 Tankio funkcijos skaičiavimas kvadratūrų pagalba $pstable(x, par)$:

■*Tikslas*: Apskaičiuoti tankio funkcijos reikšmę taške x su parametrais par;

Įėjimo parametrai: x (realusis skaičius) duotasis taškas, par (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų vektorius, m (sveikasis skaičius) parametrų skaičius;

Išėjimo parametrai: $tank$ (realusis skaičius) tankio funkcijos reikšmė;

Naudojama atmintis: atmintis reikalinga Gauss'o kvadratūros abscisėms ir nuliams saugoti;

Laiko sąnaudos: nežinomos;

Aprašymas:

- centruojam ir normuojam x: $x3 = (x - par[2])/(par[3]\cdot si(par[0], par[1]))$;
- panaudodami 98 Gauss'o kvadratūrų abscises $xss[i]$ ir ordinates $wss[i]$ skaičiuojam integralą $tankis1$;

Algoritmas:

1. $x3 = (x - par[2])/(par[3]\cdot si(par[0], par[1]))$;
2. $c = -atan(par[1]\cdot\tan(pi\cdot par[0]/2))\cdot(x3/|x3|\cdot 2/(par[0]\cdot pi)$;
3. $d = 1$; $s1 = 0$;
4. FOR $i = 0$ TO 96 DO

   4.1. $y = ((c+d)/2) + (d-c)\cdot xss[i]/2$;
   4.2. $s1 = s1 + wss[i]\cdot u(y, -c, par[0])\cdot\exp(-(|x3|^{(par[0]/(par[0]-1))})\cdot u(y, -c, par[0]))$;

5. $tank = s1\cdot(par[3]\cdot si(par[0], par[1]))^{-1}\cdot par[1]\cdot|x3|^{1/(par[0]-1)}\cdot(d-c)/(4\cdot|1-par[0]|)$;
6. RETURN $tank$;

Comnent: ▲Naudotos funkcijos:

- $si(a, b)\{$
  - RETURN $((1+(b\tan(\pi a/2))^2)^{1/(2a)}$;}
- $u(y, cc, a)$ {
  - $u1 = \sin(a\cdot(y+cc)\cdot pi/2)$;
  - $u2 = \cos(y\cdot pi/2)$;
  - $u3 = \cos(((y\cdot(a-1)+a\cdot cc)\cdot pi/2))$;

– RETURN $(u3/u2)\cdot(u1/u2)^{(a/(1-a))}$;

}▲■

3.2.4. Parametrų vertinimo metodai

Šiame skyrelyje aptariami stabiliųjų dėsnių parametrų vertinimo metodai. Nors yra žinoma virš 20 parametrų vertinimo metodų darbe taikomi tik 3: didžiausio tikėtinumo, momentų ir regresijos metodai.

3.2.4.1. Didžiausio Tikėtinumo Metodas

1971 metais DuMouchel pirmasis gavo apytikslius parametrų α ir σ didžiausio tikėtinumo metodo įverčius, laikydamas, kad $\mu = 0$ [36]. Vėliau jis įrodė (su papildomomis prielaidomis α įverčiui ir tikėtinumo funkcijai), kad gautieji įverčiai yra suderinti ir asimptotiškai normalūs [37]. Tačiau parametrams įvertinti buvo įdėta pernelyg daug pastangų ir sugaišta labai daug kompiuterio skaičiavimo laiko.

Stabiliųjų modelių parametrams įvertinti taikytinas didžiausio tikėtinumo metodas (MTM):

$$\min_{\alpha,\beta,\mu,\sigma} \begin{array}{l} MTM(X,\alpha,\beta,\mu,\sigma) \\ 1 < \alpha \leqslant 2, \\ -1 \leqslant \beta \leqslant 1, \\ \mu \in \mathbf{R}, \\ \sigma > 0, \end{array} \tag{3.7}$$

čia X yra finansinių duomenų stebėjimų (grąžų) vektorius, o

$$\begin{aligned} MTM(X,\alpha,\beta,\mu,\sigma) &= -\sum_{i=1}^{n} \ln[p(X_i,\alpha,\beta,\mu,\sigma)] \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \ln\left[\sigma^{-1} p\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma},\alpha,\beta,0,1\right)\right] \end{aligned}$$

yra tikėtinumo funkcijos logaritmas ir $p(X_i,\alpha,\beta,\mu,\sigma)$ – stabilaus atsitiktinio dydžio tankio funkcija.

MTM realizavimo efektyvumas skaičiuojamuoju požiūriu labiausiai priklauso nuo tankio funkcijos, kuri bendru atveju nėra išreiškiama elementariomis funkcijomis, skaičiavimo būdo. Nors tankio funkcijos skleidiniai laipsninėmis eilutėmis yra gerai žinomi (žr. Zolotariov [156]), MTM jie nelabai tinka dėl būtinumo sumuoti labai didelį eilutės narių skaičių, įvertinti paklaidą „pasiskirstymo galuose" ir pan. MTM buvo realizuotas panaudojant tankiui skaičiuoti greitąją Furje transformaciją (angl. *Fast Furje Transformation*: FFT) bei asimptotines aproksimacijas pasiskirstymo galuose (Mittnik, Rachev ir Doganoglu [105]). Šiame darbe mes naudojome Zolotariovo integralinę (3.2) formulę.

Metodo sudėtingumas slypi jo netrivialioje netiesinėje optimizacijoje ieškant minimumo. Kaip parodė praktiniai tyrimai, tikslo funkcija dažnai yra daugiaekstremalinė ir vieno parametro pakeitimas gana stipriai įtakoja galutinį sprendinį. Pastebėta, kad tikslo funkcijos reikšmę, o tuo pačiu ir minimumo tašką, stipriai įtakoja parametrai α ir σ, kita vertus MTM(.) funkcija yra mažiau jautri parametrų β ir μ pokyčiams (žr. 3.2.4.4).

Algoritmas 8 Stabiliojo dėsnio parametrų vertinimas didžiausio tikėtinumo metodu

■ *Tikslas*: didžiausio tikėtinumo metodu įvertinti stabiliojo atsitiktinio dydžio X parametrus par;

Įėjimo parametrai: X (n matis realių skaičių masyvas) duomenų seka, n (sveikasis skaičius) sekos ilgis, m (sveikasis skaičius) vertinamų parametrų skaičius;

Išėjimo parametrai: stabiliojo dėsnio parametrų vektorius par (m matis realių skaičių masyvas);

Naudojama atmintis: atminties pagrinde reikia optimizavimo algoritmui;

Laiko sąnaudos: labai priklauso nuo sekos ilgio n ir optimizavimo (funkcijos $maksimizuoti(\ldots)$) efektyvumo;

Aprašymas:

- inicializuojamos pradinės parametrų reikšmės $par0$, jas galima parinkti bet kokias, bet norint greitesnio skaičiavimo galima sugeneruoti keletą parametrų rinkinių ir išrinkti tą kuris atitinka mažiausią tikslo funkcijos reikšmę;
- skaičiuojama pradinė tikslo funkcijos reikšmė $f_0 = mtm(X, n, par_0, m)$;
- sprendžiamas optimizavimo uždavinys, maksimizuojant Log-tikėtinumo funkciją mtm (parenkant atitinkamus par). Šis optimizavimo uždavinys yra sprendžiamas kintamos metrikos, nors tinka ir kiti metodai;
- jei pavyksta rasti geresnį sprendinį parfinal nei pradinis par_0 tai ši reikšmė ir grąžinama, priešingu atveju grąžinama pradinė reikšmė.

Algoritmas:

1. $epsilon = 10e - 7$; optimizavimo stabdymo sąlyga
2. $f_{final} = 10000$;
3. $par_0 = (1.5, 0, 0, 1)$; pradinės parametrų reikšmės gali būti parenkamos kitu būdu
4. $f_0 = mtm(X, n, par_0, m)$; skaičiuojam pradinę tikslo funkcijos reikšmę
5. $par_{final} = maksimizuoti(mtm, X, n, par_0, m, epsilon)$;
6. $f_{final} = mtm(X, n, par_{final}, m)$;
7. IF$(f_0 < f_{final})$
   7.1. $par = par_{final}$;
8. ELSE
   8.1. $par = par_0$;
9. RETURN par; /* algoritmo 1.2 pabaiga*/

■

Algoritmas 9 Tikėtinumo funkcijos skaičiavimas $mtm(X, n, par, m)$

■*Tikslas*: Apskaičiuoti log-tikėtinumo funkcijos reikšmę sekai X su parametrais par;

Įėjimo parametrai: X (n matis realių skaičių masyvas) duomenų seka, n (sveikasis skaičius) sekos ilgis, par (m matis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų vektorius, m (sveikasis skaičius) vetinamų parametrų skaičius;

Išėjimo parametrai: f (realusis skaičius) log-tikėtinumo funkcijos reikšmė;

Naudojama atmintis: atminties beveik nenaudoja;

Laiko sąnaudos: labai priklauso nuo sekos ilgio n ir tankio funkcijos ($tankis(\ldots)$) apskaičiavimo;

Aprašymas:

- apibrėžiamas tankio funkcijos perjungimo lygmuo $p1 = 0.001$;
- sudaromas pagalbinis (x-sų perjungimo taškų) vektorius xb (keturmatis realių skaičių masyvas). Čia xb_0 ir xb_1 (randami pagal formulę (3.8)) apibrėžia taškus kur perjungti į tankio funkcijos aproksimaciją, atitinkamai kai $1 \leqslant \beta < 1$ ir $x \to -\infty$ bei $1 < \beta \leqslant 1$ ir $x \to +\infty$, o xb_2 ir xb_3 nurodo kitus perjungimo atvejus ($x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$), kai skirtumas tarp aproksimuotos

tankio funkcijos ir apskaičiuotos kvadratūrų pagalba pasidaro mažesnis nei $p1$ (randami pagal algoritmą 10);

- skaičiuojama log-tikėtinumo funkcija $f = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \ln\left[tankis\left(X_i, par, m, xb\right)\right]$;

Algoritmas:

1. $p1 = 0.001$;
2. $xb[0] = xskai(par, -par[1], p1, -1)$;
3. $xb[1] = xskai(par, par[1], p1, 1)$;
4. $xb[2] = par[2]/par[3]$;
5. $xb[3] = -par[2]/par[3]$;
6. IF ($par[1] > 0.9999$)
    6.1. $xb[3] = xskaib(par, p1, \text{sign}(par[1]))$;
    6.2. $xb[2] = -xb[3]$;
7. IF ($par[1] < -0.9999$)
    7.1. $xb[2] = xskaib(par, p1, \text{sign}(par[1]))$;
    7.2. $xb[3] = -xb[2]$;
8. $f = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n} \ln\left[tankis\left(X_i, par, m, xb\right)\right]$
9. RETURN f;

■

Algoritmas 10 Perjungimo taškų apskaičiavimas $xskaib(par, p, z)$:

■*Tikslas*: Kirstinių metodu apskaičiuoti tankio funkcijos perjungimo taškus kai $\beta = 1$, $x \to -\infty$ ir $\beta = -1$, $x \to +\infty$;

Įėjimo parametrai: *par* (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrai, p realusis skaičius iš intervalo $(0, ..., 1)$ tankio funkcijos perjungimo lygmuo, $z = \pm 1$ (atitinka $\text{sign}(\beta)$);

Išėjimo parametrai: *xb* (realusis skaičius) perjungimo taškas;

Naudojama atmintis: atminties beveik nenaudoja;

Laiko sąnaudos: nežinomos;

Aprašymas:

Kirstinių metodu randamas taškas kuriame funkcija $xdidb(x, a, s) \approx p$:

1. parenkami du pradiniai taškai $x0$ ir $x1$ ir juose apskaičiuojamos funkcijos reikšmės $y0$ ir $y1$: $y = xdidb(x, a, s) - p$;
2. per šiuos du taškus ($x0$, $y0$) ir ($x1$, $y1$) brėžiama tiesė, kur tiesė kerta x ašį gaunamas pirmasis iteracinis priartėjimas $(z0, yz)$, čia $yz = xdidb(z0, a, s) - p$;
3. ieškomi nauji kirstinės taškai, vienas galas lieka tas pats (dažniausiai $x0$), o kitas parenkamas taip: jei $yz > 0$ tai $x0 = z0$, priešingu atveju $x1 = z0$;
4. perskaičiuojami kirstinė taškai ($x0$, $y0$) ir ($x1$, $y1$) ir brėžiama tiesė, kur tiesė kerta x ašį gaunamas antrasis iteracinis priartėjimas $(z1, yz)$, čia $yz = xdidb(z1, a, s) - p$;

Algoritmas

1. $a = par[0]$; $b = par[1]$; $m = par[2]$; $s = par[3]$;
2. $x0 = (m + bs^a \tan(\pi a/2))$;———————— parenkamas pradinis iteracijų taškas – taško kur tankis yra maksimalus

3. $x1 = x0 - z/s$;———————— parenkamas šiek tiek didesnis taškas (tolimesnis nuo maksimumo)
4. $y0 = xdidb((x0-m)/s, a, s)-p$;———— taške $x0$ skaičiuojama funkcija, kuria bus aproksimuojamas tankis formulė (3.5)
5. $y1 = xdidb((x1-m)/s, a, s)-p$;———— taške $x1$ skaičiuojama funkcija, kuria bus aproksimuojamas tankis
6. $z0 = x0 - y0 \cdot (x1-x0)/(y1-y0)$;———— per taškus ($x0$,$y0$) ir ($x1$, $y1$) brėžiama tiesė, taškas $z0$ yra ten kur ši tiesė kerta x ašį.
7. $yz = xdidb((z0-m)/s, a, s)-p$;———— taške $z0$ skaičiuojama funkcija, kuria bus aproksimuojamas tankis
8. IF $(yz > 0)$ THEN ———————— ieškomi nauji kirstinės taškai, vienas galas lieka tas pats, o kitas parenkamas
   8.1. $x0 = z0$;
9. ELSE
   9.1. $x1 = z0$;
10. $y0 = xdidb((x0 - m)/s, a, s) - p$;———— naujame taške $x0$ skaičiuojama funkcija, kuria bus aproksimuojamas tankis
11. $y1 = xdidb((x1 - m)/s, a, s) - p$;———— naujame taške $x1$ skaičiuojama funkcija, kuria bus aproksimuojamas tankis
12. $z1 = x0 - y0 \cdot (x1-x0)/(y1-y0)$;———— per taškus ($x0$,$y0$) ir ($x1$, $y1$) brėžiama tiesė, taškas $z1$ yra ten kur ši nauja tiesė kerta x ašį.
13. WHILE $((|z0 - z1| > 0.0001)$ AND $(i < 1000))$ DO ———kai atstumas tarp dviejų x ašies taškų kur tiesės ją kerta pasidaro mažesnis nei 0.0001 iteracijos nutraukiamos ir nauji taškai neieškomi
    13.1. $yz = xdidb((z1 - m)/s, a, s) - p$;———— naujame taške $z1$ skaičiuojama funkcija, kuria bus aproksimuojamas tankis
    13.2. IF $(yz > 0)$ THEN
        13.2.1. $x0 = z1$;
    13.3. ELSE
        13.3.1. $x1 = z1$;
    13.4. $i = i + 1$;———————————— ciklo kintamasis
    13.5. $y0 = xdidb((x0 - m)/s, a, s) - p$;
    13.6. $y1 = xdidb((x1 - m)/s, a, s) - p$;
    13.7. $z0 = z1$;———————————— naujas taškas tampa senu
    13.8. $z1 = x0 - y0 \cdot (x1 - x0)/(y1 - y0)$;———— randamas naujas taškas
14. RETURN $(z1 - m)/s$;———————— grąžinamas taškas kuriame $xdidb((xb - m)/s, a, s) = p$

▲

$$xskai(\alpha, \beta, p, z) = z \max\left(\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi p}\sqrt{1+\left(\beta\tan\left(\frac{\pi\,\alpha}{2}\right)\right)^2}\sin\left[\frac{\pi\,\alpha}{2}+\arctan\left(\beta\tan\left(\frac{\pi\,\alpha}{2}\right)\right)\right]\right|^{\frac{1}{\alpha+1}}, 5\right) \tag{3.8}$$

▲■

3.2.4.2. Robastiniai metodai

Iš robastinių arba empirinių kvantilių metodų grupės stabiliųjų dėsnių parametrams įvertinti galima taikyti McCulloch‘o metodą, leidžiantį gauti visų parametrų suderintuosius įverčius.

Tegul x_p – p-tasis kvantilis ir $\hat{x}_p$– atitinkamas empirinis kvantilis, t.y. $\hat{x}_p$ tenkina lygtį $F_n(\hat{x}_p) = p$. Tam, kad išvengtų nuokrypių baigtinėse imtyse, McCulloch‘as pasiūlė pataisą: jei x_i surikiuoti didėjimo tvarka, korekcija gali būti padaryta pakeičiant $\hat{x}_i$ į $\hat{x}_{q(i)}$, kur

$$q(i) = \frac{2i-1}{2n}$$

ir tiesiškai interpoliuojant pagal p tarp dviejų gretimų $q(i)$ reikšmių. Tada $\hat{x}_p$ yra suderintasis x_p, p-tojo kvantilio įvertis.

Fama–Roll metodas Fama ir Roll [45, 46] pasiūlė simetrinių ($\beta = 0$ ir $\mu = 0$) stabiliųjų dėsnių parametrų įverčius kai $1 < \alpha \leqslant 2$. Jie pasiūlė σ įvertį

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0.72} - \hat{x}_{0.28}}{1.654}.$$

Stabilumo indeksas α gali būti įvertintas pagal skirstinio uodegos elgesį. Fama ir Roll pasiūlė α įvertį tenkinantį sąlygą:

$$S_{\hat{\alpha}}\left(\frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{1-p}}{2\hat{\sigma}}\right) = p.$$

Jie nustatė, kad geriausiai α įverčiui gauti tinka $p = 0.95, 0.96$ ir 0.97.

McCulloch metodas Pagal McCulloch‘ą [103] pažymėkime

$$\nu_\alpha = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}},$$

nepriklausantį nuo σ ir μ. Tuomet jį atitinkančią empirinę reikšmę pažymėkime $\hat{\nu}_\alpha$. Tai yra suderintasis ν_α įvertis. Apibrėžkime dydį

$$\nu_\beta = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}},$$

nepriklausantį nuo σ bei μ, ir jį atitinkantį $\hat{\nu}_\beta$ – suderintąjį empirinį įvertį. ν_α ir ν_β yra funkcijos priklausančios nuo α ir β. Šis sąryšis gali būti apverstas ir parametrai α ir β gali būti nagrinėjami, kaip funkcijos nuo ν_α ir ν_β.

$$\alpha = \psi_1(\nu_\alpha, \nu_\beta), \quad \beta = \psi_1(\nu_\alpha, \nu_\beta).$$

Pakeitę ν_α ir ν_β jų empiriniais analogais, gauname ir įverčius. ψ_1 ir ψ_2 funkcijos yra tabuliuotos (McCulloch [103]). Parametrų ir įverčius randame tiesinės interpoliacijos būdu.

Apibrėžkime funkciją

$$\nu_\sigma = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\sigma},$$

kuri priklauso tik nuo α ir β. Pažymėkime ją $\nu_\sigma = \psi_3(\alpha, \beta)$. Tuomet

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\psi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

bus parametro σ suderintasis įvertis.

Poslinkio parametrą μ tikslinga vertinti atsižvelgiant į imties medianą, per standartizuotą sklaidą $(\mu - x_{0.5})/\sigma$, kuri yra α ir β funkcija, nepriklausanti nuo σ ir μ, nes jei $X \sim S\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, tai $(X - \mu)/\sigma \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$. McCulloch [103] siūlo (pagal Zolotariovą [155]) atsisakyti šios f-jos trūkio taške $\alpha = 1$, pakeičiant jos apibrėžimą tokiu būdu

$$\psi_4(\alpha, \beta) = \frac{(\mu - x_{0.5})}{\sigma} + \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

su

$$\psi_4(1, \beta) = \frac{(\mu - x_{0.5})}{\sigma} = \lim_{\alpha \to 1} \psi_4(\alpha, \beta).$$

Iš įverčio $\hat{\psi}_4 = \psi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ išvedame μ įvertį

$$\hat{\mu} = \hat{x}_{0.5} + \hat{\sigma}\left[\hat{\psi}_4 - \hat{\beta}\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right].$$

3.2.4.3. Empirinės charakteringosios funkcijos metodai

Iš empirinės charakteringosios funkcijos metodų grupės, galima išskirti du metodus, kurie leidžia gauti visų parametrų suderintuosius įverčius. Pirmasis – momentų metodas, antrasis – antrojo vidurkio minimalaus atstumo metodas (angl. Minimum rth mean distance method), šie abu metodai buvo pasiūlyti Press'o [117].

Momentų metodas Apibrėžkime empirinę charakteringąją funkciją. Tegul $x_1, \ldots, x_n$ nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių imtis, tuomet jos empirinė charakteringoji funkcija yra

$$\hat{\phi}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{\mathrm{i}tx_j},$$

čia n imties dydis, $\hat{\phi}(t)$ yra charakteringosios funkcijos suderintasis įvertis.

Iš stabilaus atsitiktinio dydžio charakteringosios funkcijos apibrėžimo išplaukia, kad visiems α galioja

$$-\ln|\phi(t)| = \sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}.$$

Laikysime, kad $\alpha \neq 1$. Parinkime dvi nenulines t reikšmes $t_1 \neq t_2$. Tuomet

$$-\ln|\phi(t_k)| = \sigma^{\alpha}|t_k|^{\alpha}, k = 1, 2.$$

Išreiškiant iš šių dviejų lygčių α ir σ, bei pakeičiant charakteringąją funkciją empirine, gauname

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln\dfrac{\ln\left|\hat{\phi}(t_1)\right|}{\ln\left|\hat{\phi}(t_2)\right|}}{\ln\left|\dfrac{t_1}{t_2}\right|},$$

ir

$$\ln\hat{\sigma} = \frac{\ln|t_1|\ln\left(-\ln\left|\hat{\phi}(t_2)\right|\right) - \ln|t_2|\ln\left(-\ln\left|\hat{\phi}(t_1)\right|\right)}{\ln\left|\dfrac{t_1}{t_2}\right|}.$$

Norint įvertinti parametrus β ir μ reikia įvesti funkciją

$$u(t) = \mathrm{Im}\left(\ln\phi(t)\right).$$

Tuomet iš charakteringosios funkcijos apibrėžimo turime

$$u(t) = \mu t + \sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}\beta\,\mathrm{sign}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Parinkime dvi nenulines t reikšmes $t_3 \neq t_4$. Tuomet

$$\frac{u(t_k)}{t_k} = \mu + \beta\left(\sigma^{\alpha}|t_k|^{\alpha-1}\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right),$$

čia $k = 3, 4$.

Atlikę pertvarkymus, gauname parametrų β ir μ įverčius

$$\hat{\beta} = \frac{\dfrac{\bar{u}(t_4)}{t_4} - \dfrac{\bar{u}(t_3)}{t_3}}{\left(|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}\right)\hat{\sigma}^{\hat{\alpha}}\tan\left(\dfrac{\pi\hat{\alpha}}{2}\right)}$$

ir

$$\hat{\mu} = \frac{|t_4|^{\hat{\alpha}-1}\dfrac{\bar{u}(t_4)}{t_4} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}\dfrac{\bar{u}(t_3)}{t_3}}{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}},$$

čia

$$\bar{u}(t) = \arctan\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\sin(tx_i)}{\sum_{j=1}^{n}\cos(tx_i)}\right).$$

Parenkame $t_1 = 0.2$, $t_2 = 0.8$, $t_3 = 0.1$ ir $t_4 = 0.4$ (pagal Koutrouvelis [81] pasiūlymą).

Algoritmas 11 Parametrų vertinimas momentų metodu

$moment(X, n, m, vidurkis, dispersija)$

■*Tikslas*: Įvertinti sekos X stabilumo parametrus par momentų metodu;

Įėjimo parametrai: X (n matis realių skaičių masyvas) grąžų seka, n (sveikasis skaičius) sekos ilgis, m (sveikasis skaičius) parametrų skaičius, $vidurkis$ (realusis skaičius), $dispersija$ (teigiamas realusis skaičius);

Išėjimo parametrai: par (m matis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų vektorius;

Naudojama atmintis: naudoja mažai;

Laiko sąnaudos: nedidelės;

Aprašymas:

- Parenkam charakteringosios funkcijos taškus $t1 = 0.2$, $t2 = 0.8$,$t3 = 0.1$, $t4 = 0.4$ (pagal Koutrouvel'į);
- Skaičiuojam α įvertį;
- Skaičiuojam σ įvertį;
- Skaičiuojam β įvertį;
- Skaičiuojam μ įvertį;

Algoritmas:

1. $t1 = 0.2$, $t2 = 0.8$, $t3 = 0.1$, $t4 = 0.4$; /*Parenkam (pagal Koutrouvel'į) charakteringosios funkcijos taškus*/
2. $alfa = \ln(\ln(empchar(t1, X, n))/\ln(empchar(t2, X, n)))/\ln(|t1/t2|)$; /*Skaičiuojam alfa*/
3. /*Skaičiuojam sigma įvertį */
   3.1. $temp = \ln(t1)\cdot\ln(-\ln(empchar(t2, X, n))) - \ln(t2)\cdot\ln(-\ln(empchar(t1, X, n)))$;
   3.2. $sigma = \exp(temp/\ln(t1/t2))$;
4. $beta = (Ut(t4, X, n)/t4 - Ut(t3, X, n)/t3)/(t4^{alfa-1} - t3^{alfa-1})\cdot sigma^{alfa}\cdot(\tan(pi\cdot alfa/2)))$; /*Skaičiuojam beta įvertį*/
5. /*Skaičiuojam miu įvertį:*/
   5.1. $mu1 = t4^{alfa-1}\cdot Ut(t3, X, n)/t3 - t3^{(alfa-1)}\cdot Ut(t4, X, n)/t4$;
   5.2. $mu = mu1/(t4^{(alfa-1)} - t3^{(alfa-1)})$;
6. $par[0] = alfa$; $par[1] = beta$; $par[2] = mu$; $par[3] = sigma$;
7. RETURN par;
8. *Comment* ▲Naudotos papildomos funkcijos:

- $empchar(t, x, n) = \frac{1}{n}\sqrt{(sinsum(t, x, n))^2 + (cossum(t, x, n))^2}$;
- $sinsum(t, x, n) = \sum_{i=0}^{n} \sin(t \cdot x[i])$;
- $cossum(t, x, n) = \sum_{i=0}^{n} \cos(t \cdot x[i])$;
- $Ut(t, x, n) = \arctan\left(\frac{sinsum(t,x,n)}{cossum(t,x,n)}\right)$;▲■

2-ojo vidurkio minimalaus atstumo metodas (MAM) Apibrėžkime funkciją

$$h(\alpha, \beta, \mu, \sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\phi(t) - \hat{\phi}(t)\right|^2 e^{-t^2}\, \mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

su parametrais $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$ ir $\hat{\sigma}$ minimizuojančiais funkciją h, kurie yra parametrų α, β, μ ir σ suderintieji įverčiai. Funkcijos (3.9) minimizavimas gali būti atliktas taikant dvidešimties mazgų Hermito kvadratūrinę formulę. Tai yra, jei pažymėsime $\left|\phi(t) - \hat{\phi}(t)\right|^2 = \lambda(t)$, tai

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(t)e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{20} w_k \lambda(u_k),$$

kur w_k ir u_k yra Hermito formulės svoriai ir mazgai (Hermito polinomų nuliai).

Regresijos metodas Šį metodą pasiūlė Koutrouvelis [81, 82]. Siūlomasis įvertis yra pagrįstas tokiomis charakteristinės funkcijos savybėmis:

1. iš charakteringosios f-jos apibrėžimo galime nesunkiai gauti
$$\ln\left(-\ln|\phi(t)|^2\right) = \ln(2\sigma^2) + \alpha \ln|t| \tag{3.10}$$
2. kai $\alpha \neq 1$, tai
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\phi(t) &= \exp\left(-|\sigma t|^\alpha\right)\cos\left[\mu t + \sigma^\alpha |t|^\alpha \beta\, \mathrm{sign}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right], \\ \operatorname{Im}\phi(t) &= \exp\left(-|\sigma t|^\alpha\right)\sin\left[\mu t + \sigma^\alpha |t|^\alpha \beta\, \mathrm{sign}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right], \end{aligned}$$
iš šių formulių gauname
$$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\phi(t)}{\operatorname{Re}\phi(t)}\right) = \mu t + \sigma^\alpha |t|^\alpha \beta\, \mathrm{sign}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \tag{3.11}$$
(3.10) priklauso tik nuo α ir σ, o tai reiškia, kad galime įvertinti šiuos parametrus pagal regresinį modelį
$$y_k = m + \alpha w_k + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \ldots, K$$
kur $y_k = \ln\left(-\ln|\phi_n(t_k)|^2\right)$, $m = \ln(2\sigma^\alpha)$ ir $w_k = \ln|t_k|$, $t_k = \frac{\pi k}{25}$, o ε_k – paklaida. Skaičių K Koutrouvelis [81] rekomenduoja parinkti tarp 9 ir 134, priklausomai nuo imties tūrio, bei α.

Tokiu būdu rastus α ir σ įverčius galime panaudoti kitų dviejų likusių parametrų vertinimui pagal (3.11).

Tegul

$$g_n(u) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}\phi_n(t)}{\operatorname{Re}\phi_n(t)}\right),$$

čia Arctan(.) žymi funkcijos arctan(.) pagrindinę reikšmę. Galime įvertinti β ir μ iš regresinio modelio

$$z_l = \mu u_l + \beta\, |\sigma u_l|^\alpha \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \mathrm{sign}(u_l) + \eta_l, \qquad l = 1, 2, \ldots, L,$$

arba

$$z_l = \mu u_i + \beta q_l + \eta_l, \quad q_l = |\sigma u_l|^\alpha \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \mathrm{sign}(u_l),$$

kur $z_l = g_n(u_l) + \pi k_n(u_l)$, $u_l = \frac{\pi l}{50}$,L (pagal Koutrouvelis [81]), yra tarp 9 ir 70, priklausomai nuo imties tūrio ir α, η_l – paklaida, sveikasis skaičius $k_n(u)$ yra skirtas įvertinti nepagrindines arctan(.) šakas.

Skaičiavimus atliekant universalia programavimo kalba tikslinga pasinaudoti sekančiu algoritmu [11]:

(1) Norėdami įvertinti α ir σ parametrus skaičiuojame tokias sumas:

$$s_1 = \sum_{k=1}^{K} y_k w_k, \quad s_2 = \sum_{k=1}^{K} y_k, \quad s_3 = \sum_{k=1}^{K} w_k, \quad s_3 = \sum_{k=1}^{K} w_k^2,$$

tuomet

$$\alpha = \frac{Ks_1 - s_2 s_3}{Ks_4 - s_3^2}, \qquad \sigma = \tilde{\sigma}\left(0.5 \exp\left\{\frac{s_4 s_2 - s_1 s_3}{Ks_4 - s_3^2}\right\}\right)^{1/\alpha},$$

čia $K = 10$, $\tilde{\sigma}$ – absoliutinis nuokrypis.

(2) Prieš pradedant vertinti β ir μ parametrus reikia atlikti empirinių duomenų X centravimą ir normavimą su $\tilde{\mu}$ ir $\tilde{\sigma}$ ($\tilde{\mu}$ – empirinis vidurkis (jei egzistuoja)), bei atlikti tokį poslinkį h, kad

$$\sum_{l=1}^{L} \text{sign}(\text{Re}\left[\hat{\phi}(u_l, X + h\pi)\right]) = L,$$

t.y. empirinė charakteringoji funkcija su visais u_l turi būti teigiama.

(3) Atlikus poslinkius skaičiuojame štai tokias sumas:

$$s_5 = \sum_{l=1}^{L} u_l^2, \quad s_6 = \sum_{l=1}^{L} q_l g_n(u_l), \quad s_7 = \sum_{l=1}^{L} q_l u_l, \quad s_8 = \sum_{l=1}^{L} q_l^2, \quad s_9 = \sum_{l=1}^{L} u_l g_n(u_l),$$

tuomet

$$\beta = \frac{s_5 s_6 - s_7 s_9}{s_5 s_8 - s_7^2}, \qquad \mu = \tilde{\mu} + \sigma\left(\frac{s_9 s_8 - s_7 s_6}{s_5 s_8 - s_7^2} - h\pi\right),$$

čia $L = 15$.

Algoritmas 12 Postūmio duomenų sekoje atlikimas $pataisa(X, LLL, n)$

■*Tikslas*: Rasti tokį duomenų sekos X postūmį $h \cdot \pi$, kad realioji charakteringosios funkcijos dalis taškuose $t = 0...15\pi/50$ būtų tik teigiama;

Įėjimo parametrai: X (n matis realių skaičių masyvas) grąžų seka, n (sveikasis skaičius) sekos ilgis, LLL (sveikasis skaičius) taškų kuriose skaičiuojama charakteringoji funkcija skaičius;

Išėjimo parametrai: h (sveikasis skaičius) postūmio žingsnis;

Naudojama atmintis: papildomos nenaudoja;

Laiko sąnaudos: nedidelės;

Aprašymas:

- Kol charakteringoji funkcija netampa teigiama visuose taškuose $t = 0...15\pi/50$, didindami h duomenyse atlikinėjam postūmį $h \cdot pi$: $Y = X + h \cdot pi$;
- gražiname h reikšmę.

Algoritmas:

- 0.1. $Y = X$
  0.2. WHILE($summ(Y, LLL, n) < LLL$) DO
  - 0.2.1. $h++$
    0.2.2. FOR $j = 0$ TO $n - 1$ DO
    - 0.2.2.1. $Y[j] = X[j] + h \cdot pi$
      0.2.2.2. $j = j + 1$

  0.3. RETURN h

▲Naudota papildoma funkcija:

$summ(x, LLL, n) = \left|\sum_{i=0}^{LLL} \operatorname{sign}\left(\frac{cossum(pi\cdot(i+1)/50,x,n)}{n}\right)\right|$;▲■

Algoritmas 13 Stabilaus dėsnio parametrų vertinimas regresijos metodu $regress(X, n, m, vidurkis, dispersija)$

■*Tikslas*: Įvertinti sekos X stabilumo parametrus par regresijos metodu;

Įėjimo parametrai: X (n matis realių skaičių masyvas) grąžų seka, n (sveikasis skaičius) sekos ilgis, m (sveikasis skaičius) parametrų skaičius, $vidurkis$ (realusis skaičius), $dispersija$ (teigiamas realusis skaičius);

Išėjimo parametrai: par (m matis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų vektorius;

Naudojama atmintis: naudoja mažai;

Laiko sąnaudos: nedidelės;

Aprašymas:

- Parenkam konstantas $kk1 = 10$ ir $LLL = 15$;
- Skaičiuojam tarpines sumas $s1$, $s2$, $s3$, $s4$ ir parametrą $alfa$;
- Skaičiuojam $sigma$ įvertį;
- pradinę duomenų seką centruojam (pagal vidurkį) ir normuojam (su parametru $sigma$);
- skaičiuojam kokia reikalinga pataisa h ir atliekam postūmį sekoje X;
- Skaičiuojam tarpines sumas $s5$, $s6$, $s7$, $s8$, $s9$ ir parametrą $beta$;
- Skaičiuojam miu įvertį;

Algoritmas:

1. $kk1 = 10$, $LLL = 15$;
2. /*Skaičiuojam tarpines sumas $s1$, $s2$, $s3$, $s4$ ir parametrą alfa:*/
   - 2.1. $s1 = sumyw(kk1, X, n)$;
   - 2.2. $s2 = sumy(kk1, X, n)$;
   - 2.3. $s3 = sumw(kk1, X, n)$;
   - 2.4. $s4 = sumw2(kk1, X, n)$;
   - 2.5. $alfa = (kk1 \cdot s1 - s2 \cdot s3)/(kk1 \cdot s4 - s3 \cdot s3)$;
3. /*Skaičiuojam sigma:*/
   - 3.1. $mm = (s4 \cdot s2 - s1 \cdot s3)/(kk1 \cdot s4 - s3 \cdot s3)$;
   - 3.2. $sigma = dispersija \cdot |0.5 \cdot \exp(mm)|^{(1/alfa)}$;
4. /*centruojam (pagal vidurkį) ir normuojam (su parametru sigma) pradinę seką:*/
   - 4.1. FOR $i = 0$ TO $n - 1$ DO
     - 4.1.1. $X[i] = (X[i] - vidurkis)/sigma$;
5. $h = pataisa(X, LLL, n)$;
6. IF ($h > 0$) THEN
   - 6.1. FOR $j = 0$ TO $n1 - 1$ DO
     - 6.1.1. $X[j] = X[j] + h \cdot pi$;
     - 6.1.2. $j = j + 1$;
7. /*Skaičiuojam tarpines sumas $s5$, $s6$, $s7$, $s8$, $s9$ ir parametrą $beta$:*/

7.1. $s5 = sumu2(LLL)$;
7.2. $s6 = sumzv(alfa, sigma, LLL, X, n)$;
7.3. $s7 = sumuv(alfa, sigma, LLL)$;
7.4. $s8 = sumv2(alfa, sigma, LLL)$;
7.5. $s9 = sumzu(alfa, sigma, LLL, X, n)$;
7.6. $beta = (s5 \cdot s6 - s9 \cdot s7)/(s5 \cdot s8 - (s7 \cdot s7))$;

8. /*skaičiuojam miu:*/

8.1. $mu1 = (s9 \cdot s8 - s7 \cdot s6)/(s5 \cdot s8 - (s7 \cdot s7))$;
8.2. $miu = vidurkis + sigma \cdot (mu1 - h \cdot pi)$;

9. $par[0] = alfa$, $par[1] = beta$, $par[2] = miu$, $par[3] = sigma$;
10. RETURN par;

▲Pagalbinės funkcijos:

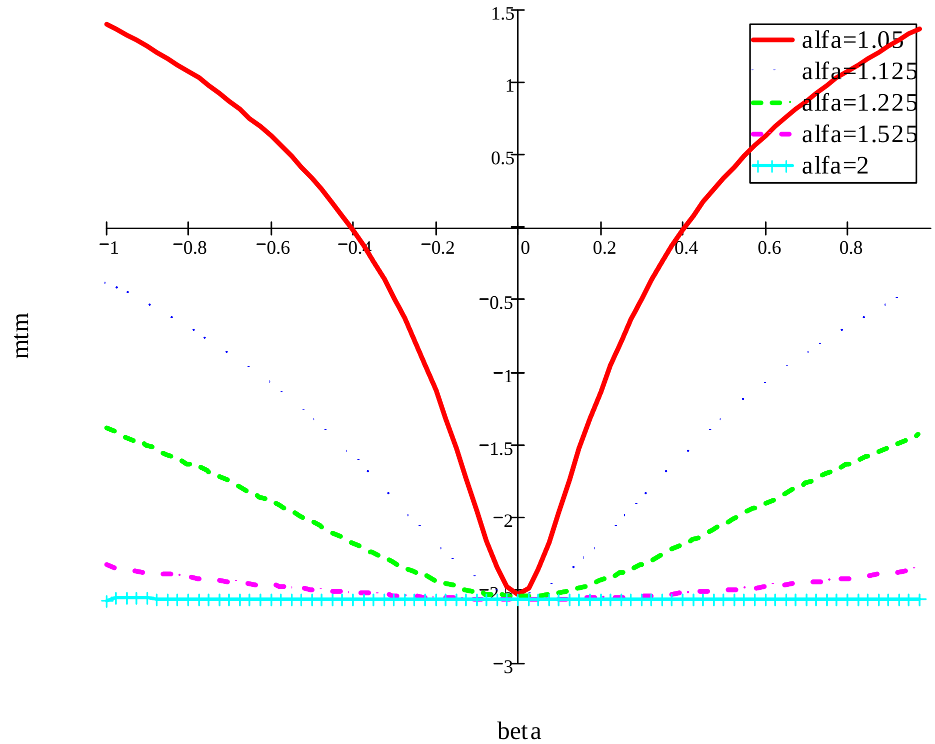
- $empchar(t, x, n) = \frac{1}{n}\sqrt{(sinsum(t, x, n))^2 + (cossum(t, x, n))^2}$;
- $sinsum(t, x, n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sin(t \cdot x[i])$;
- $cossum(t, x, n) = \sum_{i=0}^{n-1} \cos(t \cdot x[i])$;
- $sumyw(kk1, x, n) = \sum_{i=1}^{kk1} [\ln(-\ln(empchar(pi \cdot i/25, x, n)^2)) \cdot \ln(|pi \cdot i/25|)]$;
- $sumy(kk1, x, n) = \sum_{i=1}^{kk1} \ln(-\ln(empchar(pi \cdot i/25, x, n)^2))$;
- $sumw(kk1, n) = \sum_{i=1}^{kk1} \ln(|pi \cdot i/25|)$;
- $sumw2(kk1, n) = \sum_{i=1}^{kk1} [\ln(|pi \cdot i/25|)]^2$;
- $sumu2(LLL) = \sum_{i=1}^{LLL} (pi \cdot i/50)^2$;
- $sumv2(alfa, sigma, LLL) = \sum_{i=1}^{LLL} \left(sigma^{alfa} \cdot \tan(pi \cdot alfa/2) \cdot |pi \cdot i/50|^{allfa}\right)^2$;
- $sumuv(alfa, sigma, LLL) = \sum_{i=1}^{LLL} \left(sigma^{alfa} \cdot \tan(pi \cdot alfa/2) \cdot |pi \cdot i/50|^{allfa+1}\right)$;
- $sumzv(alfa, sigma, LLL, x, n) = \sum_{i=1}^{LLL} sigma^{alfa} \cdot \tan(pi \cdot alfa/2) \cdot |pi \cdot i/50|^{allfa} \times \arctan\left(\frac{sinsum(pi \cdot i/50, x, n)}{cossum(pi \cdot i/50, x, n)}\right)$;
- $sumzu(alfa, sigma, LLL, x, n) = \sum_{i=1}^{LLL} pi \cdot i/50 \cdot \arctan\left(\frac{sinsum(pi \cdot i/50, x, n)}{cossum(pi \cdot i/50, x, n)}\right)$; ▲■

3.2.4.4. Parametrų vertinimas

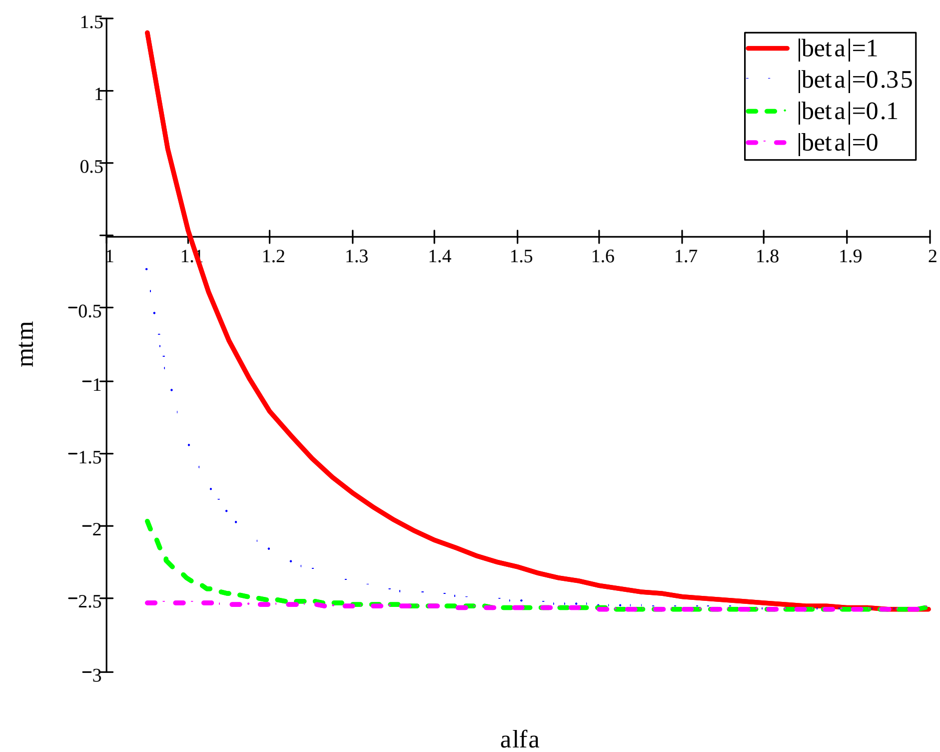
Stabiliojo dėsnio parametrų vertinimo metodai yra aprašyti 3.2.4 skyrelyje. Šiame skyrelyje pateikiami praktiniai didžiausio tikėtinumo metodo taikymo pavyzdžiai. Bandymai buvo atliekami su TEO (buvo „Lietuvos telekomas") akcijų grąžų seka. Log-tikėtinumo (MTM) funkcijos priklausomybė nuo stabiliojo dėsnio parametrų pateikta paveiksluose 3.9–3.15.

Paveiksle 3.9 pateikta log-tikėtinumo funkcijos priklausomybė nuo parametro β, kai parametras α yra skirtingas (1.05, 1.125, 1.225, 1.525 ir 2). Galima pastebėti, kad tikėtinumo funkcija yra beveik simetriška parametro β atžvilgiu, išskyrus atvejį, kai $\alpha \to 2$ ir $\beta \to -1$, ir įgyja minimumą kai $\beta \approx 0$. Kita vertus, kai $\alpha \approx 2$ iš tankio funkcijos išraiškos (3.3) išplaukia, kad MTM funkcija beveik nebepriklauso nuo parametro β, tačiau praktikoje kai $\beta \approx -1$ ši teorinė taisyklė negalioja ir gaunamas MTM funkcijos išlinkimas.

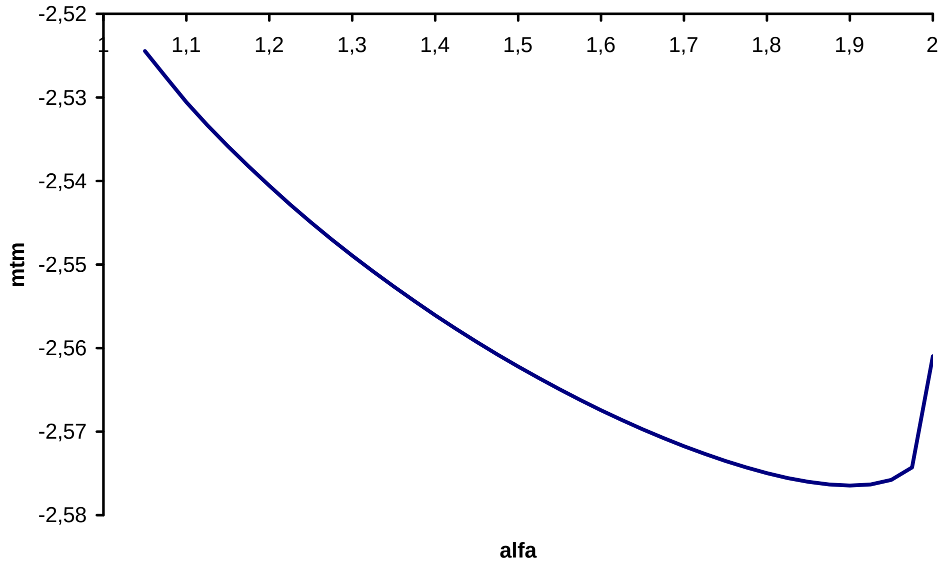
Log-tikėtinumo funkcijos priklausomybė nuo parametro α (pav. 3.10), kai parametras $|\beta| \approx 1$ panaši į hiperbolę, tačiau kai $|\beta| \to 0$ MTM funkcija yra išgaubta ir minimumą įgyja taške $\alpha = 1,85$ (žr. pav. 3.11). Akivaizdu, kad taškas $\alpha = 2$ yra ypatingas, todėl šis atvejis visada yra tiriamas atskirai, tai yra nagrinėjamas atskiras α-stabiliųjų dėsnių atvejis – normalusis Gauss'o dėsnis ($\alpha = 2$). Kadangi Gauss'o dėsnis yra simetriškas, tai laikoma, kad $\beta = 0$.



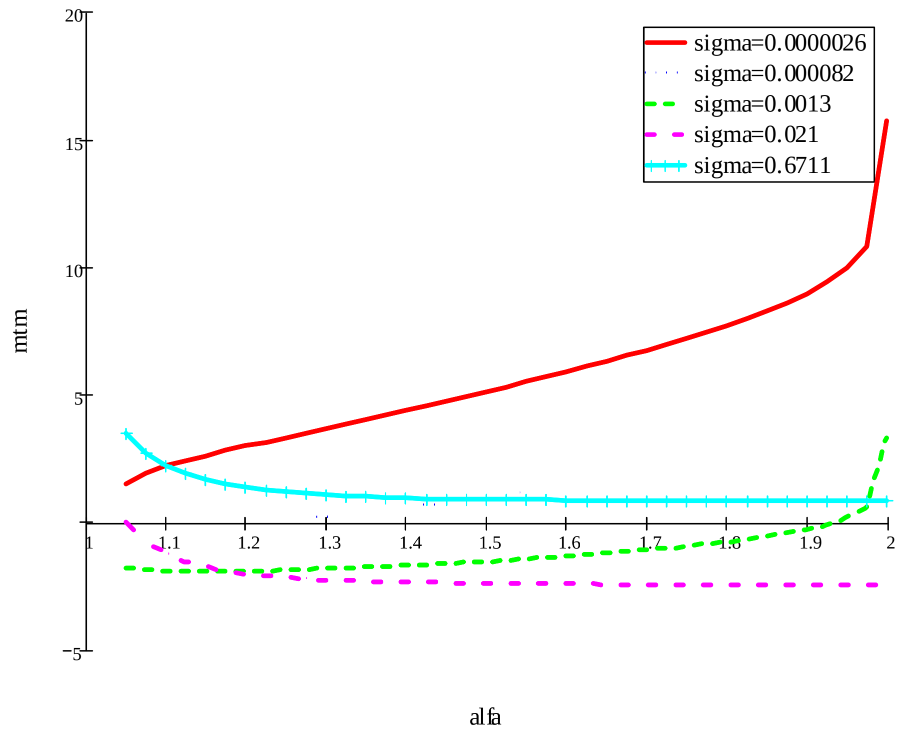
Paveikslas 3.9: MTM priklausomybė nuo parametro β, kai $\alpha = 1.05$, 1.125, 1.225, 1.525 ir 2.



Paveikslas 3.10: MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro α, kai $|\beta| = 1$, 0.35, 0.1 ir 0.



Paveikslas 3.11: MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro α, kai $\beta = 0$.

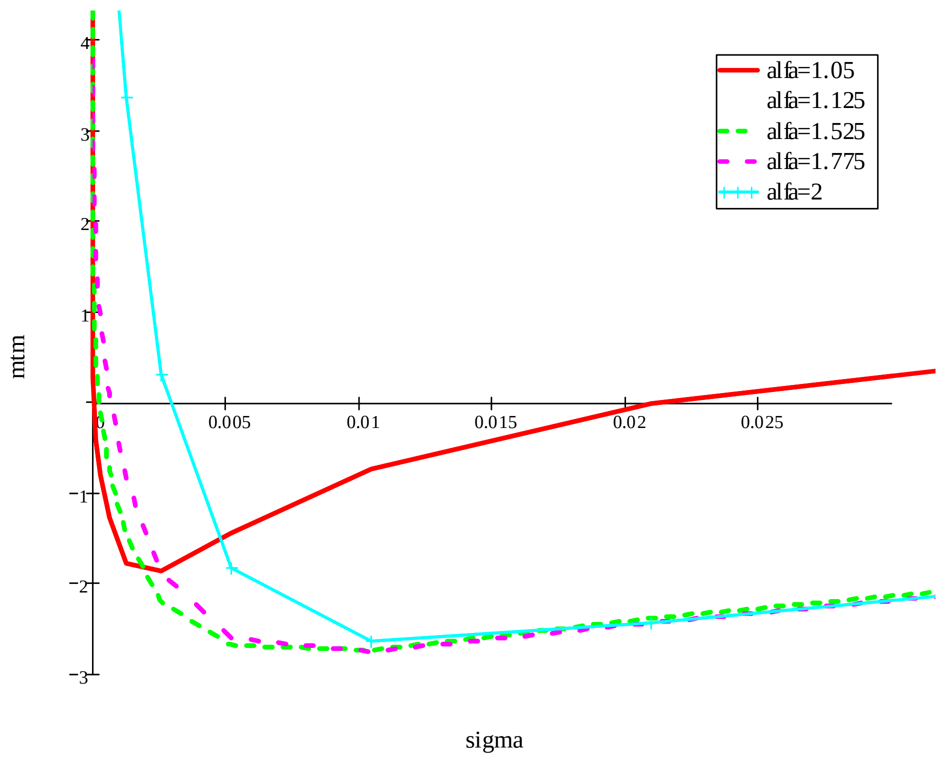


Paveikslas 3.12: MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro α, kai keičiamas parametras σ (0.0000026, 0.000082, 0.0013, 0.021 ir 0.6711), $\beta = 0,35$.

Paveiksle 3.12 pateikta MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro α, kai keičiamas parametras σ (0.0000026, 0.000082, 0.0013, 0.021 ir 0.6711), šiuo atveju parametras β laikomas pastoviu ir yra lygus 0,35. Įdomu tai, kad esant labai mažoms σ reikšmėms ($\sigma \sim 10^{-5}$) log-tikėtinumo funkcija minumumą įgyja, kai $\alpha \approx 1$, o kai σ didėja ($\sigma \geqslant 10^{-2}$) minimumas pasiekiamas, kai $\alpha \approx 2$.

Paveiksle 3.13 pateikta MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro σ, kai parametras α yra skirtingas (1.05, 1.125, 1.225, 1.525 ir 2). Akivaizdu, kad šiuo atveju minimumas tikrai egzistuoja ir yra nesunkiai randamas gradientiniais metodais. Minimali MTM funkcijos reikšmė gaunama, kai $\alpha \approx 1,8$, o $\sigma \approx 7 \cdot 10^{-3}$.

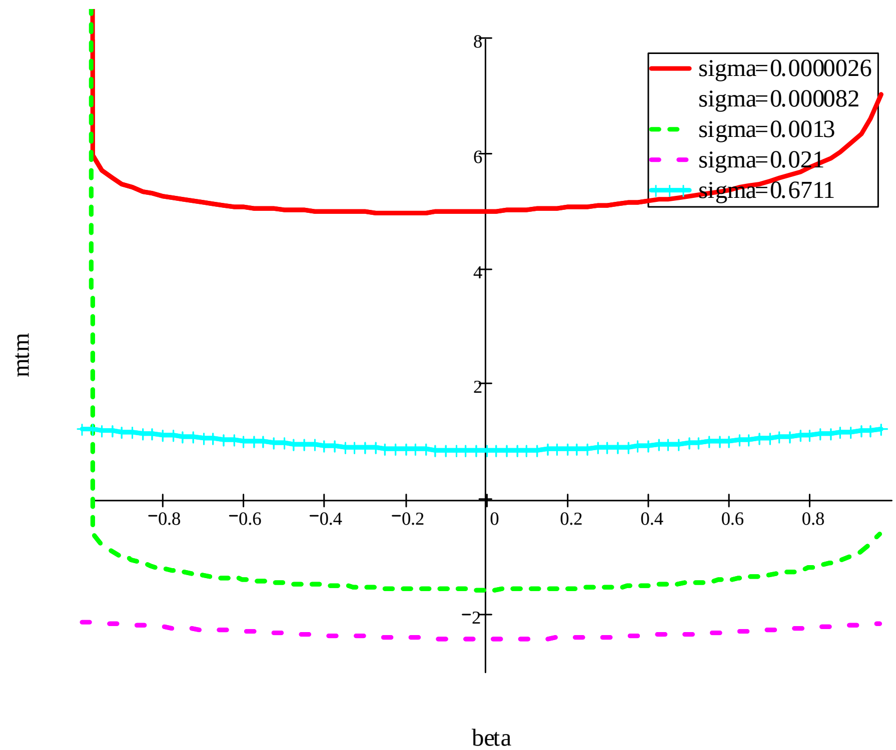
Paveiksle 3.14 pateikta MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro β, kai keičiamas parametras σ (0.0000026, 0.000082, 0.0013, 0.021 ir 0.6711), parametras $\alpha = 1,5$. Nesunku įsitikinti, kad minimumas pasiekiamas kai $\beta \approx 0$ ir $\sigma \approx 0,02$. Reikėtų paminėti, kad kai σ didėja ekstremumas tampa ne toks ryškus.



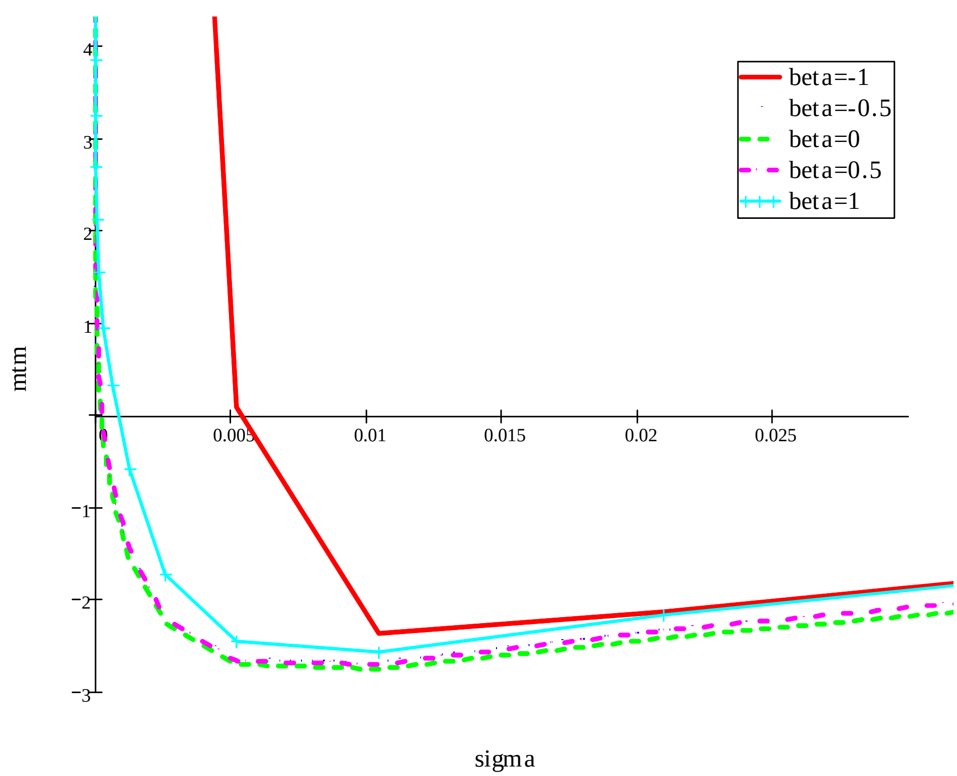
Paveikslas 3.13: MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro σ, kai parametras α yra skirtingas (1.05, 1.125, 1.225, 1.525 ir 2).

Paveiksle 3.15 pateikta MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro σ, kai keičiamas parametras β (-1, -0.5, 0, 0.5 ir 1). Akivaizdu, kad ekstremumas pasiekiamas, kai $\beta \approx 0$ ir $\sigma \approx 7 \cdot 10^{-3}$. Reikia atkreipti dėmesį, kad šios kreivės forma labai panaši į pav. 3.13 pateiktos priklausomybės formą.

Reikėtų pastebėti, kad optimalūs šios sekos parametrų įverčiai yra $\alpha = 1,4791$, $\beta = 0,0280$, $\mu = 0,0000$ ir $\sigma = 0,0079$. Deja neparametrinis Andersono–Darlingo suderinamumo testas nepatvirtino empirinės sekos suderinamumo su stabilioju dėsniu (su nurodytais parametrais).



Paveikslas 3.14: MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro β, kai keičiamas parametras σ (0.0000026, 0.000082, 0.0013, 0.021 ir 0.6711), parametras $\alpha = 1,5$.



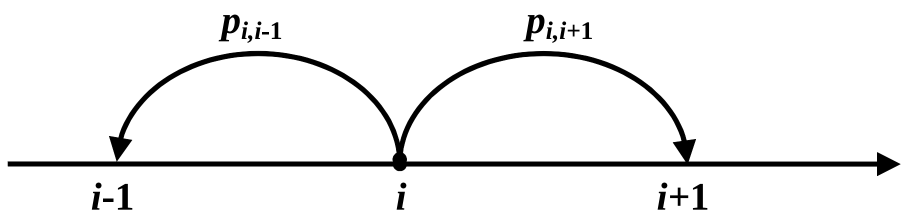
Paveikslas 3.15: MTM funkcijos priklausomybė nuo parametro σ, kai keičiamas parametras β (-1, -0.5, 0, 0.5 ir 1).

Metodų palyginimas Buvo atlikta serija modeliavimo bandymų. Buvo generuojamos atsitiktinės imtys naudojant 3.2 skyriuje aprašytą procedūrą. Kiekvienam parametrų rinkiniui buvo sugeneruotos po $t = 500$ imčių iš $N = 1000$ elementų. Parametrų įverčiai buvo gauti didžiausio tikėtinumo, momentų ir regresijos metodais. Vertinimo rezultatai pateikti lentelėse A.4–A.12. Eilutę „Tiksl. f-jos nuokrypis reikėtų suprasti kaip tikslo funkcijos reikšmių su išėjimo iš metodo ir tikslo funkcijos su pradinėmis parametrų reikšmėmis skirtumą. Neigiama eilutės reikšmė reiškia, kad metodas pagerino tikslo funkciją (ji sumažėjo). Regresijos metode, kaip parametro μ įvertis, imamas empirinis vidurkis ($\alpha > 1$).

Nors visi metodai duoda gana neblogus rezultatus, tačiau jų efektyvumas yra labai skirtingas. Kaip rodo eksperimentai, didžiausio tikėtinumo metodas duoda geriausius rezultatus (kaip rodo neigiamos tikslo funkcijos vidutinės reikšmės ir Andersono–Darlingo suderinamumo testų rezultatai), nors skaičiavimo laiko atžvilgiu jis nėra labai greitas.

3.2.5. Wiener'io proceso modeliai

Nagrinėkime tokį atsitiktinį klaidžiojimą (procesą) kai per laiko vienetą su vienoda tikimybe pajudama per vienetinį atstumą į kairę arba dešinę [149] $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$,čia $p_{i,j}$ yra tikimybė iš būsenos i pereiti į būseną j, $(i, j = 0, 1, 2, ...)$. Grafiškai toks klaidžiojimas atrodo taip (žr. 3.16 pav.)



Paveikslas 3.16: Perėjimo būsenos

Tarkime, per laiką Δt su vienoda tikimybe iš tam tikro taško $X(t)$ pajudame per atstumą Δx pajudame į kairę arba dešinę. Tada praėjus laikui $t \geqslant 0$ gausime $X(t) = \Delta x(X_1 + X_2 + \ldots + X_{[t/\Delta t]})$. Yra laikoma, kad X_i – nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Be to,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } i\text{-tajame žingsnyje pajudame į dešinę,} \\ -1, & \text{jei } i\text{-tajame žingsnyje pajudame į kairę.} \end{cases}$$

Atsitiktinio dydžio X_i vidurkis $\mathbf{E}[X_i] = 0$, o dispersija $\mathbf{D}[X_i] = 1$. Kadangi X_i – nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tai pagal Centrinę ribinę teoremą (CRT) fiksuotu laiko momentu t procesas $X(t)$ bus pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Sakoma, kad procesas $\{X(t), t \geqslant 0\}$ yra Brown'o procesas su trendo koeficientu μ ir dispersija σ, jei tenkina tris sąlygas: 1) $X(0) = 0$; 2) Procesas $\{X(t), t \geqslant 0\}$ turi nepriklausomus ir stacionarius pokyčius; 3) Visiems $t \geqslant 0$ atsitiktinis dydis $X(t)$ turi normalųjį skirstinį su vidurkiu μt ir dispersija $\sigma^2 t$ (t.y. $N(\mu t, \sigma^2 t)$). Galima parašyti $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$, čia $B(t)$ – standartinis Brown'o procesas. Tarkime, turime anksčiau apibrėžtą procesą $X(t)$ tuomet procesas $\left\{Y(t) = \mathrm{e}^{X(t)}, t \geqslant 0\right\}$ yra vadinamas Geometriniu Brown'o judesiu. Geometriniu Vinerio procesu yra aprašomas akcijų kainų kitimas nearbitražinėje akcijų rinkoje. Jei pažymėsime S_t akcijos kainą laiko momentu t tai akcijos kitimo procesas bus užrašomas stochastine diferencialine lygtimi

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t,$$

čia $\{W_t\}$ yra Vinerio procesas su poslinkiu μ ir kintamumu σ. Ši lygtis turi sprendinį, kuris gaunamas iš Ito lemos:

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\},$$

čia S_0 yra pradinė aktyvo kaina. Atsitiktinis dydis $\ln(S_t/S_0)$ yra pasiskirstęs pagal Gauss'o dėsnį su vidurkiu $(\mu - \sigma^2/2)t$ ir dispersija $\sigma^2 t$.

3.2.6. Stabilieji procesai

Stochastinis procesas $\{X(t), \forall t \in T\}$ yra stabilus, jei visi baigtiniamačiai skirstiniai yra stabilūs. Jis yra griežtai stabilus arba simetriškai stabilus, jei visi baigtinio matavimo skirstiniai yra, atitinkamai, griežtai stabilūs arba simetriškai stabilūs. $\{X(t), \forall t \in T\}$ yra α-stabilus tada ir tik tada jei visos tiesinės kombinacijos

$$\sum_{k=1}^{d} b_k X(t_k),$$

yra α-stabilios, čia $d \geqslant 1$, $t_1, t_2, \ldots, t_d \in T$, $b_1, b_2, \ldots, b_d$ – realūs skaičiai. α-stabiliojo proceso pavyzdžiu galėtų būti Lévy judesys. Stochastinis procesas $\{X(t), \forall t \in T\}$ yra vadinamas α-stabiliu Lévy judesiu jei:

- $X(0) = 0$ (beveik tikrai),
- X turi nepriklausomus pokyčius.
- $X(t) - X(s) \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$, visiems $0 \leqslant s < t < \infty$ ir $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$.

Galima pastebėti, kad procesas X turi ir stacionarius pokyčius.

Remiantis [69], galima užrašyti, kad aktyvo kaina bus procesas $\{Y_\alpha(t) : t \in [0, T]\}$, tenkinantis stochastinę diferencialinę lygtį:

$$\mathrm{d}Y_\alpha(t) = \mu \cdot Y_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \sigma \cdot Y_\alpha(t)\,\mathrm{d}L_\alpha(t),$$

su pradine sąlyga $Y_\alpha(0) = Y_0$, o $L_\alpha(t)$ – Lévy judesys. šis procesas dar vadinamas geometriniu Lévy procesu.

3.3. Multifraktališkumo ir savastingumo tyrimo metodai

3.3.1. Baigtinės dispersijos metodas

Norint įrodyti, kad procesas yra stabilusis, kartais pakanka parodyti, kad jis priklauso stabiliųjų dėsnių traukos zonai. Kaip žinoma, stabilieji ne Gauss'o dėsniai turi begalinį antrąjį momentą (dispersiją). Granger [60] ir Nikias [107] pasiūlė konverguojančios dispersijos metodą. Jie teigia, kad atsitiktinio dydžio X su begaline dispersija empirinių dispersijų seka S_n^2 diverguoja ([60]).

Tegul $x_1, \ldots x_n$ yra nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka. Beto $n \leqslant N < \infty$ ir $\bar{x}_n$ yra pirmųjų n stebėjimų empirinis vidurkis (jei egzistuoja), tuomet

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2, \quad 1 \leqslant n \leqslant N. \tag{3.12}$$

Jei tikimybinis dėsnis turi baigtinę dispersiją, tuomet egzistuoja tokia baigtinė konstanta $c < \infty$, kad

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 \to c \quad \text{(beveik tikrai)},$$

kai $n \to \infty$. Ir priešingai, jei seka yra pasiskirsčiusi pagal stabilųjį ne Gauss'o dėsnį, tai dispersijų seka S_n^2 diverguoja. Fofack [51] remdamasis šiais teiginiais generavo sekas su baigtine dispersija (standartinį normalųjį, Gamma) ir su begaline dispersija (Koši ir asimetrinį stabilųjį). Pirmuoju atveju, dispersijų seka konvergavo labai greitai, o antruoju atveju seka osciliavo su didele amplitude kai $n \to \infty$. Fofack ir Nolan [50] pritaikė šį metodą tirdami Kenijos šilingo ir Maroko dirhamo keitimo kursus juodojoje rinkoje. Jų tyrimo rezultatai parodė, kad valiutų keitimo kursai juodojoje rinkoje kinta su begaline dispersija ir dar daugiau – autoriai tvirtina, kad kai kurių valiutų keitimo kursų empiriniai dėsniai neturi net pirmojo momento! T.y. stabiliuoju atveju α yra mažesnis už 1.

Kaip pavyzdį akcijų rinkoje galima pateikti Microsoft korporacijos akcijų grąžas (pav. 3.17).

Stulpeliai grafike 3.17 rodo Microsoft korporacijos akcijų grąžų dispersiją skirtingais laiko intervalais, o vientisa kreivė atitinka dispersijų sekos S_n^2 elementus atitinkamu laiko momentu. Akivaizdu, kad (kai $n \to \infty$), empirinių dispersijų seka S_n^2 ne tik, kad diverguoja, bet ir osciliuoja su gana didele amplitude. Panašiai kaip Microsoft elgiasi ir kitų kompanijų akcijų grąžų sekos.

Algoritmas 14 Baigtinės dispersijos metodas

■ *Tikslas*: nustatyti ar seka turi baigtinę dispersiją;

Įėjimo parametrai: Y (n matis realių skaičių masyvas) duomenų seka (skaitoma iš failo, čia $n = rows(duom)$), h (sveikasis skaičius) dispersijos skaičiavimo žingsnis (dienų skaičius);

Išėjimo parametrai: agreguotos dispersijos grafikas;

Naudojama atmintis: papildomos atminties nenaudoja;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio n;

Aprašymas:

- duomenys (akcijų kainos Y) transformuojami į grąžas (Z);
- skaičiuojama dispersija intervaluose su žingsniu h (dienų skaičius) $SEKA = Infin(Z, h)$;
- skaičiuojama suminė dispersija iki konkretaus laiko momento, su žingsniu h (dienų skaičius) $seka1 = Infin1(Z, h)$;

Algoritmas:

```
Y :=
```

nuskaitomi duomenys

```
risk(a) := | n ← rows(a) − 2
           | for i ∈ 0..n
           |    s_i ← ln( a_(i+1) / a_i )
           | s
```

```
Z := risk(Y)
```

duomenys Y transformuojami į grąžas Z

```
rows(Z) = 1564
```

duomenų skaičius

```
Infin(Y,h) := | n ← rows(Y) − 1
              | t ← 0
              | u ← 0
              | for i ∈ 0,h..n − h
              |    | for j ∈ i..i + h
              |    |    | b_u ← Y_j
              |    |    | u ← u + 1
              |    | t ← t + 1
              |    | u ← 0
              |    | RE_t ← var(b)
              | RE
```

```
Infin1(Y,h) := | n ← rows(Y) − 1
               | t ← 0
               | for i ∈ 0,h..n
               |    | for j ∈ 0..i
               |    |    b_j ← Y_j
               |    | t ← t + 1
               |    | RE_t ← var(b)
               | RE
```

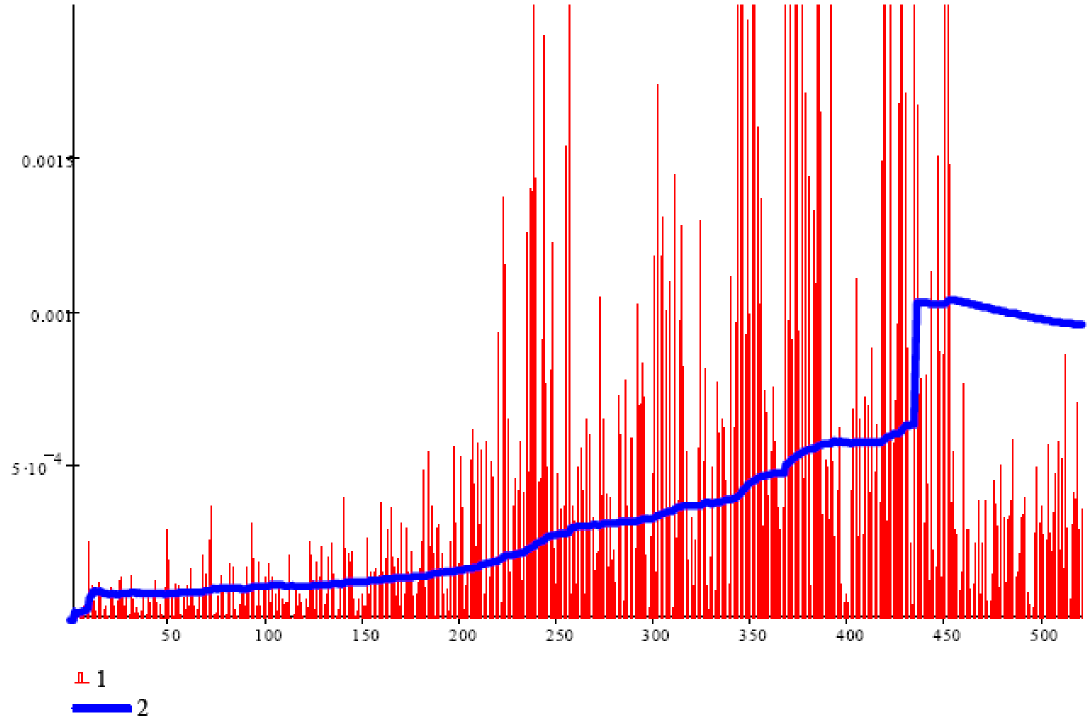
```
SEKA := Infin(Z,3)
```

skaičiuojama dispersija intervaluose

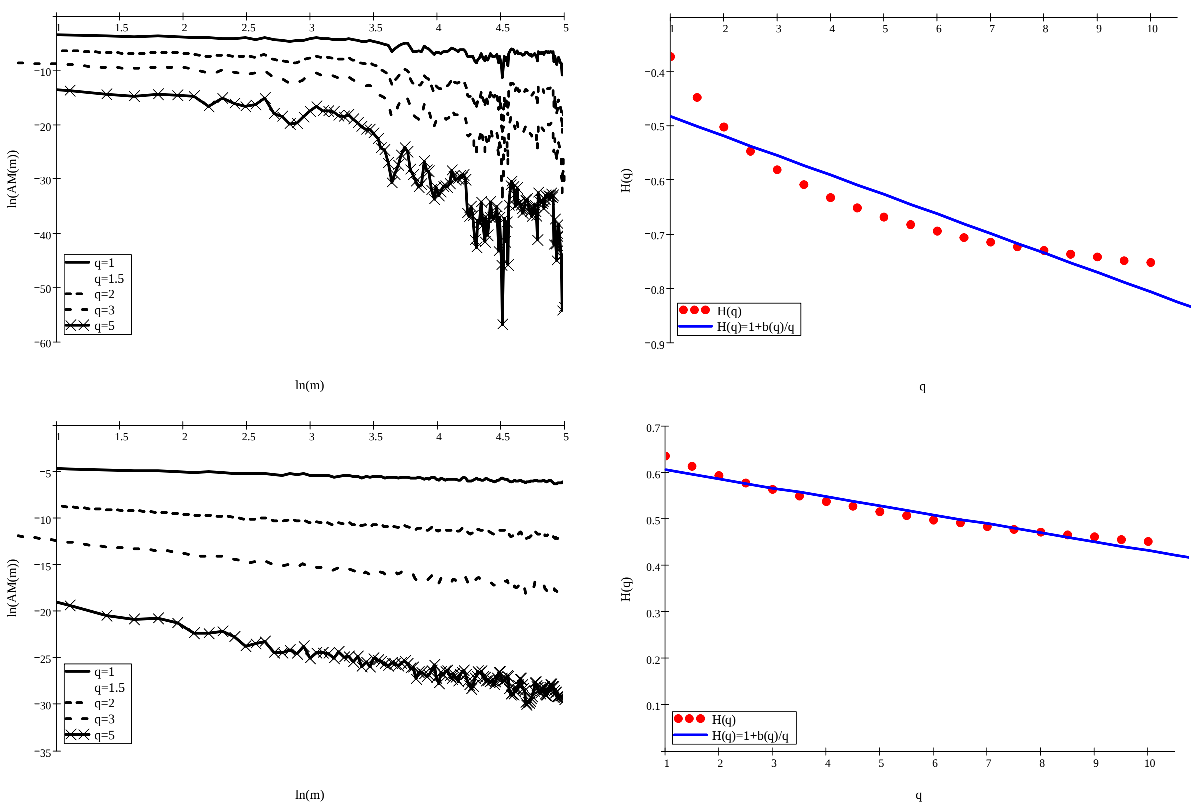
```
seka1 := Infin1(Z,3)
```

skaičiuojama dispersija iki tam tikro laiko momento

■



Paveikslas 3.17: Microsoft korporacijos empirinių dispersijų seka (13-03-86 – 27-05-05)



Paveikslas 3.18: Momentų logaritmų ir agregacijos lygio logaritmo priklausomybė (kairėje), bei Hurst'o indekso priklausomybė nuo momento (dešneje).

3.3.2. Savastingumo ir multifraktališkumo nustatymas

Savastingumas dažnai yra tiriamas ne nagrinėjant lygybes pasiskirstymo prasme kaip minėta įvade (skyrelis 2.5), bet tiriant absoliutinių momentų elgesį ([144]). Tarkime, kad $X^{(m)}$ yra agreguota seka, gauta dalinant pradinę seką, kurios ilgis N, į blokus, kurių kiekvieno ilgis m, ir sudarant seką suvidurkintą kiekvieno bloko ribose.

$$X^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} X_i, \tag{3.13}$$

čia $k = 1, 2 \dots [N/m]$.

Tarkime

$$AM^{(m)}(q) = \mathbf{E} \left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X(i) \right|^q = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left| X^{(m)}(k) - \bar{X} \right|^q.$$

Jei X yra savastingas, tai $AM^{(m)}(q)$ yra proporcingas $m^{\beta(q)}$, o tai reiškia, kad $\ln AM^{(m)}(q)$ yra tiesinis $\ln m$ atžvilgiu, kai q yra fiksuotas:

$$\ln AM^{(m)}(q) = \beta(q) \ln m + C(q). \tag{3.14}$$

Be to, eksponentė $\beta(q)$ yra tiesinė q atžvilgiu. Kadangi $X^{(m)}(i) \stackrel{d}{=} m^{1-H} X(i)$, tai gauname

$$\beta(q) = q(H-1). \tag{3.15}$$

Taigi, savastingam procesui turi galioti momentų tiesiškumas (3.14) ir turi būti tenkinama (3.15) sąlyga. Šis savastingo proceso apibrėžimas gali būti apibendrintas multifraktaliniams procesams. Neneigiamas procesas $X(t)$ vadinamas multifraktaliniu, jei absoliutinių momentų logaritmas yra tiesinis agregacijos lygio m atžvilgiu ([40]). Bendru atveju tolydaus laiko procesas $Y = \{Y(t),\, t \in T\}$ yra multifraktalinis, jei jis tenkina sąlygą:

$$Y(at) \stackrel{d}{=} M(a) Y(t), \quad \forall t \in T, \quad \forall a > 0,$$

kur lygybė $\stackrel{d}{=}$ suprantama pasiskirstymo funkcijų prasme.

Norint nustatyti ar procesas yra savastingas ar multifraktalinis, nepakanka ištirti antrojo momento elgesį, taip pat reikia analizuoti ir aukštesnius momentus.

Pav. 3.18 pateikti KNF1L („Klaipėdos nafta" viršuje) ir LTK1L („Lietuvos telekomas" apačioje) grafikai rodo, kad KNF1L nėra nei multifraktališkas nei savastingas, tuo tarpu LTK1L yra savastingas.

Algoritmas 15 Multifraktališkumo ir savastingumo nustatymas

■ *Tikslas*: grafiniu būdu nustatyti ar duotasis procesas, aprašomas duomenų seka, yra multifraktalinis ir savastingas;

Įėjimo parametrai: Y (n matis realių skaičių masyvas) duomenų seka (skaitoma iš failo, čia $n = rows(duom)$);

Išėjimo parametrai: absoliutinio momento logaritmo priklausomybės nuo sumavimo blokų ilgio logaritmo grafikas, Hurst indekso H priklausomybės nuo momento q grafikas;

Naudojama atmintis: papildomos atminties nenaudoja;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio n;

Aprašymas:

- duomenys (akcijų kainos Y) transformuojami į grąžas ($X = risk(Y)$);
- skaičiuojamas q-tasis absoliutinis momentas, vidurkinant po m sekos elementų:
  - pagal (3.13) sudaromos agreguota seka ZZ, sumuojant po m elementų;
  - randamas agreguotos sekos vidurkis;
  - skaičiuojamas absoliutinis agreguotos sekos momentas;

- parenkant skirtingus momento laipsnius q braižoma priklausomybė tarp absoliutinio momento logaritmo ir agregacijos lygmens m;
- pagal (3.15) aprašoma Hurst indekso H priklausomybė $H(q)$ nuo momento laipsnio q;
- braižomi atitinkami grafikai.

Algoritmas:

Y :=

$$\mathrm{risk}(a) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \mathrm{rows}(a) - 2 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad s_i \leftarrow \ln\left(\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\right) \\ s \end{array} \right.$$

$X := \mathrm{risk}(Y)$ duomenys transformuojami į grąžas

$N := \mathrm{rows}(X)$ $N = 10555$ duomenų kiekis

$$\mathrm{dalis}(Y, m) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \mathrm{rows}(Y) \\ \text{for } k \in 0..\mathrm{trunc}\left(\dfrac{n}{m}\right) - 1 \\ \quad X_k \leftarrow \dfrac{1}{m} \cdot \displaystyle\sum_{i = k \cdot m}^{(k+1)\cdot(m)-1} Y_i \\ X \end{array} \right.$$

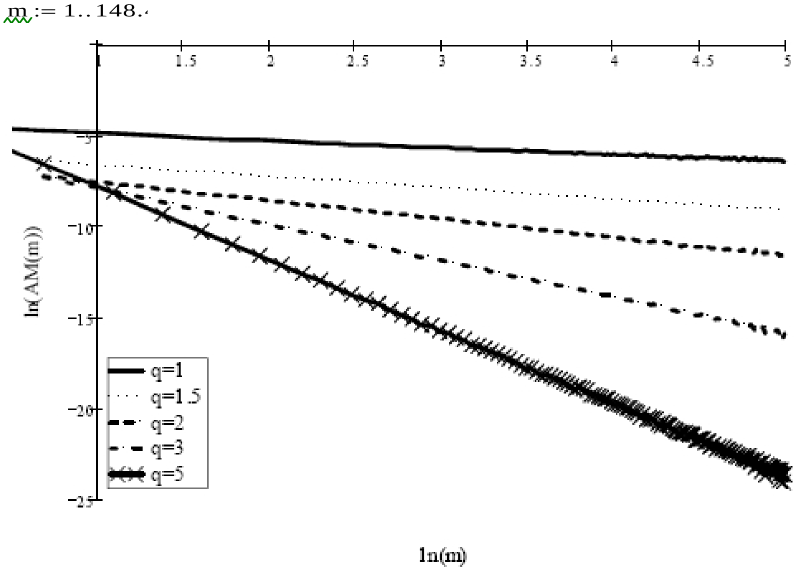
skaičiuojamos dalinės sumos ir vidurkiai

$$\mathrm{mom}(Y, m, q) := \left| \begin{array}{l} ZZ \leftarrow \mathrm{dalis}(Y, m) \\ mm \leftarrow \mathrm{mean}(Y) \\ \dfrac{1}{\mathrm{rows}(ZZ)} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{rows}(ZZ)-1} \left(\left|ZZ_k - mm\right|\right)^q \end{array} \right.$$

skaičiuojamas q-tasis absoliutinis momentas, vidurkinant po m sekos elementų——

——parenkant skirtingus momento laipsnius q braižoma priklausomybė tarp absoliutinio momento logaritmo ir agregacijos lygmens m —

$m := 1..148..$



$Z := X1$

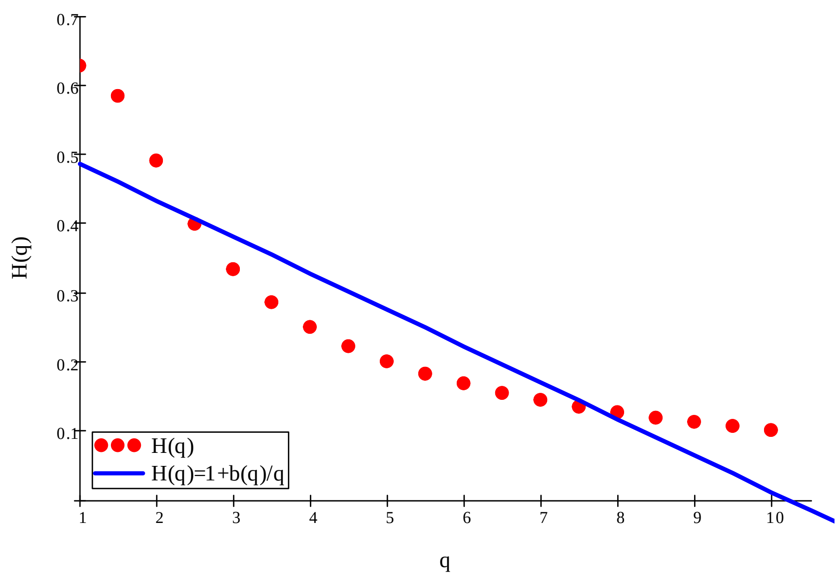
```
ER1(n,a) := | for i ∈ 0..min(200, N · 0.75)  if a = 0
            |   x_i ← ln(i + 1)
            | for i ∈ 0..min(200, N)        if a = 1
            |   x_i ← ln(mom(Z, i + 1, n))
            | x
```

$$H(n) := \frac{\mathrm{slope}(ER1(n,0), ER1(n,1))}{n} + 1$$

——————aprašoma Hurst indekso H priklausomybė $H(q)$ nuo momento laipsnio q——————

```
ER2(n,a) := | j ← 0
            | for i ∈ 0, 0.5..n − 1  if a = 0
            |   || x_j ← i + 1
            |   || j ← j + 1
            | j ← 0
            | for i ∈ 0, 0.5..n − 1  if a = 1
            |   || x_j ← H(i + 1)
            |   || j ← j + 1
            | x
```

```
h := 10hurst := line(ER2(h,0), ER2(h,1))
```




```
CV(n) := corr(ER2(n,0), ER2(n,1)) correlation := CV(h) correlation = −0.903
```

■

Hurst'o indeksas Finansinės sekos dažnai nėra adekvačiai aprašomos Vinerio procesu. Todėl dažnai iškeliama fraktališkumo arba savastingumo (angl. *self-similarity*) hipotezė. Fraktališkumui charakterizuoti naudojamas Hurst rodiklis arba eksponentė. Hurst'o rodiklio reikšmė $\frac{1}{2}$ atitinka Brown'o judesį, kai dispersija bėgant laikui kinta $\sqrt{t}$ greičiu, deja tiriant realius duomenis paaiškėja, kad augimo tempas (Hurst rodiklis) yra didesnis. Kai rodiklis $0.5 < h \leqslant 1$ sakoma, kad procesas yra su ilga atmintimi, o kai $0 \leqslant h < 0.5$ sąlygojamos ergodinės laiko eilutės, o tai taip pat reiškia, kad egzistuoja pastovus proceso vidurkis.

Šiam rodikliui įvertinti yra nemažai būdų, tačiau dažniausiai literatūroje yra minimi šie ([72]):

1. vertinimo metodai pagrįsti laiko analize (angl. *time domain estimators*),
2. metodai paremti dažninėmis/banginėmis savybėmis.

Pirmojo tipo parametrų vertinimui priskiriami šie metodai:

- absoliutinių reikšmių metodas (angl. *Absolute Value*) arba absoliutinių momentų (angl. *Absolute Moments*)[143–145],
- dispersijos metodas (angl. *Variance*) arba agreguotos dispersijos (angl. *Aggregate Variance*)[141, 143, 145],
- R/S (angl. *rescaled adjusted range*) metodas yra vienas iš dažniausiai naudojamų [96–98, 143, 145]. Šį metodą sugalvojo Mandelbrot 1969 metais. R/S metodui yra sukurta keletas modifikacijų, tačiau viena iš geriausiai žinomų yra Lo – R/S [90, 145],
- modelio liekanų dispersijos metodas (angl. *Variance of Residuals*) [113, 145]

Modeliai pagrįsti laiko analize pasižymi tuo, kad čia tiriama laipsninė priklausomybė tarp vienos ar kitos laiko sekos charakteristikos ir specialaus bloko dydžio m.

Iš antrojo tipo arba metodų paremtų dažninėmis/banginėmis sekos savybėmis galima išskirti šiuos:

- Periodogramos metodas [54, 143, 145]. Šio metodo modifikacijų galima rasti darbe [142].
- Whittle metodas [52, 145]. Yra sukurta keletas robastinių šio metodo modifikacijų, tokių kaip agreguotas Whittle (angl. *Aggregated Whittle*) [76] ar lokalus Whittle (angl. *Local Whittle*) [126] metodai;
- Abry–Veitch (pagal autorių pavardes) [1, 72].

Šio tipo metodai operuoja dažninėmis vilnelių (angl. *wavelet*) savybėmis.

Minimi metodai [72] yra realizuoti programa SELFIS ([134]), kuri yra laisvai platinama. Ši programa leidžia ne tik įvertinti Hurst indeksą absoliutinių momentų, dispersijos, R/S ir modelio liekanų dispersijos metodais, bet ir pateikia koreliacijos koeficientą, o kartu su Periodogramos, Whittle bei Abry–Veitch įverčiais gaunami ir pasikliautinieji intervalai.

3.3.3. Pradinės ir agreguotos sekų homogeniškumo nustatymas

Tarkime turime pradinę finansinę seką (grąžas ar kainų pokyčio logaritmus) $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Apskaičiuojame pradinės sekos dalinių sumų seką $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{[n/d]}$, kur

$$Y_k = \sum_{i=kd}^{k(d+1)} X_i, \quad k = 1 \ldots [n/d], \tag{3.16}$$

čia d – sumos dedamųjų skaičius. Pradinių ir išvestinių sumų homogeniškumo nustatymui buvo naudojami Smirnovo ir Andersono (ω^2) metodai.

Andersono statistika apskaičiuojama pagal formulę:

$$T = \frac{1}{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} \left[n_1 \sum_{i=1}^{n_1} (r_{1,i} - i)^2 + n_2 \sum_{j=1}^{n_2} (r_{2,j} - j)^2 \right] - \frac{4 n_1 n_2 - 1}{6(n_1 + n_2)},$$

čia n_1 – pirmosios imties tūris, n_2 – antrosios imties tūris, $r_{1,i}$ ir $r_{2,j}$ – atitinkamai pirmosios ir antrosios rūšiuotų imčių elementų rangai bendroje variacinėje sekoje. Ši statistika, kai $n_1 n_2 \to \infty$ ($n_1 \geqslant 50$, $n_2 \geqslant 50$) ir $n_1/n_2 = \mathrm{const}$ yra asimptotiškai pasiskirsčiusi pagal $a_1(x) = n\omega^2$ dėsnį.

Smirnovo statistika

$$D_{n_1,n_2} = \max(D^+_{n_1,n_2}, D^-_{n_1,n_2}),$$

čia $n_1 \leqslant n_2$,

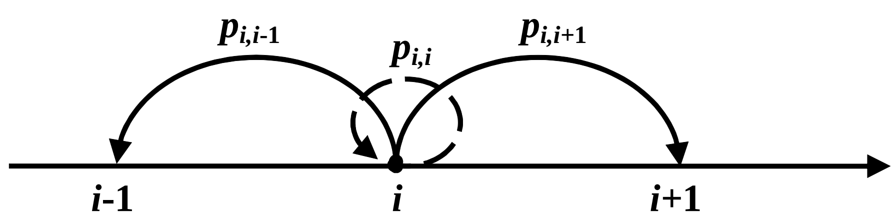
$$D^+_{n_1,n_2} = \max_{1 \leqslant r \leqslant n_1} \left(\frac{r}{n_1} - F_{n_2}(x_{(r)}) \right) \quad \text{ir} \quad D^-_{n_1,n_2} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n_1} \left(F_{n_2}(x_{(r)}) - \frac{r-1}{n_1} \right),$$

o F_n – imties empirinė pasiskirstymo funkcija. Ši statistika, kai $n_1 n_2 \to \infty$ sutampa su Kolmogorovo pasiskirstymu.

3.4. Pasyvumo efekto besivystančiose rinkose tyrimas

Kaip jau buvo minėta, tiek Baltijos tiek ir kitų Centrinės ir Rytų Europos šalių finansų rinkos yra palyginti naujos, todėl jos yra vis dar besivystančios, o kai kurie finansiniai instrumentai yra mažai likvidūs. Neretai besivystančiose rinkose yra stebimas stagnacijos efektas. Buvo pastebėta, kad grąžų sekose yra stebimos gana ilgos nulių serijos. Tai reiškia, kad praktikoje yra gana ilgi laikotarpiai kai akcijos kaina nesikeičia. Vadinamųjų nulinių grąžų skaičius tokiais atvejais gali siekti 89% visų stebėjimų. Ši problema galėtų būti išspręsta, pakeičiant tolydžiuosius modelius mišriaisiais – tolydžiųjų ir diskrečiųjų dėsnių mišiniu. Tai pat iškyla svarbi problema apie šių nulių serijų ilgių pasiskirstymą. Kodėl? Pavyzdžiu galėtų būti portfelio vertės pastovumo (stabilumo) problema. Tarkime, turime tam tikrą vertybinių popierių portfelį. Norime ištirti kiek laiko (dienomis) šio portfelio vertė nesikeis, dėl komponentų verčių nesikeitimo.

Konferencijų pranešimuose medžiagose buvo pristatyta nemažai įvairių patobulinimų, patikslinimų ir apibendrinimų. Bene svarbiausias iš jų yra – mišriojo modelio aprašymas ir tyrimas [13]. Buvo atliktas klasikinio Brown'o klaidžiojimo modelio papildymas, viena papildoma būsena: su tam tikra tikimybe procesas lieka toje būsenoje kurioje jis buvo prieš tai (žr. pav. 3.19).



Paveikslas 3.19: Perėjimo būsenos

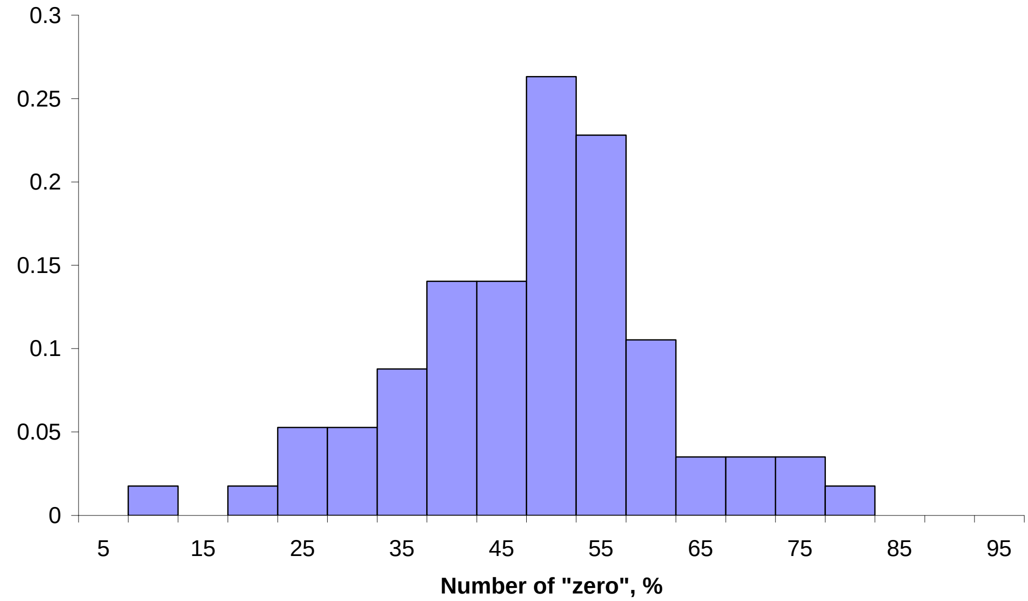
Trinominio klaidžiojimo modelio idėja nėra nauja, tačiau literatūroje ji nėra mėgstama, nes toks klaidžiojimas asimptotiškai nekonverguoja į Brown'o judesį. Toks klaidžiojimas vadinamas apibendrintu Brown'o judesiu arba Lévy judesiu ir dažniausiai aproksimuojamas klasikiniu procesu, nes vieną kartą paėję į kairę pusę, o kitame žingsnyje grįžę atgal, mes vis tiek pateksime į pradinę būsena ir asimptotiškai apibendrinimo galėsime išvengti. Deja, praktikoje toks aproksimavimas nėra tikslus ir tai ypač išryškėja besivystančiose rinkose [13], kai pasilikimo būsenoje i statistinė tikimybė išauga iki 89%. Todėl disertacijoje tiriamas statistinis nulinių grąžų serijų pasiskirstymas.

Su panašiomis problemomis yra susiduriama kompiuteriniuose tinkluose, kai modeliuojamas informacijos praradimas perdavimo metu [24]. Vietoje klasikinio geometrinio modelio [24] buvo pasiūlytas logaritminis ir parodyta, kad empiriškai jis geriau aprašo informacijos vienetų praradimą.

3.4.1. Nulinių grąžų problema (NGP)

Imkime a.d. N empirinį skirstinį, kur N yra nulinių būsenų procentas sekoje, kiekvieną finansinę seką iš nagrinėjamo sąrašo (žr. priedų lenteles 2.1, 2.2 ir 2.3) laikome šio a.d. realizacija. Paveiksle 3.20 yra pateikta šio a.d. histograma. Nulinių būsenų skaičius svyruoja tarp 13% ir 80% ir kaip matome iš histogramos yra sukoncentruotas tarp 25% ir 60%, o vidutiniškai nulinės būsenos sudaro yra apie 50% visos sekos.

Iš pradžių nagrinėkime mišrųjį modelį kai „nulinių" grąžų pasirodymai nepriklauso nuo pačių grąžų kitimo ir yra atsitiktiniai.



Paveikslas 3.20: Nulinių būsenų santykinis dažnis 60 sekų.

3.4.2. Mišrusis stabilusis modelis

Tegul atsitiktiniai dydžiai $Y \sim B(1,p)$ ir $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ yra tarpusavyje nepriklausomi. Tuomet mišrusis stabilusis a.d. Z įgyja reikšmę 0 su tikimybe 1, jei $Y = 0$, priešingu atveju $Y = 1$ ir $Z = X$. Tuomet pagal pilnosios tikimybės formulę užrašome mišriojo dėsnio pasiskirstymo funkciją:

$$\begin{aligned} P\left(Z < z\right) &= P(Y=0)P(Z<z|Y=0) + P(Y=1)P(Z<z|Y=1) \\ &= p\varepsilon(z) + (1-p)S_\alpha(z), \end{aligned}$$

kur

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

yra išsigimusio skirstinio pasiskirstymo funkcija. Tuomet mišriojo atsitiktinio dydžio tankio funkcija yra

$$f(x) = p\delta(x) + (1-p)p_\alpha(x),$$

kur $\delta(x)$ yra Dirako delta funkcija.

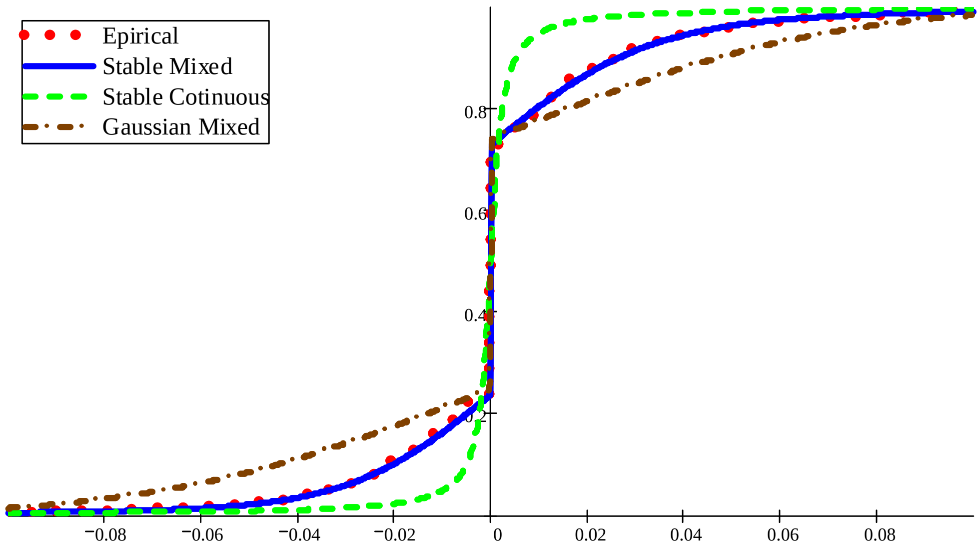
3.4.2.1. Mišriojo dėsnio parametrų vertinimas ir pasiskirstymo, tikimybinio tankio bei charakteristinės funkcijos

Duotajai akcijų kainų grąžų sekai $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sudarykime nenulinių grąžų seką $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{n-k}\}$, kurios ilgis $n-k$ (k – nulinių grąžų skaičius). Tuomet tikėtinumo funkcija užrašoma taip

$$L(\bar{x},\theta,p) \sim (1-p)^k p^{n-k} \prod_{i=1}^{n-k} p_\alpha(\bar{x}_i,\theta),$$

kur θ yra parametrų vektorius $\theta = (\alpha,\beta,\mu,\sigma)$ (stabiliuoju atveju). Funkcija $(1-p)^k p^{n-k}$ yra nesunkiai optimizuojama:

$$p_{\max} = \frac{n-k}{n},$$



Paveikslas 3.21: Įvairios pasiskirstymo funkcijos (ZMP1L).

todėl pasiskirstymo funkcija užrašoma

$$F(z) = \frac{n-k}{n} S_\alpha(z, \theta_{\max}) + \frac{k}{n}\varepsilon(z),$$

kur $\theta_{\max}$ nenulinių grąžų sekos parametrų įverčių vektorius, o šios funkcijos grafikas yra pateiktas 3.21 paveiksle.

Tuomet tikimybinių tankio funkcija yra

$$p(z) = \frac{n-k}{n} p_\alpha(z, \theta_{\max}) + \frac{k}{n}\delta(z)$$

(šios funkcijos grafikas pateiktas pav. 3.22) ir galiausiai mišriojo dėsnio charakteristinė funkcija (pav. 3.23) yra

$$\phi_{mix}(t) = \frac{n-k}{n}\phi(t) + \frac{k}{n}.$$

Deja, praktiniai tyrimai rodo, kad tokio modelio prielaidos apie atsitiktinių dydžių Y ir X nepriklausomumą yra netikslūs. Todėl yra siūlomas kitas patobulintas modelis.

Algoritmas 16 Mišriojo stabiliojo pasiskirstymo funkcija $FF(x, p1, par)$

■*Tikslas*: Mišriojo stabiliojo pasiskirstymo funkcijos $P(Z < z) = p1 \cdot epsilon(z) + (1 - p1) \cdot pasiskirstymas(z, par)$ reikšmės apskaičiavimas taške x, su tikimybe $p1$ ir parametrais par;

Įėjimo parametrai: x (realusis skaičius) taškas kuriame skaičiuojama pasiskirstymo funkcijos reikšmė, $p1$ (realusis skaičius iš intervalo $[0, ..., 1]$) tikimybė įgyti nenulinę reikšmę, par (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų rinkinys;

Išėjimo parametrai: z (realusis skaičius) mišriojo stabiliojo pasiskirstymo funkcijos reikšmė;

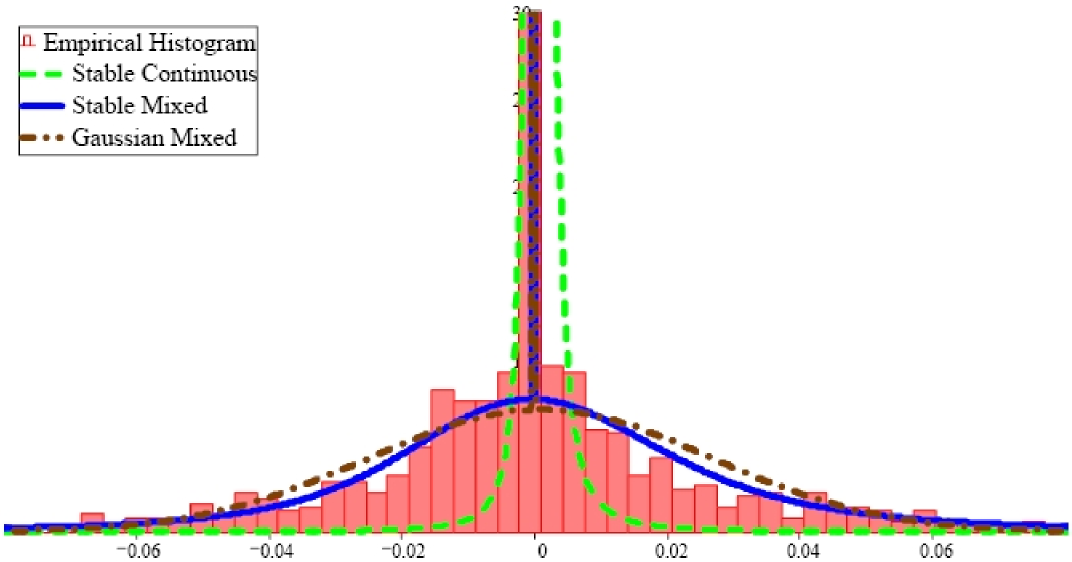
Naudojama atmintis: papildomos atminties nenaudoja;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo kvadratūrinių formulių apskaičiavimo;

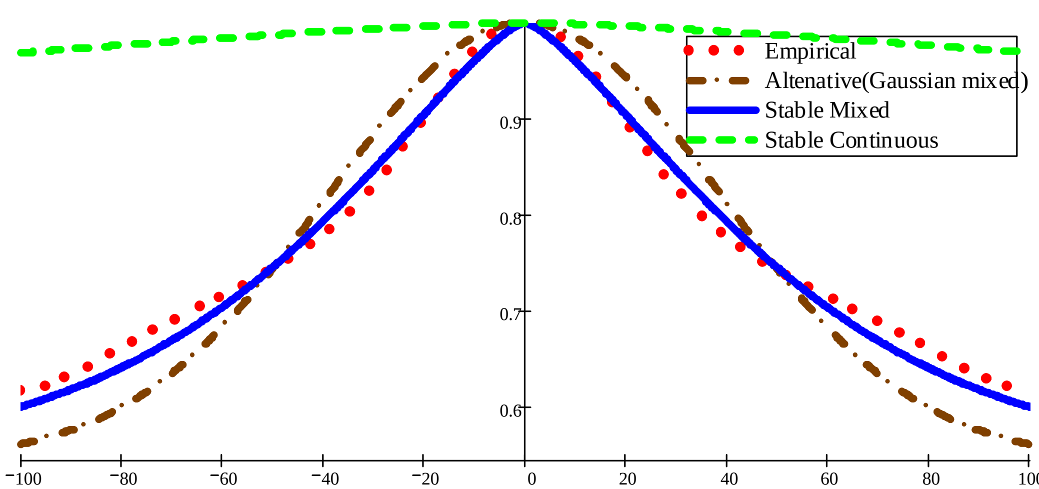
Aprašymas:

- Skaičiuojama išsigimusio dėsnio pasiskirstymo funkcija $epsilon(x) = 0$, kai $x \leqslant 0$ ir lygu 1, kai $x > 0$;
- Skaičiuojama stabiliojo dėsnio pasiskirstymo funkcija $pasiskirstymas(x, xc)$;
- Apskaičiuojama mišriojo stabiliojo dėsnio pasiskirstymo funkcija $z = pasiskirstymas(x, xc) \cdot p1 + (1 - p1) \cdot epsilon(x)$;

Algoritmas: nepateikiamas■



Paveikslas 3.22: Tikimybinio tankio funkcijos ir empirinė histograma (ZMP1L).



Paveikslas 3.23: Empirinė, Gauso, stabilioji-mišrioji ir tolydi stabilioji charakteringosios funkcijos (ZMP1L).

3.4.2.2. Mišriojo-stabiliojo modelio adekvatumas

Įvertinę finansinių sekų stabiliuosius parametrus (žr. 2.2 ir 2.3 bei A.14 ir A.15 lenteles), turime patikrinti neparametrines suderinamumo hipotezes. Klasikiniu atveju grąžos yra tolydieji a.d. ir suderinamumo testai (Kolmogorovo–Smirnovo ir Andersono–Darlingo) puikiai tinka. Tačiau mišrusis modelis negali būti priskiriamas prie tolydžiųjų. Todėl yra taikomas Koutrouvelio kriterijus, paremtas empirine charakteristine funkcija [80], bei modifikuotas χ^2 (Romanovskio) metodas [75] (žr. 3.4.2.3 priedą).

Abiejų metodų patikimumas dar nebuvo ištirtas stabiliesiems asimetriniams modeliams. Lentelėje 3.3 pateikta dirbtinių imčių (sugeneruotų) ir teorinių skirstinių su įvertintais parametrais suderinamumo hipotezių patikimumo testų rezultatai ($N = 10000$ pakartojimų), gauti generuojant mišrias stabiliąsias sekas (sekos ilgis $n = 10000$) su skirtingais stabilumo parametrais α ir skirtingu „nulių" skaičiumi, o kitus parametrus fiksuojant ($\beta = -0.05$, $\mu = -0.01$, $\sigma = 0.01$).

3.3. Lentelė. Suderinamumo testų patikimumo testavimo rezultatai (hipotezės neatmetimo procentai).

Nulių, %	Modifikuotas χ^2, %			Koutrouvelis, %		
	$\alpha = 1.25$	1.50	1.75	1.25	1.50	1.75
10	41.14	64.00	73.40	33.08	72.32	81.47
20	56.57	67.09	75.60	52.08	76.24	82.38
30	49.52	70.73	77.90	40.74	75.76	82.44
40	57.48	73.37	79.21	47.11	77.68	82.79
50	75.58	75.79	82.05	58.79	77.69	83.03
60	70.37	78.43	83.71	59.69	79.63	84.27
70	73.84	81.64	86.02	61.17	81.10	84.23
80	81.40	84.25	87.24	70.64	82.43	85.55
90	86.89	88.13	88.69	78.97	86.48	85.55
Vidutiniškai	56.50	76.70	80.90	53.80	79.30	83.30

Reikėtų atkreipti dėmesį, kad didėjant tiek stabilumo parametrui α, tiek nulių skaičiui, abiejų testų patikimumas didėja. Atlikus analogišką eksperimentą su tolygiai intervale $[0, 1]$ pasiskirsčiusiomis sekomis, buvo nustatyta, kad abu metodai vienodai atmeta suderinamumo hipotezes, o rezultatai yra trivialūs. Tuo tarpu literatūroje dažnai minimas Brown'o ir Saliu [20] pasiūlytas charakteristinės funkcijos metodas yra netinkamas iš principo, nes skirtas tik simetriniams skirstiniams. Naujų metodų skirtų asimetriniams dėsniams sukūrimas pastūmėtų šią sritį į priekį.

3.4.2.3. Suderinamumo testų patikimumas

Pateikiami suderinamumo testų paremtų empirine charakteristine funkcija [80,83], bei modifikuoto χ^2testo (Romanovskio [75]) realizavimo algoritmai.

Algoritmas 17 Modifikuotas chi kvadratu testas (Romanovskio testas) $romanovski(p1, x5, ns1, xc0)$

■ *Tikslas*: naudojant modifikuotą chi kvadratu testą nustatyti ar duotoji seka $x5$ yra pasiskirsčiusi pagal mišrųjį stabilųjį dėsnį su parametrais $xc0$ ir nenulinės grąžos tikimybe $p1$;

Įėjimo parametrai: $p1$ (realusis skaičius iš intervalo $[0, ..., 1]$) tikimybė įgyti nenulinę reikšmę, $x5$ ($ns1$ matis realių skaičių masyvas) seka kurios suderinamumas tikrinamas, $ns1$ (sveikasis skaičius) sekos ilgis, $xc0$ (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų rinkinys;

Išėjimo parametrai: grąžinamas tik testo rezultatas (0 – suderinamumo hipotezė atmesta arba 1 – suderinamumo hipotezė neatmesta);

Naudojama atmintis: papildoma atmintis reikalinga patekimų į konkretų intervalą skaičiui ir teorinėms šių patekimų tikimybėms saugoti;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo intervalų skaičiaus ir sekos ilgio;

Aprašymas:

- H_0: $F_n(x) = F(x)$, čia $F_n(x)$ – empirinė pasiskirstymo funkcija, $F(x)$ – hipotetetinė pasiskirstymo funkcija;
- surūšiuotą seką $x5$ sudaliname į $inte$ vienodų intervalų ir išskiriame vidurinį intervalą (tikimybės įgyti reikšmę 0);
- nustatome kiek į kiekvieną intervalą patenka sekos reikšmių (sudaromas vektorius $M[]$);
- nustatome teorines (laikant, kad seka yra pasiskirsčiusi pagal stabilųjį mišrųjį dėsnį) patekimo į kiekvieną intervalą tikimybes (sudaromas vektorius $pp[i] = F(x_{i+1}) - F(x_i)$);
- skaičiuojama empirinė statistikos reikšmė $\chi^2_{empirine} = \sum_{i=1}^{inte} \frac{(M[i]-ns1\cdot pp[i])^2}{ns1\cdot pp[i]}$;
- jei $\frac{\chi^2_{empirine}-inte+1}{\sqrt{2(inte-1)}} < 3$ tai su pasikliovimo lygmeniu 0.05 negalima atmesti hipotezės, kad duotoji seka $x5$ yra pasiskirsčiusi pagal mišrųjį stabilųjį dėsnį su parametrais $xc0$ ir nenulinės grąžos tikimybe $p1$;

Algoritmas:

1. $inte = 7$;
2. $minD = minmin(x5, ns1)$;——————randama minimali duomenų reikšmė——
3. $maxD = maxmax(x5, ns1)$;——————randama maksimali duomenų reikšmė——
4. $psum = 0.0$, $Msum = 0.0$;
5. FOR $j = 0$ TO $inte$ DO

   5.1. $M[j] = 0$;
   5.2. $pp[j] = 0.0$;
   5.3. $j = j + 1$;

6. $h1 = 2 \cdot (-eps - minD)/(inte - 1)$;——————intervalo ilgis neigiamoje dalyje—
7. $h2 = 2 \cdot (-eps + maxD)/(inte - 1)$;——————intervalo ilgis teigiamoje dalyje—
8. FOR $i = 0$ TO $ns1$——tikrinam į kurį intervalą patenka $x5[i]$, t.y. sudarom vektorių M–

   8.1. IF $(x5[i] < -eps)$ THEN——————jei neigiamas skaičius————

      8.1.1. FOR $j = 0$ TO $(inte - 3)/2$ DO

         8.1.1.1. $intz = minD + j \cdot h1$
         8.1.1.2. $intz\_1 = minD + (j + 1) \cdot h1$
         8.1.1.3. IF $((intz =< x5[i])$ AND $(intz\_1 > x5[i]))$ THEN
         8.1.1.4. $M[j] = M[j] + 1$;
         8.1.1.5. BREAK;————nutraukiam ciklą pagal j——
         8.1.1.6. $j = j + 1$

   8.2. ELSE{

      8.2.1. IF $(x5[i] >= eps)$ THEN—————-jei teigiamas skaičius————

         8.2.1.1. FOR $j = (inte + 1)/2$ TO $inte$ DO
         8.2.1.2. $intj = eps + h2 \cdot (j - (inte + 1)/2)$;
         8.2.1.3. $intj\_1 = eps + h2 \cdot (j + 1 - (inte + 1)/2)$;
         8.2.1.4. IF $((intj < x5[i])$ AND $(intj\_1 >= x5[i]))$ THEN
         8.2.1.5. $M[j] = M[j] + 1$;
         8.2.1.6. BREAK;————nutraukiam ciklą pagal j——
         8.2.1.7. $j = j + 1$;

      8.2.2. ELSE——————jei vidurinis intervalas, t.y. $x5[i] = 0$——

8.2.2.1. $M[(inte-1)/2] = M[(inte-1)/2]+1;$

8.3. $i = i+1$

9. FOR $j = 1$ TO $(inte-3)/2$ DO—skaičiuojam teorines tikimybes, t.y. sudarom vektorių pp —

   9.1. $pp[j] = FF(minD + h1 \cdot (j+1), p1, xc0, 0) - FF(minD + h1 \cdot j, p1, xc0, 0);$
   9.2. $j = j+1$

10. FOR $j = (inte+1)/2$ TO $inte-1$ DO

    10.1. $pp[j] = FF(eps + h2 \cdot (j+1-(inte+1)/2), p1, xc0, 0) - FF(eps + h2 \cdot (j-(inte+1)/2), p1, xc0, 0);$
    10.2. $j = j+1$

11. $pp[(inte-1)/2] = FF(eps, p1, xc0, 0) - FF(-eps, p1, xc0, 0);$
12. $pp[0] = FF(minD + h1, p1, xc0, 0);$
13. $pp[inte-1] = 1 - FF(maxD - h2, p1, xc0, 0);$—teorinių tikimybių skaičiavimo pabaiga–
14. $chis = 0;$————————————skaičiuojam $\chi^2_{empirine}$—
15. FOR $i = 0$ TO $inte$ DO

    15.1. $chis+ = (M[i] - ns1 \cdot pp[i])^2/(ns1 \cdot pp[i]);$
    15.2. $i = i+1$

16. IF $((chis - inte + 1)/sqrt(2 \cdot (inte-1)) < 3)$

    16.1. RETURN 1.0;

17. ELSE

    17.1. RETURN 0.0. ■

Algoritmas 18 Koutrouvelis suderinamumo testas $koutrouvelis(p1, x5, ns1, x1, kt)$

■*Tikslas*: naudojant Koutrouvelis suderinamumo testą nustatyti ar duotoji seka $x5$ yra pasiskirsčiusi pagal mišrųjį stabilųjį dėsnį su parametrais $x1$ ir nenulinės grąžos tikimybe $p1$;

Įėjimo parametrai: $p1$ (realusis skaičius iš intervalo $[0, ..., 1]$) tikimybė įgyti nenulinę reikšmę, $x5$ ($ns1$ matis realių skaičių masyvas) seka kurios suderinamumas tikrinamas, $ns1$ (sveikasis skaičius) sekos ilgis, $x1$ (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų rinkinys, kt (sveikasis skaičius) – nenaudojamas;

Išėjimo parametrai: grąžinamas tik testo rezultatas (0 – suderinamumo hipotezė atmesta arba 1 – suderinamumo hipotezė ne atmesta);

Naudojama atmintis: papildoma atmintis reikalinga saugoti tarpiniams rezultatams (naudojama speciali klasė Matrix): m ilgio realių skaičių masyvas, trys $2 \cdot m$ ilgio realių skaičių masyvai, ir dvi realių skaičių matricos $2m \times 2m$;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo intervalų skaičiaus ir sekos ilgio;

Aprašymas:

- naudojama speciali klasė Matrix iš bibliotekos m_inverse.cpp rastos per google.
- Metodui realizuoti formuluojamos hipotezės: H$_0$: seka turi charakteringąją funkciją $\phi_0(t) = \phi_{mix}(t, p, \theta)$, su alternatyvia hipoteze: seka turi charakteringąją funkciją $\phi_1(t) = \phi(t, \theta)$, o $\phi_2(t) = \hat{\phi}(t, X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{itX_j}$ yra empirinė charakteringoji funkcija.
- skaičiuojamos mišriojo dėsnio charakteringosios funkcijos menamoji ir realioji dalys taškuose $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.07$ ir $t_3 = 0.1$ ir sujungiamos į vieną vektorių $ksi = \xi_0' = \{C_0(t_1), C_0(t_2), C_0(t_3), S_0(t_1), S_0(t_2), S_0(t_3)\}$ čia $C_0(t) = \mathrm{Re}(\phi_0(t))$ ir $S_0(t) = \mathrm{Im}(\phi_0(t))$;

- skaičiuojamos empirinės charakteringosios funkcijos menamoji ir realioji dalys taškuose $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.07$ ir $t_3 = 0.1$ ir sujungiamos į vieną vektorių $ksin = \xi_2' = \{C_2(t_1), C_2(t_2), C_2(t_3), S_2(t_1), S_2(t_2), S_2(t_3)\}$ čia $C_2(t) = \mathrm{Re}(\phi_2(t))$ ir $S_2(t) = \mathrm{Im}(\phi_2(t))$;
- skaičiuojamas skirtumas $kZ = (\xi_2 - \xi_0) = ksin - ksi$ ir $kZ^{\mathrm{T}} = (\xi_2 - \xi_0)' = Transp(kZ)$
- sudaroma matrica $Om = \Omega_0$, čia $\Omega_l = (\omega_{jk}^l)$ ir

$$\omega_{jk}^l = \begin{cases} C_l(t_j + t_k) + C_l(t_j - t_k) - 2C_l(t_j)C_l(t_k) & (1 \le j, k \le m) \\ C_l(t_j - t_k) - C_l(t_j + t_k) - 2S_l(t_j)S_l(t_k) & (m+1 \le j, k \le 2m) \\ S_l(t_j + t_k) - S_l(t_j - t_k) - 2C_l(t_j)S_l(t_k) & (1 \le j \le m; m+1 \le k \le 2m). \end{cases}$$

- randama Om atvirkštinė matrica Om_1 (panaudojama speciali funkcija $inv(Om, Om\_1)$);
- sudauginant vektorius ir atvirkštinę matricą gaunama statistikos reikšmė $Q_2^0 = ZZZ = 2n(\xi_2 - \xi_0)'\Omega_0^{-1}(\xi_2 - \xi_0) = 2 \cdot ns1 \cdot (Transp(kZ) \cdot Om\_1 \cdot kZ)(1,1)$;
- jei $Q_2^0 > \chi^2_{\alpha,2m}$ tai hipotezė H_0 atmetama, čia $\chi^2_{\alpha,2m}$ yra χ^2_{2m} dėsnio $(1-\alpha)$ kvantilis.

Algoritmas:

1. $m = 3$; //————taškų kuriuose skaičiuojama charakteringoji funkcija skaičius
2. $T.setv(0.05, 0)$; $T.setv(0.07, 1)$; $T.setv(0.1, 2)$;————formuojamas vektorius T
3. $ks(T, x5, ns1, x1, p1, \&ksi, 1)$; ————formuojamas vektorius ksi
4. $ks(T, x5, ns1, x1, p1, \&ksin, 0)$; ————formuojamas vektorius $ksin$
5. $omega(T, p1, x1, \&Om)$;————sudaroma matrica Om
6. $kZ = ksin - ksi$;————skaičiuojamas skirtumas kZ
7. $det = inv(Om, Om\_1)$;————randama Om atvirkštinė matrica Om_1
8. $ZZZ = 2 \cdot ns1 \cdot (Transp(kZ) \cdot Om\_1 \cdot kZ)(1,1)$;————statistikos reikšmė
9. $chis = crit\_chisq(2 \cdot m, 0.95)$;————randama kritinė reikšmė
10. IF $(ZZZ > chis)$

    10.1. RETURN 0.0;

11. ELSE

    11.1. RETURN 1.0. ■

Algoritmas 19 Mišriojo modelio patikimumo tyrimas

■*Tikslas*: naudojant Koutrouvelis suderinamumo testą nustatyti ar duotoji seka $x5$ yra pasiskirsčiusi pagal mišrųjį stabilųjį dėsnį su parametrais $x1$ ir nenulinės grąžos tikimybe $p1$;

Įėjimo parametrai: $p1$ (realusis skaičius iš intervalo $[0, ..., 1]$) tikimybė įgyti nenulinę reikšmę, $x5$ ($ns1$ matis realių skaičių masyvas) seka kurios suderinamumas tikrinamas, $ns1$ (sveikasis skaičius) sekos ilgis, $x1$ (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų rinkinys, kt (sveikasis skaičius) – nenaudojamas;

Išėjimo parametrai: grąžinamas tik testo rezultatas (0 – suderinamumo hipotezė atmesta arba 1 – suderinamumo hipotezė neatmesta);

Naudojama atmintis: papildoma atmintis reikalinga saugoti tarpiniams rezultatams (naudojama speciali klasė Matrix): m ilgio realių skaičių masyvas, trys $2m$ ilgio realių skaičių masyvai ir dvi realių skaičių matricos $2m \times 2m$;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo intervalų skaičiaus ir sekos ilgio;

Aprašymas:

- skaitom parametru vektorių xc ir tikimybe $p1$;
- $x5 = generavimas(xc, nn1, p1)$;
- rusiuojam $x5 = bubbleSort(x5, nn1)$;

- skaičiuoju romanovskio ir koutrouvelio testus su pradiniais parametrais xc:
  - $krit0[3] = romanovski(1.0, x5, nn1, xc)$;
  - $krit0[4] = koutrouvelis(1.0, x5, nn1, xc, 1)$;
- parenkam pradinius optimizavimo taškus $xc1$;
- surandam optimalius parametrus $xmtm = kintmetr(xc1, x5, nn, nn1)$;
- skaičiuoju romanovskio ir koutrouvelio testus pilnai sekai su įvertintais parametrais $xmtm$:
  - $krit4[3] = romanovski(1.0, x5, nn1, xmtm)$;
  - $krit4[4] = koutrouvelis(1.0, x5, nn1, xmtm, 1)$;
- šalinam iš sekos nulius $xx5 = nuliu\_salinimas(x5, nn1, ntp)$;
- skaičiuoju romanovskio ir koutrouvelio testus sekai be nuliu su įvertintais parametrais $xmtm$:
  - $krit2[3] = romanovski(nul/nn1, x5, nn1, xc)$;
  - $krit2[4] = koutrouvelis(nul/nn1, x5, nn1, xc, 1)$;
- parenkam pradinius optimizavimo taškus $xboot$;
- surandam optimalius parametrus $xmom = kintmetr(xboot, x5, nn, nn1)$;
- skaičiuoju romanovskio ir koutrouvelio testus sekai be nuliu su įvertintais parametrais $xmom$:
  - $krit1[3] = romanovski(nul/nn1, x5, nn1, xmom)$;
  - $krit1[4] = koutrouvelis(nul/nn1, x5, nn1, xmom, 1)$;
- savirankos metodu tikriname kiek kartu iš bandymus romanovskio ir koutrouvelio testai atpažįsta mišriąsias sekas:
- FOR $i = 0$ TO *bandymus* DO
  - $xboot = generavimas(xmom, nn1, (double)nul/nn1)$;
  - $chi+ = romanovski((double)nul/nn1, xboot, nn1, xmom)$;
  - $chis+ = romanovski(1.0, xboot, nn1, xmtm)$;
  - $koutr+ = koutrouvelis((double)nul/nn1, xboot, nn1, xmom, 1)$;
  - $koutr1+ = koutrouvelis(1.0, xboot, nn1, xmtm, 1)$;

  Algoritmas: nepateikiamas. ■

3.4.3. Mišrusis modelis esant priklausomoms grąžų būsenoms

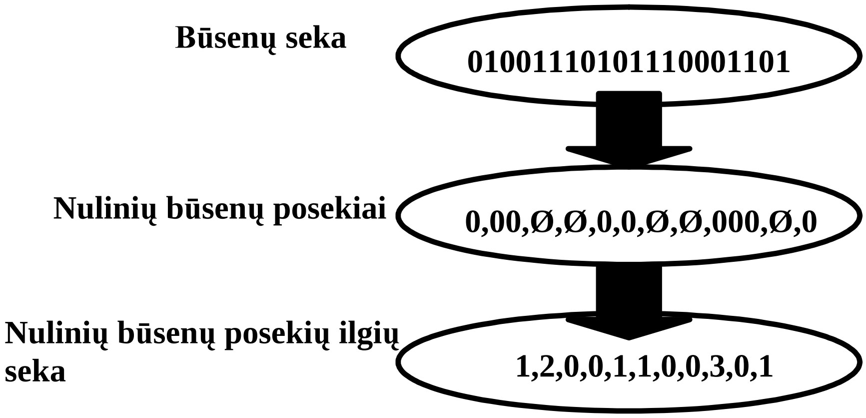
Įvesdami mišrųjį modelį mes laikėme, kad grąža yra nulinė su tikimybe p ir nenulinė (stabilioji, Gauss'o ir t.t.) su tikimybe $1 - p$. Nenulinę būseną indukuoja vienetinė reikšmė $X_i = 1$, o jos tikimybė yra $1 - p$. Akivaizdu, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal binarinį dėsnį. Kai bendroji seka yra binarinė, tai nulinių būsenų sekų ilgiai yra pasiskirstę pagal geometrinį dėsnį. Deja, praktikoje viskas yra gerokai sudėtingiau.

Analizės metu akcijų kainas keičiame ne grąžomis, o tam tikru būsenos indikatoriumi (diskretus a.d.):

$$X_i = \begin{cases} 0, \text{ jei } P_{i+1} = P_i, \\ 1, \text{ jei } P_{i+1} \neq P_i, \end{cases}$$

kur $\{P_i\}$ yra akcijų kainų seka.

Apibrėžimas. Serija laikoma nuliukų (vienetukų) seka tarp dviejų vienetukų (nuliukų). Pirmoji serija – tai nuliukų (vienetukų) seka iki pirmojo vienetuko (nuliuko), o paskutinioji – po paskutinio. Serijos ilgis tai nuliukų (vienetukų) skaičius tarp dviejų vienetukų (nuliukų). Jei tarp dviejų vienetukų (nuliukų) nėra nuliukų (vienetukų) tai tokia tuščia serija yra nulinio ilgio.



Paveikslas 3.24: Nulinių būsenų posekių ilgių sekos sudarymo schema

Paveiksle 3.24 pateikta duomenų transformavimo iš būsenų indikatorių į nulinių (vienetinių) būsenų posekių ilgių seką schema. Tam iš būsenų sekos (pvz. 01001110101110001101...) buvo išskirtos nulinių (vienetinių) būsenų serijos (pvz. 0,00,0,0,000,0...) ir sudarytos šių serijų ilgių sekos (1 2 0 0 1 1 0 0 3 0 1 ...). Tuomet vertiname šių sekų parametrus, reikalingus kiekvienam iš toliau minimų dėsnių apibūdinti ir tikriname neparametrinę χ^2 suderinamumo hipotezę apie pasiskirstymo dėsnį su atitinkama pasiskirstymo funkcija.

Toliau pateikiamas disertacijoje naudotų diskrečiųjų dėsnių aprašymas ir jų parametrų įverčiai arba metodai kaip juos rasti.

Geometrinis skirstinys Šio dėsnio tikimybės apskaičiuojamos pagal formulę

$$P\left(\xi = k\right) = \left(1 - p\right) p^k,$$

čia $k = 1, 2, 3, \ldots$, $0 < p < 1$. Parametro p įvertį randame iš $\hat{p} = \frac{M\xi}{M\xi+1}$, čia $M\xi$ – a.d. ξ vidurkis.

Apibendrintas logaritminis skirstinys Šio dėsnio tikimybės apskaičiuojamos pagal formulę

$$P\left(\xi = k\right) = c_{p,m} \cdot \frac{p^k}{k+m},$$

čia $c_{p,m} = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{p^i}{i+m}\right)^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 0 < p < 1$. Parametrai p ir m randami didžiausio tikėtinumo metodu.

Puasono skirstinys Šio dėsnio tikimybės apskaičiuojamos pagal formulę

$$P\left(\xi = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

čia $k = 1, 2, 3, \ldots, \lambda > 0$. Parametro λ įvertį randame iš $\hat{\lambda} = M\xi$, čia $M\xi$ – a.d. ξ vidurkis.

Apibendrintas Puasono skirstinys Šio dėsnio tikimybės apskaičiuojamos pagal formulę

$$P\left(\xi = k\right) = b_{\lambda,m} \frac{\lambda^k}{\Gamma\left(k + \mu + 1\right)},$$

čia $b_{\lambda,m} = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\Gamma(i+\mu+1)}\right)^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, $0 < \lambda < 1$, $\mu > 1$. Parametrai λ ir μ randami didžiausio tikėtinumo metodu.

Hurwitz dzeta skirstinys Šio dėsnio tikimybės apskaičiuojamos pagal formulę

$$P\left(\xi = k\right) = \nu_{s,q} \frac{1}{\left(k + q\right)^s},$$

čia , $\nu_{s,q} = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+q)^s} \right)^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, q > -1$. Parametrai s ir q randami didžiausio tikėtinumo metodu.

Apibendrintas Hurwitz dzeta skirstinys Šio dėsnio tikimybės apskaičiuojamos pagal formulę

$$P(\xi = k) = d_{\lambda,s,q} \frac{\lambda^k}{(k+q)^s},$$

čia $d_{\lambda,s,q} = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i+q)^s} \right)^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, $q > -1$, $0 < \lambda < 1$. Parametrai λ, s ir q randami didžiausio tikėtinumo metodu.

Diskretus stabilusis skirstinys Yra pasiūlytas [27] ir yra gana įdomus savo savybėmis. Šio dėsnio tikimybės apskaičiuojamos pagal formulę

$$P(\xi = k) = (-1)^k e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{k} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \binom{\gamma j}{k} (-1)^j \frac{\lambda^m}{m!},$$

čia $k = 1, 2, 3, \ldots$, $\gamma \in [0, 1)$. Parametrai λ ir γ randami didžiausio tikėtinumo metodu.

3.4.3.1. Teorinis suderinamumo testų patikimumo nustatymas

Kad įsitikinti ar χ^2 testas atskiria geometrinį dėsnį nuo kitų buvo atliktas teorinis tyrimas. Buvo generuojamos binominės sekos ($n = 2000$ ilgio) su skirtingomis įvykio pasirodymo tikimybėmis $(0.1 - 0.9)$. Iš pradžių vertinome parametrus reikalingus aprašyti duomenis pagal 3.4 skyrelyje minimus pasiskirstymo dėsnius ir tikrinome neparametrinę χ^2 suderinamumo hipotezę. Lentelėse 3.4 ir 3.5 pateikiami šio eksperimento rezultatai (su atitinkamais pasikliovimo lygmenis 0.025 ir 0.05) suvidurkinti pagal atitinkamą būsenos pasirodymo tikimybę.

3.4. Lentelė. χ^2 testo patikimumo tyrimas (pasikliovimo lygmuo 0.025)

Nenulinės būsenos tikimybės	Hurwitz	Hurwitz apibendrintas	log	Apibendrintas log	Diskretusis stabilus	Puason	Apibendrintas Puason	Geometrinis
0.1	1	1	0	1	0	0	0.7	1
0.2	1	1	0	1	0.1	0	1	1
0.3	1	1	0	1	0.1	0	1	1
0.4	0.8	0.9	0.3	0.8	0.2	0	0.9	1
0.5	1	0.8	0.6	1	0.4	0	0.9	1
0.6	1	0.9	0.7	1	0.8	0	1	1
0.7	0.9	0.9	1	0.9	0.8	0.4	0.9	0.9
0.8	1	1	1	1	1	0.8	1	1
0.9	1	1	1	1	1	1	1	1
Vidurkis	96.67%	94.44%	51.11%	96.67%	48.89%	24.44%	93.33%	98.89%

3.5. Lentelė. χ^2 testo patikimumo tyrimas (pasikliovimo lygmuo 0.05)

Nenulinės būsenos tikimybės	Hurwitz	Hurwitz apibendrintas	log	Apibendrintas log	Diskretusis stabilus	Puason	Apibendrintas Puason	Geometrinis
0.1	0.9	0.9	0	0.9	0	0	0.6	0.9
0.2	1	0.9	0	0.9	0	0	1	1
0.3	0.9	1	0	0.9	0.1	0	1	1
0.4	0.8	0.8	0.3	0.8	0	0	0.9	0.8
0.5	0.8	0.8	0.4	0.8	0.4	0	0.8	1
0.6	0.8	0.8	0.6	0.8	0.7	0	0.9	1
0.7	0.9	0.9	1	0.9	0.8	0.3	0.9	0.9
0.8	1	1	1	1	1	0.8	1	1
0.9	1	1	1	1	1	1	1	1
Vidurkis	90.00%	90.00%	47.78%	88.89%	44.44%	23.33%	90.00%	95.56%

Galima pastebėti, kad geometrinis modelis akivaizdžiai atskiriamas geriausiai. Šio eksperimento rezultatai parodė, kad χ^2 suderinamumo hipotezė yra tinkama ir patikimai atskiria diskrečiuosius dėsnius vieną nuo kito.

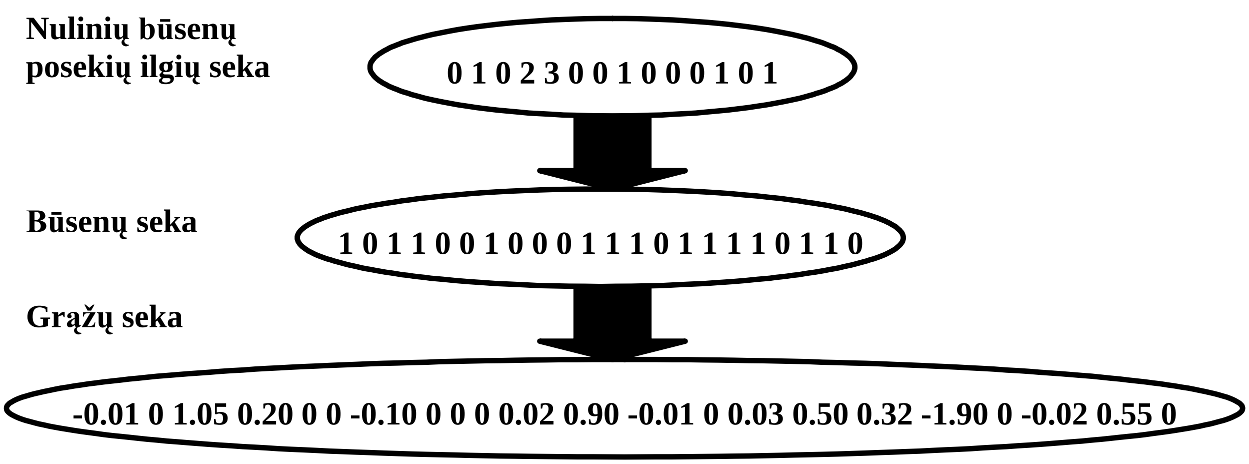
3.4.3.2. Mišriojo stabiliojo modelio sudarymas, esant priklausomoms būsenoms

Jei statistiniais metodais nustatoma, kad būsenų (0;1) sekos nėra atsitiktinės (priedas B.3) tai gali būti, kad tikimybė būti būsenoje i priklauso nuo to kurioje sekos vietoje ji yra. Jei būsenų sekų ilgiai yra pasiskirstę pagal Hurwitz dzeta dėsnį (tai patvirtina empiriniai tyrimai), tai būsenų tikimybės gali būti apskaičiuojamos pagal formulę:

$$P\left(X_n = 1 | \ldots, X_{n-k-1} = 1, X_{n-k} = 0, \ldots, X_{n-1} = 0\right) = \frac{p_k}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} p_j}, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_{\nvdash},$$

$$P(X_n = 1 | \ldots) = 1 - P(X_n = 0 | \ldots), \qquad n, k \in \mathbb{Z}_{\nvdash},$$

čia p_k yra Hurwitz dėsnio tikimybės, o $P(X_0 = 1) = p_0$.



Paveikslas 3.25: Mišriojo dėsnio realizacijos modeliavimo schema.

Žinodami būsenų tikimybes ir nenulinių grąžų pasiskirstymo dėsnį, jau galime generuoti grąžų sekas homogeniškas su pradinėmis sekomis (pakeisdami būsenų sekos vienetukus stabiliaisiais a.d.). Generavimo pavyzdžiu gali būti schema (pav. 3.25). Taigi stabiliojo mišriojo modelio su priklausomomis būsenomis sudarymas yra bendresnis ir platesnis nei stabilusis mišrusis (Bernulio tipo) modelis. Šiuo atveju reikia įvertinti tiek stabiliojo $(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ tiek ir Hurwitz dzeta $(q,\ s)$ dėsnių parametrus.

Algoritmas 20 Stabiliųjų mišriųjų atsitiktinių dydžių generavimas $generavimas2(par, n, p)$

■ *Tikslas*: sugeneruoti n ilgio stabiliųjų atsitiktinių dydžių, su parametrais par, seką, kai tikimybė įgyti nulinę reikšmę lygį p.

Įėjimo parametrai: par (keturmatis realių skaičių masyvas) – stabilieji parametrai, n (sveikasis skaičius) generuojamos sekos ilgis, p (realusis skaičius iš intervalo $[0, ..., 1]$) tikimybė a.d. įgyti nulinę reikšmę

Išėjimo parametrai: X (n matis realių skaičių masyvas) – stabilioji mišrioji seka;

Naudojama atmintis: papildomos atminties nenaudoja (atmintis reikalinga tik pačiai sekai saugoti);

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio n (yra atliktas tyrimas, kaip priklauso laikas nuo n);

Aprašymas:

1. Kadangi generuojamas atsitiktinis dydis išreiškiamas per dvi konstantas C ir D kurios priklauso tik nuo $\alpha = par[0]$ ir $\beta = par[1]$, tai šias konstantas pirmiausiai ir apskaičiuojame $C = \arctan \frac{b \tan(\pi\alpha/2)}{\alpha}$, $D = \left(1 + (\beta \tan(\pi\alpha/2))^2\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$;
2. Generuojame i-tąjį a.d. sekos narį $X[i]$:
   - 2.1. Generuojame tolygiai intervale $(0, 1)$ pasiskirsčiusį a.d. pm, jei $pm > p$, tai $X[i] = 0$;
   - 2.2. Priešingu atveju ($pm < p$), tai
     - 2.2.1. generuojame du a.d., V – tolygiai pasiskirstęs intervale $(-\pi/2;\pi/2)$ ir W – pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį;
     - 2.2.2. skaičiuojame $Y = D \cdot \frac{\sin(\alpha(V+C))}{\cos^{\frac{1}{\alpha}}(V)} \cdot \left(\frac{\cos(V-\alpha(V+C))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$;
     - 2.2.3. gauname $X[i]$: $X[i] = par[3]Y + par[2]$;
3. n kartų kartojame 2-ąjį punktą;

Algoritmas:

1. $C = \arctan(b \cdot \tan(pi \cdot a/2))/a$;
2. $D = (1 + (b \cdot \tan(pi \cdot a/2))^2)^{1/(2 \cdot a)}$;
3. FOR $i = 0$ TO N DO
   - 3.1. $pm = RAND()$;
   - 3.2. IF (pm<p) THEN
     - 3.2.1. $V = (RAND() \cdot pi) - (pi/2)$;
     - 3.2.2. $W = -\ln(RAND())$;
     - 3.2.3. $Y = |\cos(V - a \cdot (V + C))/W|^{(1-a)/a} \cdot D \cdot \sin(a \cdot (V + C))/ |\cos(V)|^{(1/a)}$;
     - 3.2.4. $X[i] = Y \cdot par[3] + par[2]$;
   - 3.3. ELSE $y[i] = 0.0$;
   - 3.4. $i + +$;
4. RETURN X; ■

3.5. Daugiamačiai finansinių sekų modeliai

3.5.1. Ryšio tarp atskirų akcijų grąžų nustatymas

Ryšio tarp atskirų akcijų grąžų nustatymas yra viena iš esminių problemų kylančių formuojant vertybinių popierių portfelį. Klasikinėje ekonomikoje ir statistikoje (kai empiriniai duomenys turi pirmąjį ir antrąjį momentus) ryšį tarp dviejų atsitiktinių dydžių (grąžų) apibrėžia kovariacija arba koreliacija. Laikantis akcijų grąžų (a.d.) stabilumo prielaidos kovariacijos ir koreliacijos (Pirsono koreliacijos koeficientas) skaičiuoti negalima, kai stabilumo parametras α atitinkamai mažesnis už 1 ir už 2, nes tuomet atitinkamai neegzistuoja vidurkis ir dispersija. Tokiais atvejais turėtų tikti ranginiai koreliacijos koeficientai (pvz. Spirmeno, Kendalo ir pan. [85]) arba taip vadinamas kontingencijos ([74, 75],p.175) koeficientas, kuris parodo ar sekos elgiasi panašiai ar ne. Nors ryšį tarp atskirų grąžų sekų jie apibūdina gana neblogai, bet deja portfelio teorijoje jie mažai naudingi. Samorodnitsky ir Taqqu [133] siūlo neblogą alternatyvą, kai neegzistuoja pirmieji momentai (vidurkis, dispersija). Jie įveda du kovariacijos (angl. *covariance*) pakaitalus kovariantiškumą (angl. *covariation*), kodiferenciją (angl. *codifference*). Jei X_1 ir X_2 yra simetriniai stabilieji a.d. su vienodais parametrais α, tai kovariantiškumas apibrėžiama taip

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int\limits_{S_2} s_1 s_2^{\langle\alpha-1\rangle}\Gamma(\mathrm{d}s). \tag{3.17}$$

Tuomet a.d. X_1 skalės parametras $\sigma^\alpha_{X_1}$apskaičiuojamas iš formulės

$$[X_1, X_1]_\alpha = \sigma^\alpha_{X_1},$$

čia $\alpha > 1$, $y^{\langle\alpha\rangle} = |y|^\alpha \operatorname{sign}(\alpha)$, Γ – atsitiktinio vektoriaus (X_1, X_2) spektrinis tankis. Kaip $\alpha = 2$

$$[X_1, X_2]_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$$

ir $[X_1, X_1]_2 = \sigma^2_{X_1}$yra a.d. X_1 dispersija. Tuomet galime apibrėžti tam tikrą atsitiktinių dydžių $X \in S_\alpha$ $(\alpha > 1)$ kovariantiškumo normą

$$\|X\| = ([X, X]_\alpha)^{1/\alpha} \tag{3.18}$$

ir, jei $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, tai norma sutampa su skalės parametru $\|X\|_\alpha = \sigma$. Tuo tarpu kodiferencija (angl. *codifference*) bendru atveju apibrėžiama per charakteristines funkcijas [108]:

$$\begin{aligned}\mathrm{cod}_{X,Y} = {} & \ln(\mathbf{E}\exp\mathrm{i}(X-Y)) - \ln(\mathbf{E}\exp\mathrm{i}X) - \ln(\mathbf{E}\exp(-\mathrm{i}Y)) \qquad (19)\\ = {} & \ln\left(\frac{\mathbf{E}\exp(\mathrm{i}(X-Y))}{\mathbf{E}\exp(\mathrm{i}X)\cdot\mathbf{E}\exp(-\mathrm{i}Y)}\right) = \ln\left(\frac{\phi_{X-Y}}{\phi_X\cdot\phi_{-Y}}\right),\end{aligned}$$

bei empirines charakteristines funkcijas

$$\mathrm{cod}_{X,Y} = \ln\left(\frac{n\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(X_j-Y_j)}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}X_j}\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Y_j}}\right).$$

Dviejų simetrinių ($S\alpha S$) a.d. X ir Y $(0 < \alpha \leqslant 2)$ kodiferencija yra apibrėžiama remiantis skalės parametrais

$$\mathrm{cod}_{X,Y} = \|X\|^\alpha_\alpha + \|Y\|^\alpha_\alpha - \|X-Y\|^\alpha_\alpha. \tag{3.20}$$

Kai $\alpha = 2$, tai $\mathrm{cod}_{X,Y} = \mathrm{Cov}(X, Y)$. Samorodnitsky ir Taqqu [133] parodo, kad galioja

$$\left(1 - 2^{\alpha-1}\right)\left(\|X\|^\alpha_\alpha + \|Y\|^\alpha_\alpha\right) \leqslant \mathrm{cod}_{X,Y} \leqslant \|X\|^\alpha_\alpha + \|Y\|^\alpha_\alpha,$$

čia $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, tuomet sunormavę abi puses (padalinę iš $\|X\|^\alpha_\alpha + \|Y\|^\alpha_\alpha$), gausime koreliacijos koeficientą

$$\left(1 - 2^{\alpha-1}\right) \leqslant \mathrm{corr}_{X,Y} \leqslant 1.$$

Bendru atveju

$$\left(1-2^{\alpha-1}\right)\ln\left(\frac{1}{\mathbf{E}\exp(\mathrm{i}X)\cdot\mathbf{E}\exp(-\mathrm{i}Y)}\right) \leqslant \operatorname{cod}_{X,Y}=\ln\left(\frac{\mathbf{E}\exp(\mathrm{i}(X-Y))}{\mathbf{E}\exp(\mathrm{i}X)\cdot\mathbf{E}\exp(-\mathrm{i}Y)}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{\mathbf{E}\exp(\mathrm{i}X)\cdot\mathbf{E}\exp(-\mathrm{i}Y)}\right), \tag{3.21}$$

tuomet sunormavę gausime, kad koreliacija tenkina sistemą

$$\left(1-2^{\alpha-1}\right) \leqslant \operatorname{corr}_{X,Y}=\ln\left(\frac{\mathbf{E}\exp(\mathrm{i}X)\cdot\mathbf{E}\exp(-\mathrm{i}Y)}{\mathbf{E}\exp(\mathrm{i}(X-Y))}\right)/\ln\left(\mathbf{E}\exp(\mathrm{i}X)\cdot\mathbf{E}\exp(-\mathrm{i}Y)\right) \leqslant 1. \tag{3.22}$$

Kai $\alpha=2$, $\beta=0$, tuomet

$$-1 \leqslant \operatorname{corr}_{X,Y}=\rho_{X,Y} \leqslant 1$$

sutampa su Pirsono koreliacijos koeficientu, o kai $0<\alpha\leqslant 1$, tai šis koreliacijos koeficientas gali būti tik neneigiamas.

3.5.2. Apibendrintos kovariacijos reikšmingumas

Nėra sukurta testų, kurie leistų patikrinti hipotezę apie normuotos kodiferencijos lygybę nuliui, tad hipotezei tikrinti taikome savirankos (angl. *bootstrap method*) metodą (vieną iš Monte Karlo tipo metodų)[62].

Norėdami nustatyti, ar Pirsono koreliacijos koeficientas lygus nuliui, naudojame Fišerio skirstinį, Spirmeno –atitinkamai Stjudento [75], o Kendalo [74] – statistiką, kuri pasiskirsčiusi pagal Gauss'o dėsnį [85]. Tikrinant hipotezę apie normuotos kodiferencijos ar apibendrintos koreliacijos koeficiento lygybę nuliui iškyla teorinių problemų. Todėl siūlomas toks algoritmas:

1. įvertiname visų empirinių sekų stabiliojo dėsnio parametrus (α, β, σ and μ) ir stagnavimo tikimybę p;
2. sudarome atitinkamo (normuotos kodiferencijos ar kovariantiškumo) ryšio matricą ρ, kiekvienai iš akcijų porų;
3. butstapo metodu tikriname hipotezę apie $\rho_{i,j}$ lygybę nuliui:
   3.1. poromis i ir j generuojame sekas (su įvertintais parametrais), pereiname į paskesnį punktą;
   3.2. k-tąjį kartą įvertiname ryšio koeficientą $\rho_{i,j}^{k}$, tarp sekų i ir j;
   3.3. grįžtame į prieš tai buvusi punktą 3.1 ir 3.2, ir kartojame $k=1...\ N$ (pvz. 10000) kartų;
   3.4. sudarome gautų įverčių variacinę eilutę $\rho_{i,j}^{(k)}$;
   3.5. jei $\rho_{i,j}^{([N\cdot 0{,}025])} \leq \rho_{i,j} \leq \rho_{i,j}^{([N\cdot 0{,}975])}$, tai hipotezės apie $\rho_{i,j}$ lygybę nuliui atmesti negalime su pasikliovimo lygmeniu 0,05, t.y. sakoma, kad $\rho_{i,j}=0$.
   3.6. kiekvienai akcijų sekų porai i ir j kartojame 3.1–3.5 žingnius.

3.6. Portfelio parinkimas

Sudarykime vertybinių popierių portfelį iš n akcijų. Kiekvienos akcijos svoriui įvertinti sprendžiame optimizavimo uždavinį (Barami [8], Krokhmal, Palmquist, Uryasev [86]):

$$\begin{gathered}\text{minimizuoti } \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varpi_i\varpi_j\sigma_{ij}-(1-\lambda)\sum_{i}^{n}\varpi_i\mu_i \\ \text{pagal } \varpi_{\mathrm{i}},\ i=1,\ldots,n, \\ \text{su salygomis: } \sum_{i}^{n}\varpi_i=1, \varpi_i>0,\ i=1,\ldots,n;\end{gathered} \tag{23}$$

čia ϖ_i i-tosios akcijos svoris portfelyje, μ_i – i-osios akcijos grąžų sekos vidurkis (α-stabiliuoju atveju parametras μ), σ_{ij} – kovariacija tarp i-osios ir j-osios akcijos grąžų (α-stabiliuoju atveju kovariacijos atitikmuo – kodiferencija), $\lambda\in[0,1]$ yra optimizavimo konstanta (parenkame 1/2).

Pirmoji tikslo funkcijos dedamoji charakterizuoja riziką, o antroji tikėtiną grąžą.

Kadangi α-stabilaus modelio atveju neegzistuoja nei dispersija, nei standartinis nuokrypis, taip pat ir kovariacija (išskyrus $\alpha = 2$), portfelio svoriams optimizuoti gali būti naudojama ir tokia tikslo funkcija (Rachev, Tokat, Schwartz [125]):

$$F(w) = c \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left| \sum_{i=1}^{n} w_i \left(X_{j,i} - \mu_i \right) \right|^{\gamma} \right)^{1/\gamma} - \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i;$$

čia $\gamma = \min(\alpha_i)$, $c = 1/\gamma$, μ_i – atitinkamų vertybinių popierių vidutinės pelno normos (α-stabiliuoju atveju parametras μ), $X_{j,i}$ – i-ojo vertybinio popieriaus pelno norma j-uoju momentu. Toliau sprendžiamas optimizavimo uždavinys:

$$\begin{aligned} &\text{minimizuoti } F(w) \\ &\text{pagal } w_i,\ i = 1, \ldots, n, \\ &\text{su salygomis } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i > 0,\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{24}$$

Į lygčių sistemas (3.23) ir (3.24) įtraukus papildomą sąlygą

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \mu_i = \mu_P,$$

galima rasti optimalų portfelį su norima grąža μ_P.

Sprendžiant (3.23) sistemą didelių optimizavimo problemų neiškyla, net esant n>10 akcijų, tačiau (3.24) sistemos optimizavimas yra sudėtingas, net esant nedideliam akcijų skaičiui. Kartu su svorių optimizavimu svarbu nagrinėti ir portfelio diversifikavimo uždavinį, nes portfelyje esant daugiau ($n > 2$) akcijų neretai svoriai tampa nykstamai maži ir investicija į tokias akcijas tampa beprasmė, o kartais ir neįmanoma (reikia įsigyti pusę akcijos ir pan.).

3.7. 3-o skyriaus išvados

1. Sudaryti statistiniai vienmačių atliktinių sekų tyrimo algoritmai leidžia apskaičiuoti stabiliojo dėsnio tankio funkciją (naudojant aproksimacijas), generuoti atsitiktinių dydžių sekas, įvertinti stabiliųjų sekų parametrus didžiausio tikėtinumo, robastiniais ir empirinės charakteringosios funkcijos metodais.
2. Vertinant stabiliųjų sekų parametrus didžiausio tikėtinumo metodu pastebėta, kad tikslo funkcijos (MTM) reikšmę, o tuo pačiu ir minimumo tašką, stipriai įtakoja parametrų α ir σ pokyčiai, kita vertus MTM(.) funkcija yra mažiau jautri parametrų β ir μ pokyčiams.
3. Atlikti modeliavimai su sugeneruotomis sekomis, parodė, kad parametrų įverčiai gauti didžiausio tikėtinumo, momentų ir regresijos metodais esant didelėms imtims beveik nesiskiria. Tačiau jų efektyvumas yra labai skirtingas. Kaip rodo eksperimentai, didžiausio tikėtinumo metodas duoda geriausius rezultatus (tai patvirtina Andersono–Darlingo suderinamumo testų rezultatai), nors skaičiavimo laiko atžvilgiu jis nėra labai greitas.
4. Pasaulinių kompanijų ar indeksų sekos yra ilgos ir labai ilgos, todėl joms galima taikyti visus statistinius analizės metodus:
   4.1. parametrų vertinimą didžiausio tikėtinumo ir robastiniais metodais;
   4.2. stabilumo savybių tyrimą pagal stabiliųjų dėsnių fundamentaliąją teoremą;
   4.3. visus savastingumo nustatymo metodus.
5. Finansinių sekų multifraktališkumo ir savastingumo nustatymui siūloma taikyti šiuose metodus:
   5.1. baigtinės dispersijos metodą;
   5.2. tiriant pradinės ir agreguotos sekų homogeniškumą;

    5.3. tiriant absoliutinių momentų elgesį.

6. Sudarytas mišrusis stabilusis modelis leidžia tirti pasyvumo efektą besivystančiose rinkose. Įvestos šio modelio tikimybinio tankio, pasiskirstymo bei charakteringosios funkcijos. Pasiūlyti metodai leidžia įvertinti mišriojo modelio parametrus esant priklausomoms ir nepriklausomoms grąžų būsenoms. Laukimų trukmę tarp dviejų akcijos kainos pasikeitimų (nulinių grąžų serijų ilgių pasiskirstymą) siūloma modeliuoti ne binominiu, bet Hurwitz dzeta dėsniu.
7. Aprašytieji ryšio tarp atskirų akcijų grąžų nustatymo metodai leidžia ryšį tarp sekų nustatyti netgi tuo atveju kai neegzistuoja vieno ar kito atsitiktinio dydžio dispersija. Tam siūloma naudoti kovariantiškumo (simetriniams a.d.) ir kodiferencijos matus, kurių reikšmingumą galima nustatyti savirankos metodu.
8. Vertybinių popierių portfeliui sudaryti yra žinoma daug metodų, tačiau darbe, kai duomenys yra iš stabiliosios imties, siūloma naudoti modifikuotą Markowitzo modelį. Šiame modelyje vietoje kovariacijų matricos siūloma naudoti kodiferencijų arba kovariantiškumo matricas, o tai gerokai supaprastina skaičiuojamuosius procesus.

4. Finansinių instrumentų analizės rezultatai

4.1. Duomenų parinkimas ir empirinės charakteristikos

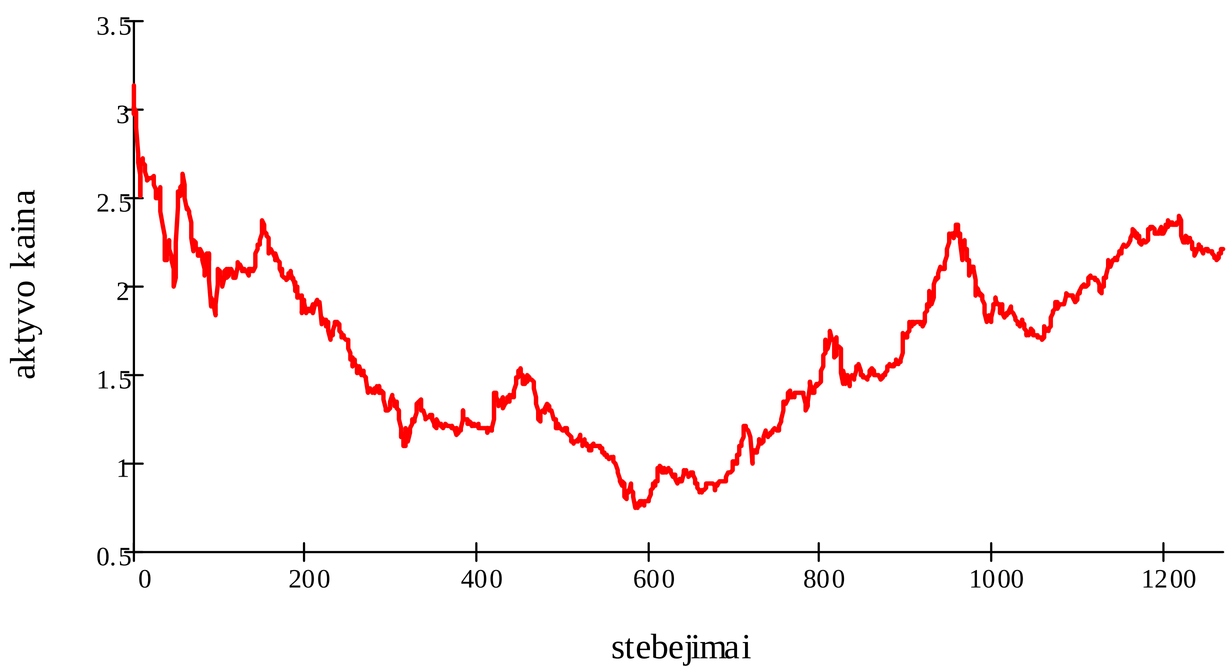
Darbe nagrinėjamos įvairių biržų finansinės sekos (Baltijos šalių – visas oficialus ir visas einamasis sąrašai, iš viso 64 sekos ir tarptautinių kompanijų – iš viso 27 sekos). Duomenys analizei gaunami 2.7 Skyriuje aprašytais metodais. Pasaulinių kompanijų ar indeksų sekos yra ilgos ir labai ilgos (žr. 2.1 Lentelę), todėl joms galima taikyti visus statistinius analizės metodus:

- parametrų vertinimą didžiausio tikėtinumo ir robastiniais metodais;
- stabilumo savybių tyrimą pagal stabiliųjų dėsnių fundamentaliąją teoremą;
- visus savastingumo nustatymo metodus.

Galima pastebėti, kad tarptautinių kompanijų ir indeksų sekų ilgiai yra labai skirtingi: pradedant 1566 (6 metai, NASDAQ) ir baigiant 29296 (107 metai, DJTA). Norint pastebėti dėsningumus arba juos eliminuoti buvo pasirinktos įmonės užsiimančios labai skirtinga veikla. Taipogi jose yra labai nedaug nulinių grąžų, o tai supaprastina suderinamumo ir kitų testų naudojimą.

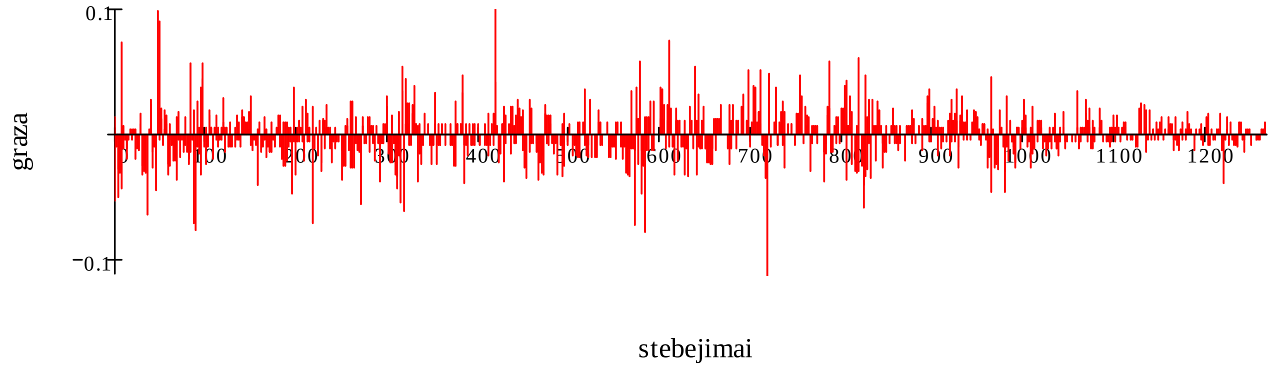
Tuo tarpu Baltijos šalių rinkos yra palyginti jaunos, o duomeų sekos yra trumpos (10–12 metų), iš kurių tik 1500–2000 stebėjimų yra tinkami analizei (žr. 2.2 ir 2.3 Lenteles).

Panagrinėkime konkretų atvejį ir kaip pavyzdį paimkime vieną seką iš Baltijos šalių akcijų rinkos. Šios akcijos kainos kitimo grafikas pavaizduotas 4.1 paveiksle.

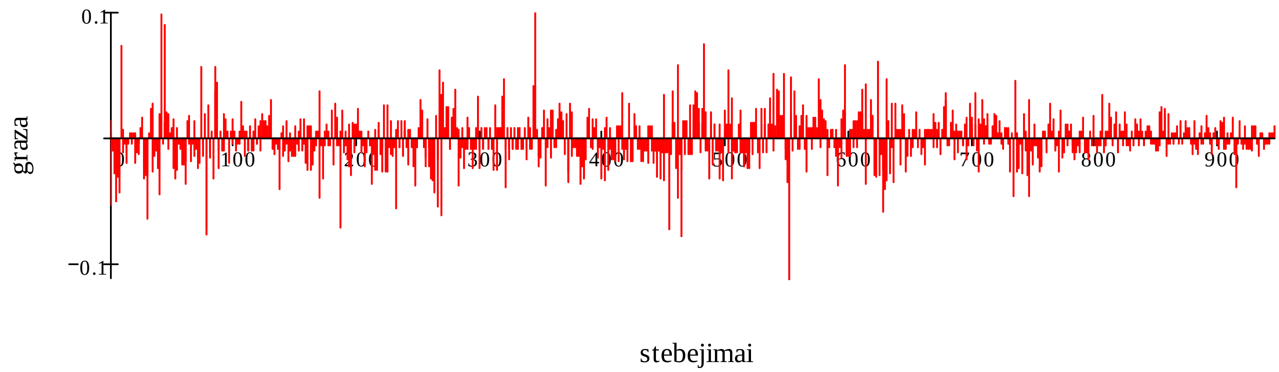


Paveikslas 4.1: Akcijos kainos kitimas priklausomai nuo stebėjimo.

Tuomet atlikę duomenų transformaciją (žr. 2.7.3 skyrių) sudarome seką, kurios savybes tiriame. Kadangi nagrinėjamas besivystančios rinkos finansinis instrumentas tai būtina atsižvelgti į nulinių grąžų įtaką. Sudaroma ne viena, kaip būtų išsivysčiusios rinkos atveju, o dvi sekos (pilna seka ir seka kai pašalintos nulinės grąžos). Pirmoji (pav. 4.2) yra ilgesnė, o antroji (pav. 4.3) trumpesnė, dėl įrašų skaičiaus skirtumo.



Paveikslas 4.2: Nagrinėjamo aktyvo kainų grąžų kitimas (pilna seka).



Paveikslas 4.3: Nagrinėjamo aktyvo kainų grąžų kitimas (seka kai pašalintos nulinės grąžos).

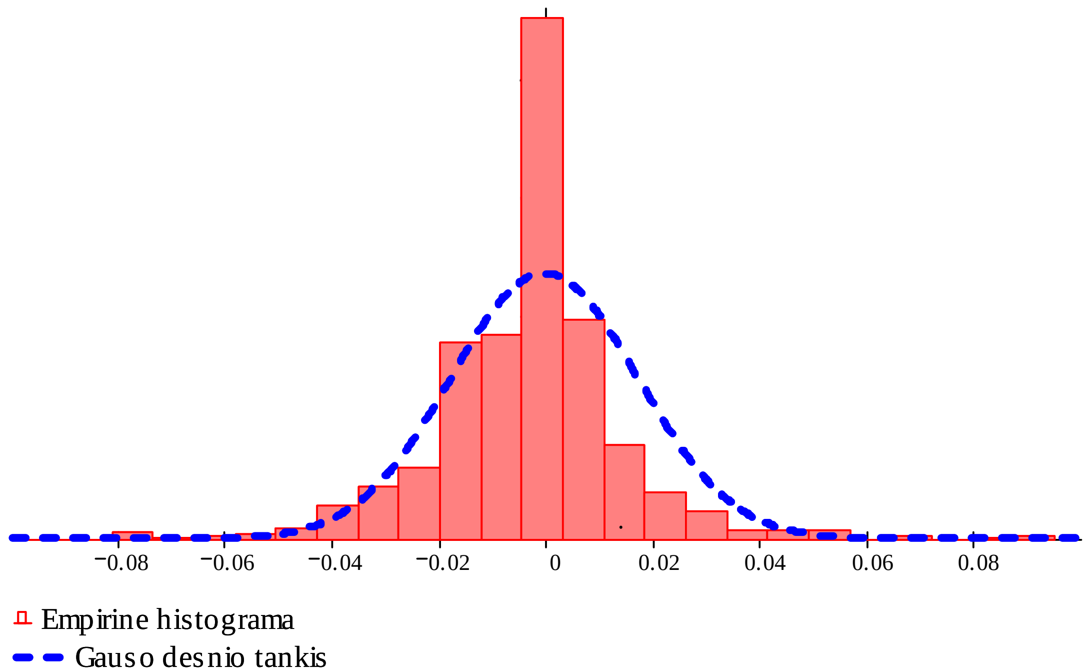
Visoms šioms sekoms įvertiname empirines charakteristikas: vidurkį, dispersiją, asimetriją ir ekscesą (žr. A.1, A.2 ir A.3 Lenteles), kitaip tariant skaičiuojame pirmus keturis momentus. Taip pat šiame etape tikrinamos ir hipotezės apie duomenų pasiskirstymo suderinamumą su normaliuoju Gauss'o dėsniu. Tam skaičiuojamos Andersono–Darlingo statistikos reikšmės.

Dauguma sekų yra stipriai asimetriškos ($0.1 < |\gamma_1| < 30$), o empirinis ekscesas ($\gamma_2 \neq 0$) rodo, kad sekos empirinė tankio funkcija yra smailiaviršūniškenė už Gauss'o tankio funkciją (žr. 4.4 ir 4.5 paveikslus ir A.1, A.2 bei A.3 Lenteles). Vien dėl šių priežasčių galima atmesti hipotezę, kad akcijų kainų grąžų sekos pasiskirstę pagal normalųjį Gauss'o dėsnį.

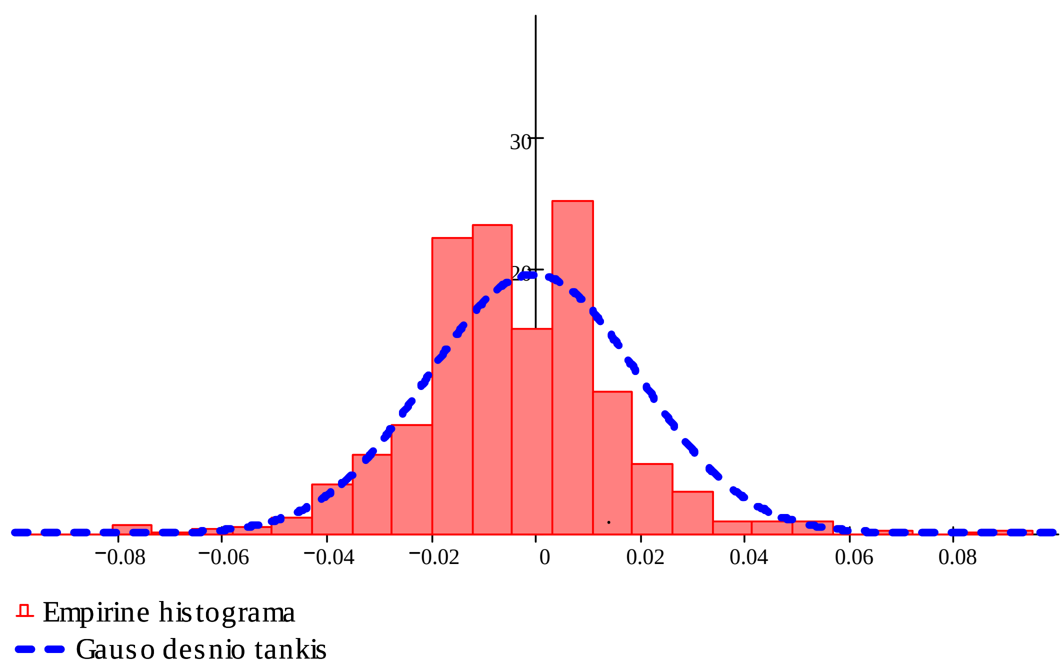
Šią prielaidą sustiprina ir pagrindžia Andersono–Darlingo bei Kolmogorovo–Smirnovo suderinamumo testų, aprašytų priede B.1, rezultatai (žr. A.1, A.2 ir A.3 Lentelių paskutinį stulpelį – „AD krit.").

4.1.1. Realių duomenų paramertų įverčiai

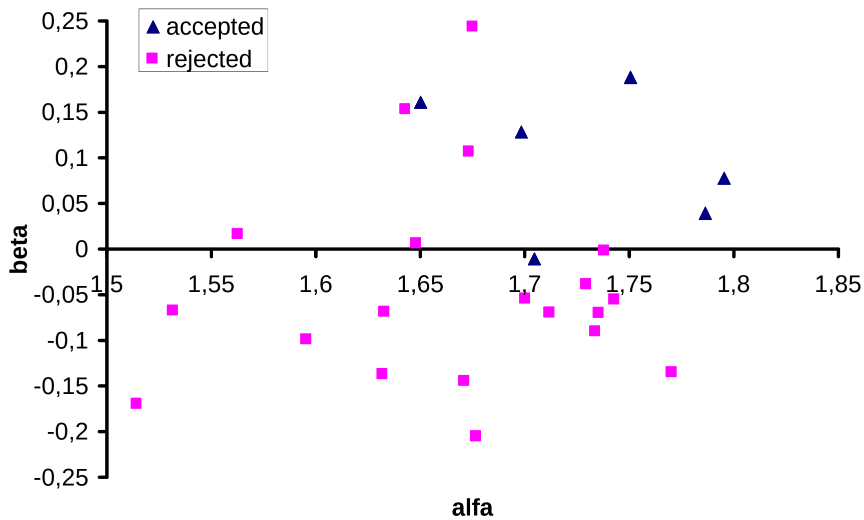
Stabiliųjų sekų parametrų įverčiai pateikti lentelėse A.13, A.14 ir A.15, kuriose tai pat pateikiamos ir Anderson–Darling kriterijaus statistikos reikšmės (tikrinant stabilumą).



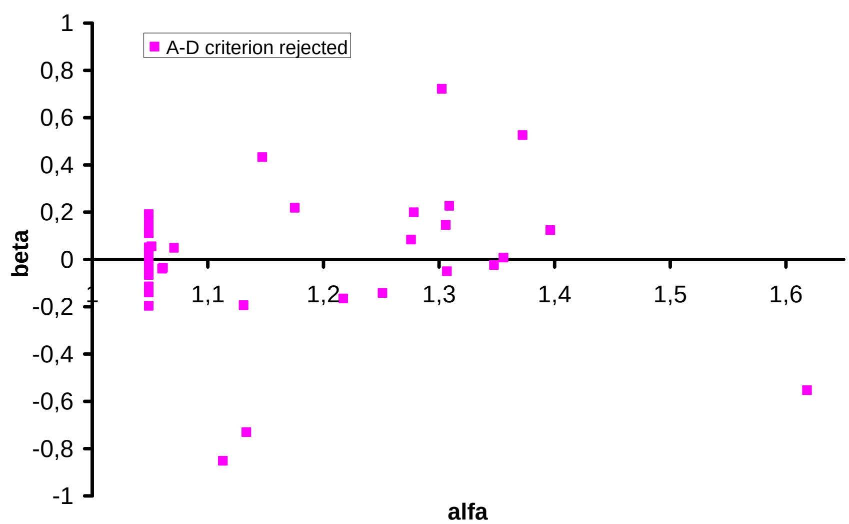
Paveikslas 4.4: Empirinė histograma ir seką atitinkanti Gauso dėsnio tankio funkcija (iš Baltijos šalių biržos, pilna seka).



Paveikslas 4.5: Empirinė histograma ir seką atitinkanti Gauso dėsnio tankio funkcija (iš Baltijos šalių biržos, seka kai pašalintos nulinės grąžos).



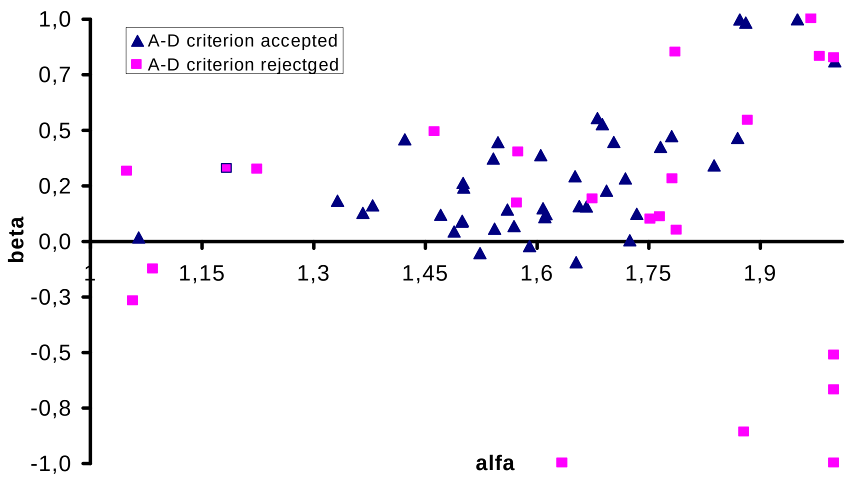
Paveikslas 4.6: Stabilumo parametro α ir asimetrijos koeficiento β išsibarstymas, tarptautinių kompanijų rinkoje.



Paveikslas 4.7: Stabilumo parametro α ir asimetrijos koeficiento β išsibarstymas, Baltijos šalių rinkoje, kai nagrinėjamos pilnos sekos.

Tarptautinių kompanijų finansinių sekų parametrų α ir β įverčių išsibarstymo grafikas 4.6 rodo, kad α dažniausiai yra virš 1,5 ir visada mažesnis už 2. Parametras β šiuo atveju nėra didelis, tačiau dažniau įgyja neigiamas reikšmes, o tai signalizuoja apie galimus nedidelius nuostolius.

Baltijos šalių finansinių sekų (kai iš nagrinėjama pilna seka) parametrų α ir β įverčių išsibarstymo grafikas 4.7 rodo, kad α yra mažesnis už 1,5 ir neretai įgyja reikšmes artimas 1, o parametras β įgyja labai skirtingas reikšmes todėl jokių tendencijų nepastebima.



Paveikslas 4.8: Stabilumo parametro α ir asimetrijos koeficiento β išsibarstymas, Baltijos šalių rinkoje, kai iš sekų pašalintos nulinės grąžos.

Tuo tarpu Baltijos šalių finansinių sekų (kai iš sekų pašalintos nulinės grąžos) parametrų α ir β įverčių išsibarstymo grafikas 4.8 rodo, kad α yra išsibarstęs apie 1,5, tačiau neretai gali įgyti reikšmes artimas 1 ar 2. Parametras β šiuo atveju dažniau įgyja palyginti mažas teigiamas reikšmes, tačiau kai kuriais atvejais gali išaugti iki kritinių reikšmių ($> 0,5$) o tai signalizuoja apie didelius nuokrypius tiek į teigiamą tiek į neigiamą pusę.

4.2. Savastingumas

Savastingumui nustati yra nemažai būdų, keletas iš jų yra aprašyti 3.3 skyriuje. Tačiau praktikoje ne visi jie yra taikytini. Baigtinės dispersijos metodas yra būtent toks, nes yra sudėtinga parodyti, kad seka (3.12) konverguoja (ypač kai duomenų yra nedaug). Šiame darbe savastingumui, o tuo pačiu ir multifraktališkumui nustatyti buvo taikomi šie metodai:

1. agreguotų sekų ir visos sekos homogeniškumo nustatymas (netaikomas Baltijos šalių akcijų grąžų sekoms, žr. tolesnį skyrelį 4.2.1);
2. absoliutinių momentų elgesio tyrimas.

Kadangi tarptautinės rinkos ir Baltijos šalių rinka labai skiriasi savo duomenų kiekiais ir struktūra, tai savastingumas ir mulfraktališkumas šiose rinkose buvo nagrinėjamas atskirai.

4.2.1. Sekų homogeniškumo testų patikimumo tyrimas

Homogeniškumo testų aprašytų skyrelyje B.2 patikimumas buvo testuojamas (algoritmai 26 ir 27) modeliuojant fiktyvias finansines sekas, kurios buvo pasiskirstę pagal tolygųjį $R(-1,1)$, Gauss'o $N(0,1/\sqrt{3})$, Koši $C(0,1)$ ir stabilųjį $S_{1.75}(1,0.25,0)$ dėsnius. Dalinės sumos (3.16) buvo normuojamos atitinkamai su $\sqrt{d}$, $\sqrt{d}$, d, $d^{1/1.75}$. Testas buvo pakartotas 100 kartų. Šių eksperimentų apibendrinti rezultatai pateikti lentelėse 4.1–4.8.

Tolygaus dėsnio atveju atsitiktiniai dydžiai X (tikroji seka) ir Y (dalinių sumų seka) yra pasiskirstę pagal skirtingus dėsnius, t.y. jie nėra homogeniški. Akivaizdu (žr. lenteles 4.1 ir 4.2), kad Smirnovo metodas šiuo atveju nehomogeniškas sekas atskiria geriau nei Andersono. Visais kitais atvejais (žr. lenteles 4.3–4.8) atsitiktiniai dydžia X ir Y teoriškai turi būti pasiskirstę pagal tą patį tikimybinį dėsnį (atitinkamai sucentravus ir sunormavus). Iš lentelių 4.3–4.8 galima pastebėti, kad Andersono kriterijus vidutiniškai homogeniškumas sekas atpažįsta geriau nei Smirnovo, o tai reiškia, kad Andersono kriterijus (su pasikliovimo lygmenimis (0.01, 0.05, 0.1)) yra galingesnis už Smirnovo kriterijų su atitinkamu pasikliovimo lygmeniu. Dėl šios priežasties Andersono kriterijus vėlesniuose tyrimuose buvo naudojamas homogeniškumui nustatyti.

Reikia paminėti, kad šie abu kriterijai reikalauja gana didelių imčių (pradinės imties tūris turėtų būti nemažesnis nei 200), todėl pradinės grąžų sekos turi būti dar ilgesnės. Geriausia parinkti tokias sekas, kurių ilgis n ir tokius agregacijos lygis d, tenkina sąlygą $n/d > 200$.

4.2.1.1. Sekų homogeniškumo testų patikimumo eksperimentas

Pažymėjimų lentelėse 4.1–4.8 paaiškiminai:

h – parodo po kiek tikrosios sekos elementų sumuojama sudarant agreguotą seką;
T – imties tūris (tikrosios sekos);
$d = [T/h]$ – dalinės sumos ilgis;
max – maksimali reikšmė lentelėje;
min – minimali reikšmė lentelėje;
vid – vidutinis testo homogeniškumas.

Skaičiai lentelėje rodo kiek kartų iš 100 tikrosios sekos ir agreguotos sekos homogeniškumo hipotezės atmesti negalima. Pasikliovimo lygmuo visais atvejais $p = 0.05$.

4.1. Lentelė. Andersono kriterijaus patikimumo tyrimo rezulatai, kai tikroji seka pasiskirsčiusi pagal tolygųjį dėsnį $R(-1, 1)$

$h\backslash T$	300	400	500	600	700	800	900	1000
5	62	52	28	9	5	2	1	0
10			1	0	0	0	0	0
15						0	0	0
20								0

min	0
max	62
vid	8,89

4.2. Lentelė. Smirnovo kriterijaus patikimumo tyrimo rezulatai, kai tikroji seka pasiskirsčiusi pagal tolygųjį dėsnį $R(-1, 1)$

$h\backslash T$	300	400	500	600	700	800	900	1000
5	0	0	0	0	0	0	0	0
10			0	0	0	0	0	0
15						0	0	0
20								0

min	0
max	0
vid	0

4.3. Lentelė. Andersono kriterijaus patikimumo tyrimo rezulatai, kai tikroji seka pasiskirsčiusi pagal Koši dėsnį $C(0, 1)$

$h\backslash T$	300	400	500	600	700	800	900	1000
5	100	100	100	99	100	99	100	100
10			99	96	97	95	98	100
15						100	97	98
20								95

min	95
max	100
vid	98,5

4.4. Lentelė. Smirnovo kriterijaus patikimumo tyrimo rezulatai, kai tikroji seka pasiskirsčiusi pagal Koši dėsnį $C(0,1)$

$h\backslash T$	300	400	500	600	700	800	900	1000
5	99	97	100	98	99	93	96	97
10			96	97	95	99	96	98
15						96	95	96
20								97

min	93
max	100
vid	96,89

4.5. Lentelė. Andersono kriterijaus patikimumo tyrimo rezulatai, kai tikroji seka pasiskirsčiusi pagal Gauso dėsnį $N(0,1/\sqrt{3})$

$h\backslash T$	300	400	500	600	700	800	900	1000
5	100	100	100	100	100	99	100	100
10			100	100	100	98	100	100
15						100	100	97
20								99

min	97
max	100
vid	99,61

4.6. Lentelė. Smirnovo kriterijaus patikimumo tyrimo rezulatai, kai tikroji seka pasiskirsčiusi pagal Gauso dėsnį $N(0,1/\sqrt{3})$

$h\backslash T$	300	400	500	600	700	800	900	1000
5	100	100	100	99	100	100	100	100
10			97	98	95	98	99	98
15						98	100	96
20								93

min	93
max	100
vid	98,4

4.7. Lentelė. Andersono kriterijaus patikimumo tyrimo rezulatai, kai tikroji seka pasiskirsčiusi pagal stabilųjį dėsnį $S_{1.25}(1,0.5,0)$

$h\backslash T$	300	400	500	600	700	800	900	1000
5	100	100	100	100	100	100	100	100
10			100	96	97	97	98	97
15						96	98	100
20								99

min	96
max	100
vid	98,78

4.8. Lentelė. Smirnovo kriterijaus patikimumo tyrimo rezulatai, kai tikroji seka pasiskirsčiusi pagal stabilųjį dėsnį $S_{1.25}(1,0.5,0)$

$h\backslash T$	300	400	500	600	700	800	900	1000
5	100	95	99	99	100	98	99	98
10			95	99	100	99	100	97
15						96	98	96
20								96

min	95
max	100
vid	98

Kai kurie langeliai lentelėse 4.1–4.8 specialiai yra tušti. Taip yra todėl, kad tiek Andersono tiek ir Smirnovo kriterijai reikalauja, kad sekos ilgis būtų nemažesnis už 50.

4.2.2. Savastingumas išsivysčiusiose finansinėse rinkose

Iš pradžių patikrinsime ar tarptautinių rinkų sekos yra homogeniškos su jų dalinėmių sumų sekomis. Tam taikome 26 algoritmą ir sumuodami po $m_1 = 10$ ir $m_2 = 15$ sekos elementų, pagal Andersono kriterijų tikriname homogeniškumą, bei gauname rezultatus pateiktus lentelėje A.16.

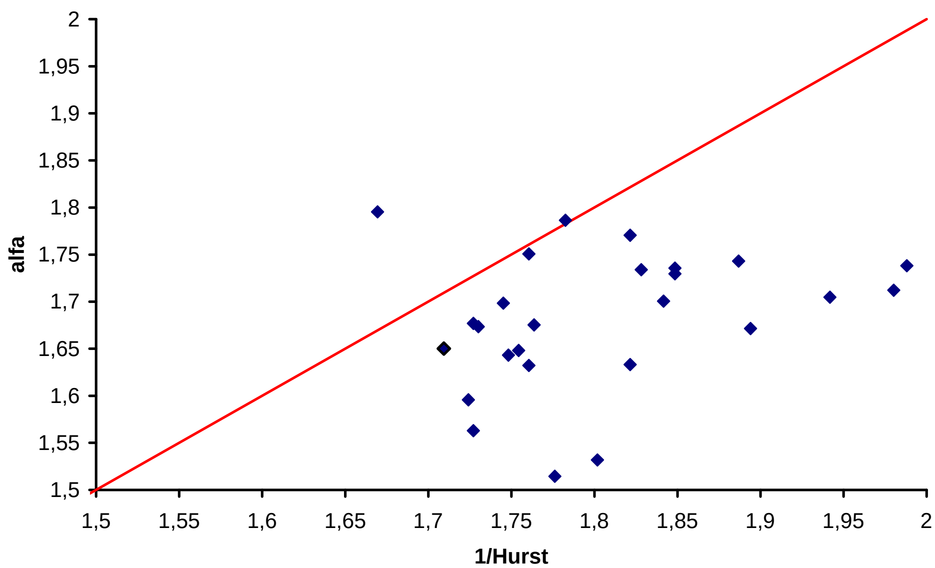
Iš lentelės A.16 galima pastebėti, kad sumuojant po $m_1 = 10$ narių nehomogoneniškos yra tik 5 sekos, o sumuojant po $m_2 = 15$ nehomogoneniškos taip pat yra 5 sekos, iš kurių 4 sutampa ir po vieną nesutampa. Kitaip sakant 21 tarptautinė seka priklauso taip vadinamai stabiliųjų dėsnių traukos zonai ir yra savastingos.

Toliau tikriname savastingumą, pagal skyrelyje 3.3.2 pateiktą algoritmą 15, t.y. tiriame ar tenkinamos (3.14) ir (3.15) sąlygos. Pasinaudodami straipsnyje [12] (49–55 psl.) pateiktais brėžiniais sudarome A.17 lentelę.

Iš lentelės A.17 galima daryti tokį apibendrinimą: tik 9 sekos iš 26 yra savastingos ISPX, AMEX, FCHI, GDAXI, DJC, DJ, DJTA, NIKKEI ir S&P. Visos kitos 17 sekų yra multifraktalinės.

Lentelėje A.18 pateiktos skirtingais metodais apskaičiuotos Hurst indekso reikšmės (aprašymai pateikti 3.3.2 skyriuje). Koreliacijos koeficientas šalia indekso parodo indekso patikimumą, taigi patikimiausiais metodais reikėtų laikyti R/S ir modelio liekanų dispersijos metodus.

Žinodami, kad savastingiems procesams stabilumo indeksas α ir Hurst'o eksponentė H tenkina sąlygą $\alpha = 1/H$ (formulė (2.1)), sudarykime lentelę A.19 su tokiais stulpeliais: R/S metodu (žr. 3.3.2 skyrelį ir [72, 98, 143] literatūros šaltinius) apskaičiuotas Hurst indeksas H, $1/H$, stabilumo parametras α. Patikrinkime ar tikrai tenkinama formulė (2.1). Galima pastebėti (žr. A.19



Paveikslas 4.9: Priklausomybė tarp $1/H$ ir stabilumo parametro α (pasaulinės rinkos)

lentelę), kad indeksai trečiame ir ketvirtame stulpeliuose yra panašūs (teoriškai jie turėtų būti lygūs). Vidutinis absoliutinis skirtumas tarp α ir $1/H$ yra lygus 0,132 (minimumalus 0,004, o maksimalus 0,27). Neatitikimas tarp teorijos ir praktikos ypač išryškėja pažvelgus į 4.9 paveikslą. Teoriškai lentelėje A.19 pateikti taškai turėtų būti išsibarstę apie tiesę $y = x$, tačiau kaip matome taip nėra, o tai reiškia, kad tarptautinių indeksų sekos nėra griežtai stabiliosios (jos nėra $S\alpha S$).

4.2.3. Savastingumas Baltijos šalių rinkose

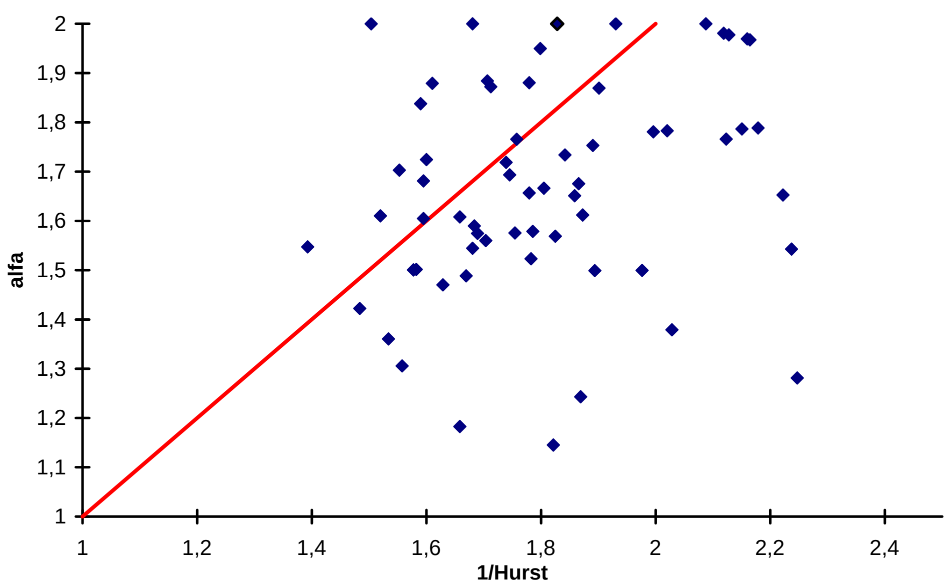
Iš pradžių patikrinsime ar Baltijos šalių sekos yra homogeniškos su jų dalinių sumų sekomis išskirdami atvejus kai pašalintos nulinės grąžos ir tirdami pilnas sekas. Tam taikome 26 algoritmą ir sumuodami po $m = 10$ sekos elementų, pagal Andersono kriterijų tikriname homogeniškumą, bei gauname rezultatus pateiktus lentelėje A.20.

Iš lentelės A.20 matyti, kad abejais atvejais (kai pašalintos nulinės grąžos ir tiriamos pilnos sekos) tik iš ETLAT ir LFO1L pašalinus nulines grąžas, jų akcijų sekos yra homogeniškos su agreguotomis sekomis (sumuojant po $m = 10$). Visais kitais atvejais dalinės sekos nėra homogeniškos su pilnomis sekomis, todėl prielaida, kad jos yra stabiliosios yra labai abejotina.

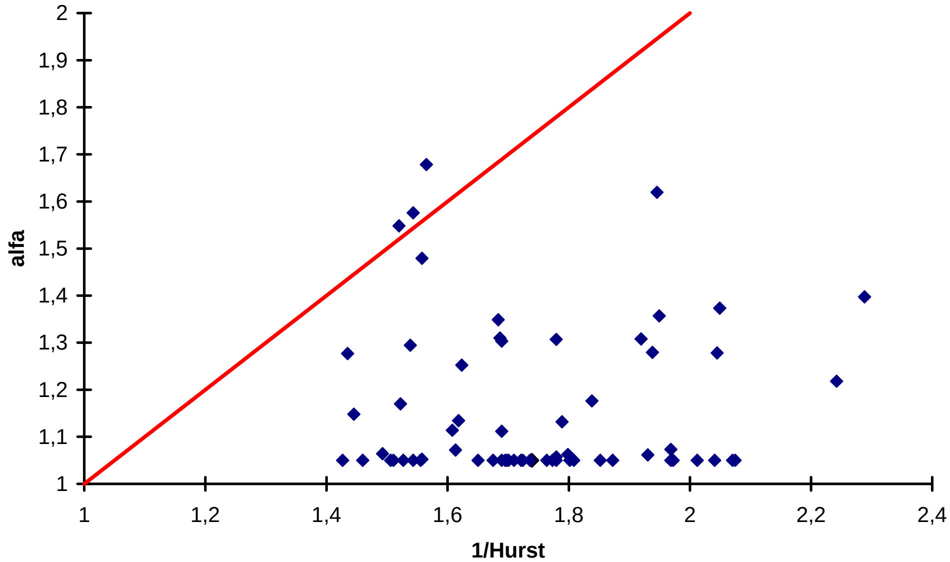
Toliau tikriname savastingumą, pagal skyrelyje 3.3.2 pateiktą algoritmą 15, t.y. tiriame ar Baltijos šalių sekos tenkina (3.14) ir (3.15) sąlygas. Sudarome A.21 ir A.22 lenteles atskirai išskirdami atvejus kai iš sekų pašalintos nulinės grąžos ir kai tiriamos pilnos sekos.

Tačiau apibendrinant.dalinių sekų ir visos sekos homogeniškumo ir absoliutinių momentų tyrimų rezultatus reikia pastebėti, kad savastingų sekų Baltijos šalių rinkose išvis nėra, o iš sekos pašalinus nulines grąžas yra tik viena multifraktalinė seka, visos kitos sekos netenkina reikalavimų keliamų nei savastingoms nei multifraktalinėms sekoms.

Žinodami, kad savastingiems procesams stabilumo indeksas α ir Hurst'o eksponentė H tenkina sąlygą $\alpha = 1/H$ (formulė (2.1)), išskirdami sekas kai pašalintos nulinės grąžos ir tirdami pilnas sekas,.sudarykime lenteles A.23 ir A.24 su tokiais stulpeliais: R/S metodu (žr. 3.3.2 skyrelį ir [72, 98, 143] literatūros šaltinius) apskaičiuotas Hurst indeksas H, $1/H$, stabilumo parametras α. Patikrinkime ar tikrai tenkinama formulė (2.1).



Paveikslas 4.10: Priklausomybė tarp $1/H$ ir stabilumo parametro α (Baltijos šalių rinkos, sekos be nulinių grąžų)



Paveikslas 4.11: Priklausomybė tarp $1/H$ ir stabilumo parametro α (Baltijos šalių rinkos, pilnos sekos)

Teoriškai paveiksluose 4.10 ir 4.11 pateikti taškai turėtų būti išsibarstę apie tiesę $y = x$, tačiau kaip matome taip nėra, o tai reiškia, kad sekos nėra griežtai stabiliosios (jos nėra $S\alpha S$). Galima pastebėti (lentelės A.23 ir A.24, pav. 4.10 ir 4.11), kad atitikimas tarp stabilumo indekso α ir Hurst indekso $1/H$ yra tik kai iš sekų pašalinamos nulinės grąžos.

4.3. Mišriojo-stabiliojo modelio taikymas

Įvertinę finansinių sekų stabiliuosius parametrus (žr. 2.2 ir 2.3 bei A.14 ir A.15 lenteles), turime patikrinti neparametrines suderinamumo hipotezes. Klasikiniu atveju grąžos yra tolydieji a.d. ir suderinamumo testai (Kolmogorovo–Smirnovo ir Andersono–Darlingo) puikiai tinka. Tačiau mišrusis modelis negali būti priskiriamas prie tolydžiųjų. Todėl yra taikomas Koutrouvelio kriterijus, paremtas empirine charakteristine funkcija [80], bei modifikuotas χ^2 (Romanovskio) metodas [75] (žr. 3.4.2.3 priedą).

Analizuojant mišriojo skirstinio ir empirinių duomenų suderinamumą Baltijos šalių rinkoje tikrintos hipotezės: ar empiriniai duomenys atitinka teorinį pasiskirstymą (Gauss'o, mišrųjį Gauss'o, stabilųjį ir mišrųjį stabilųjį) su 5% pasikliovimo lygmeniu. Suderinamumas tikrintas trimis metodais, o gauti rezultatai pateikti lentelėje 4.9.

4.9. Lentelė. Modelių adekvatumo tikrinimo rezultatai (neatmestini/atmestini atvejai su 0.05 pasikliovimo lygmeniu).

Metodas / Modelis	Gauso	mišrusis Gauso	stabilusis	mišrusis stabilusis
Modifikuotas χ^2	0/64	7/57	0/64	52/12
Koutrouvelio	0/64	39/25	46/18	63/1
Andersono–Darlingo	0/64	netaikomas	0/64	netaikomas

Lentelėje 4.10 pateikiami detalesni stabiliojo mišriojo modelio suderinamumo testų rezultatai.

Galima pastebėti, kad kai nulinių grąžų skaičius didėja, mišrusis modelis geriau atitinka empirinius duomenis.

4.10. Lentelė. Mišriojo modelio adekvatumo priklausomybe nuo nulinių grąžų skaičiaus (suderinamumo hipotezės neatmetimo procentai).

Nulinių grąžų	sekų skaičius	modifikuotas χ^2	Koutrouvelis
0,1–0,2	2	100	100
0,2–0,3	2	100	100
0,3–0,4	8	25,00	25,00
0,4–0,5	17	64,71	94,12
0,5–0,6	14	71,43	100
0,6–0,7	15	86,67	100
0,7–0,8	4	100	100
0,8–0,9	2	100	100

4.4. Nulinių būsenų serijų ilgių pasiskirstymas

Schemoje 3.24 pateikta duomenų transformavimo iš būsenų indikatorių į nulinių (vienetinių) būsenų posekių ilgių seką schema. Pagal šią schemą sudarykime nuliukų ilgių seką. Kaip jau buvo minėta anksčiau, teoriškai, ši seka turėtų būti pasiskirsčiusių pagal geometrinį dėsnį, tačiau iš lentelės 4.11 ir pav. 4.12 pastebime, kad kiti dėsniai mūsų duomenis (57 sekas) aprašo geriau.

4.11. Lentelė. Nuliukų sekų ilgių pasiskirstymas duomenų sekose

Pasikliovimo lygmuo	Hurwitz	Hurwitz apibend	Apibendrintas logaritminis	Diskretus stabilus	Puasono	Apibendrintas Puasono	Geometrinis
0,01	94,74%	96,49%	63,16%	26,32%	0,00%	1,75%	1,75%
0,025	91,23%	91,23%	50,88%	22,81%	0,00%	1,75%	1,75%
0,05	87,72%	84,21%	42,11%	17,54%	0,00%	1,75%	1,75%
0,1	80,70%	78,95%	31,58%	12,28%	0,00%	1,75%	1,75%

Tyrimas parodė, kad empirinius duomenis geriausiai aprašo Hurwitz'o dzeta dėsnis (tiko 81–95%). Šis rezultatas leidžia kelti hipotezę, kad nulinių bei vienetinių būsenų pasiskirstymai nėra atsitiktiniai, o tai reiškia, kad realios nulinių (vienetinių) būsenų sekos nėra pasiskirsčiusios pagal binominį dėsnį. Atliktas Wald-Wolfowitz ženklų kriterijaus testas parodė, kad beveik visos Baltijos šalių sekos (išskyrus ETLAT) nėra grynai atsitiktinės, su pasikliovimu lygmenimis (0.008,..., 0.1). Tai leidžia teigti, kad būsenų indikatorių sekos nėra grynai atsitiktinės ir tokiu atveju iškyla svarbus priklausomybės pobūdžio klausimas.

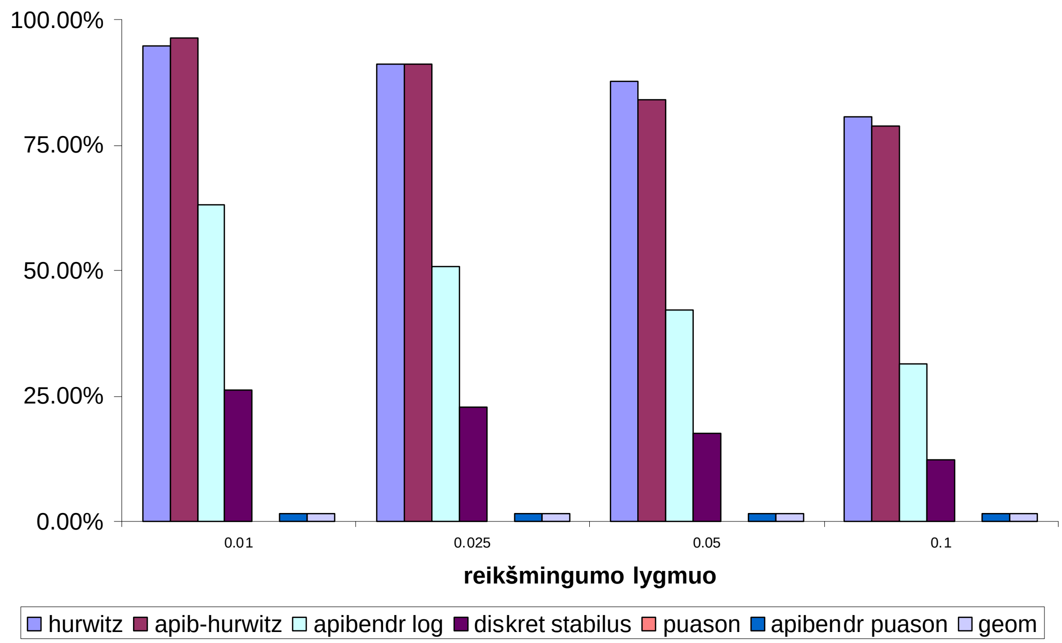
4.4.1. Markovo tipo priklausomybės sekose nustatymas

Patikrinti ar seka sudaro m-tosios ($m = 0, 1, \dots$) eilės Markovo grandinę buvo taikytas Hoelio [64] pasiūlytas kriterijus. Norint patikrinti hipotezę $\mathrm{H}_0^{m:m+1}$: seka sudaro m-tosios ($m = 0, 1, \dots$) eilės Markovo grandinę, su alternatyvia hipoteze $\mathrm{H}_1^{m:m+1}$: seka sudaro $(m+1)$-tosios eilės Markovo grandinę, skaičiuojama statistika

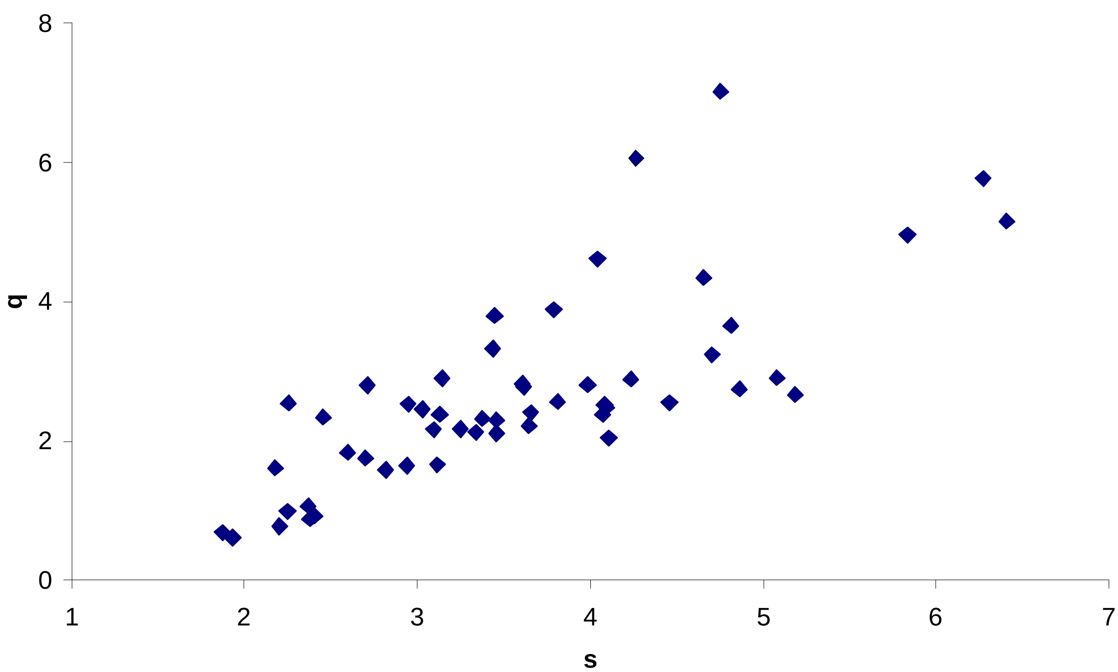
$$L = 2 \sum_{i,\dots,l} n_{ij\dots kl} \left(\ln \frac{n_{ij\dots kl}}{n_{ij\dots k\bullet}} - \ln \frac{n_{\bullet j\dots k}}{n_{\bullet j\dots k\bullet}} \right), \tag{4.1}$$

kuri yra pasiskirsčiusi pagal χ^2 dėsnį su $s^{m-1}(s-1)^2$ laisvės laipsniais, čia s yra Markovo grandinės būsenų skaičius, skaičius $n_{ij\dots kl}$ rodo kiek kartų sistema pateko į būseną $ij\dots kl$, $\cdot$ parodo indeksą pagal kurį atliekamas sumavimas ($n_{\bullet j\dots kl}$- sumuojama pagal pirmąjį indeksą, $n_{ij\dots k\bullet}$- sumuojama pagal paskutinįjį indeksą, $n_{\bullet j\dots k\bullet}$- sumuojama pagal pirmąjį ir paskutinįjį indeksus). Priklausomai nuo eilės m būsenų indeksų $(ij\dots kl)$ skaičius yra lygus $m+1$. Tikrinant ar seka yra nulinės eilės Markovo grandinė ($\mathrm{H}_0^{0:1}$), galima nustatyti ar ji yra Bernulio schemos sugeneruota seka, t.y. ar ji yra atsitiktinė. Šiame darbe tikrintos 5 hipotezės: $\mathrm{H}_0^{0:1}$, $\mathrm{H}_0^{1:2}$, $\mathrm{H}_0^{2:3}$, $\mathrm{H}_0^{3:4}$, $\mathrm{H}_0^{4:5}$. Šių testų rezultatai esant skirtingiems pasikliovimo lygmenims pateikti Lentelėje 4.12.

Skaičiai lentelėje rodo kiek kartų iš 60 akcijų atitinkama hipotezė nebuvo atmesta. Ne-



Paveikslas 4.12: Nuliukų sekų ilgių pasiskirstymo duomenų sekose priklausomybė nuo pasikliovimo lygmens



Paveikslas 4.13: Hurwitz dėsnio parametrų išsibarstymas

4.12. Lentelė. Hipotezių $H_0^{0:1}$, $H_0^{1:2}$, $H_0^{2:3}$, $H_0^{3:4}$, $H_0^{4:5}$testų rezultatai priklausomai nuo pasikliovimo lygmens.

γ	$H_0^{0:1}$	$H_0^{1:2}$	$H_0^{2:3}$	$H_0^{3:4}$	$H_0^{4:5}$	atmesta
0.1	1	4	12	21	34	25
0.05	1	4	13	26	41	18
0.01	2	9	22	38	50	9
0.001	3	11	28	44	56	3

sunkiai galima pastebėti, kad nulinės eilės Markovo grandinių arba kitaip sakant Bernulio schemą atitinkančių sekų praktiškai nėra. Esant $\gamma = 10\%$ pasikliovimo lygmeniui 4 eilės Markovo grandinių yra apie 50%, tuo tarpu esant $\gamma = 0.1\%$ pasikliovimo lygmeniui tokių sekų jau yra 95%.

Algoritmas 21 Markovo grandinės eilės nustatymas $markov(x, nn1)$

■ *Tikslas*: nustatyti kelintos eilės Markovo grandinė yra duotoji nuliukų vienetukų seka x;

Įėjimo parametrai: x ($nn1$ matis nuliukų-vienetukų skaičių masyvas) duomenų seka, $nn1$ (sveikasis skaičius) sekos ilgis;

Išėjimo parametrai: L (šešiamatis realių skaičių masyvas) statistikos L reikšmė, esant skirtingoms Markovo grandinės eilėms m;

Naudojama atmintis: papildomos atminties reikia elementų saugojimui $n_{ij...kl}$ (kiek kartų sistema pateko į būseną $ij \dots kl$), tad reikia po vieną 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 ir 2^7 dydžio sveikų skaičių matricą;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo sekos ilgio $nn1$;

Aprašymas: Hipotezės $H_0^{m:m+1}$tikrinimas: seka sudaro m-tosios ($m = 0, 1, \dots$) eilės Markovo grandinę, su alternatyvia hipoteze $H_1^{m:m+1}$: seka sudaro $(m + 1)$-osios eilės Markovo grandinę, skaičiuojama statistika $L = 2 \sum\limits_{i,\dots,l} n_{ij...kl} \left(\ln \frac{n_{ij...kl}}{n_{ij...k\bullet}} - \ln \frac{n_{\bullet j...k}}{n_{\bullet j...k\bullet}} \right)$, kuri yra pasiskirsčiusių pagal χ^2 dėsnį su $s^{m-1}(s-1)^2$ laisvės laipsniais, čia s yra Markovo grandinės būsenų skaičius, skaičius $n_{ij...kl}$ rodo kiek kartų sistema pateko į būseną $ij \dots kl$, o $\bullet$ parodo indeksą pagal kurį atliekamas sumavimas ($n_{\bullet j...kl}$ – sumuojama pagal pirmąjį indeksą, $n_{ij...k\bullet}$ – sumuojama pagal paskutinįjį indeksą, $n_{\bullet j...k\bullet}$ – sumuojama pagal pirmąjį ir paskutinįjį indeksus). Priklausomai nuo eilės m būsenų indeksų $(ij \dots kl)$ skaičius yra lygus $m + 1$

- Sukuriama tuščia perėjimų tarp būsenų matrica $x3[] \dots [] = 0$;
- Suskaičiuojamas perėjimų tarp būsenų skaičius $x3$ (toliau dirbama tik su šia matrica);
- Skaičiuojamos sumos $S1 = n_{\bullet j...kl}$, $S2 = n_{ij...k\bullet}$ ir $S3 = n_{\bullet j...k\bullet}$;
- Skaičiuojama statistika L (4.1).

Algoritmas://——-hipoteze nulis pries viena m=0————-//

1. FOR $i = 0$ TO 1 DO
    1.1. FOR $j = 0$ TO 1 DO
        1.1.1. $x3[i][j] = 0$;
        1.1.2. $j = j + 1$;
    1.2. $i = i + 1$;
2. FOR $i = 0$ TO $nn1 - 2$ DO
    2.1. $j = i + 1$;
    2.2. $x3[x[i]][x[j]] = x3[x[i]][x[j]] + 1$;
    2.3. $i = i + 1$;
3. $S3 = 0$;

4. FOR $i = 0$ TO 1 DO
    4.1. FOR $j = 0$ TO 1 DO
        4.1.1. $S3 = S3 + x3[i][j];$
        4.1.2. $j = j + 1;$
    4.2. $i = i + 1;$
5. $L[m-1] = 0;$
6. FOR $i = 0$ TO 1 DO
    6.1. $S1 = 0;$
    6.2. FOR $j = 0$ TO 1 DO
        6.2.1. $S1 = S1 + x3[i][j];$
        6.2.2. $j = j + 1;$
    6.3. FOR $k = 0$ TO 1 DO
        6.3.1. $S2 = 0;$
        6.3.2. FOR $l = 0$ TO 1 DO
            6.3.2.1. $S2 = S2 + x3[l][k];$
            6.3.2.2. $l = l + 1;$
        6.3.3. $L[0] = L[0] + x3[i][k] \cdot (\ln(x3[i][k]/S1) - \ln(S2/S3));$
        6.3.4. $k = k + 1;$
    6.4. $i = i + 1;$
7. $L[0] = 2 \cdot L[0];$ /*—trumpumo deliai pateikiu tik aukstesnes eiles skaičiavimus—*//

/————————————trys pries keturis m=3——————-//

8. FOR $i = 0$ TO 1 DO
    8.1. FOR $j = 0$ TO 1 DO
        8.1.1. FOR $k = 0$ TO 1 DO
            8.1.1.1. FOR $l = 0$ TO1 DO
                8.1.1.1.1. FOR $k1 = 0$ TO 1 DO
                    8.1.1.1.1.1. $x6[i][j][k][l][k1] = 0;$
                    8.1.1.1.1.2. $k1 = k1 + 1;$
                8.1.1.1.2. $l = l + 1;$
            8.1.1.2. $k = k + 1;$
        8.1.2. $j = j + 1;$
    8.2. $i = i + 1;$
9. FOR $i = 0$ TO $nn1 - (m+1)$ DO
    9.1. $j = i + 1;$
    9.2. $k = i + 2;$
    9.3. $l = i + 3;$
    9.4. $k1 = i + 4;$
    9.5. $x6[x[i]][x[j]][x[k]][x[l]][x[k1]] = x6[x[i]][x[j]][x[k]][x[l]][x[k1]] + 1;$
    9.6. $i = i + 1;$
10. $L[3] = 0;$
11. FOR $i = 0$ TO 1 DO
    11.1. FOR $j = 0$ TO 1 DO

11.1.1. FOR $k = 0$ TO 1 DO
11.1.1.1. FOR $l = 0$ TO 1 DO
11.1.1.1.1. $S1 = 0$;
11.1.1.1.2. $S3 = 0$;
11.1.1.1.3. FOR $k1 = 0$ TO 1 DO
11.1.1.1.3.1. $S1 = S1 + x6[i][j][k][l][k1]$;
11.1.1.1.3.2. FOR $z = 0$ TO 1 DO
11.1.1.1.3.2.1. $S3 = S3 + x6[z][j][k][l][k1]$;
11.1.1.1.3.2.2. $z = z + 1$;
11.1.1.1.3.3. $k1 = k1 + 1$;
11.1.1.1.4. FOR $k1 = 0$ TO 1 DO
11.1.1.1.4.1. $S2 = 0$;
11.1.1.1.4.2. FOR $z = 0$ TO 1 DO
11.1.1.1.4.2.1. $S2 = S2 + x6[z][j][k][l][k1]$;
11.1.1.1.4.2.2. $z = z + 1$;
11.1.1.1.4.3. $L[3] = L[3] + x6[i][j][k][l][k1] \cdot (\ln(x6[i][j][k][l][k1]/S1) - \ln(S2/S3))$;
11.1.1.1.4.4. $k1 = k1 + 1$;
11.1.1.1.5. $l = l + 1$;
11.1.1.2. $k = k + 1$;
11.1.2. j= $j + 1$;
11.2. $i = i + 1$;
12. $L[3] = 2 \cdot L[3]$;

Analogiškai pridedant po vieną papildomą matavimą galima skaičiuoti L statistiką ir aukštesnės eilės Markovo grandinėms (palyginti algoritmą nuo 1 iki 7 su nuo 8 iki 12 eilutėmis). ■

4.5. Vertybinių popierių portfelio sudarymas

Prieš sudarydami vertybinių popierių portfelį, didžiausio tikėtinumo metodu įvertiname pasirinktų sekų (MNF1L, LDJ1L, VNF1R, NRM1T, MKO1T, GZE1R, ETLAT, VNG1L, SNG1L, TEO1L) stabiliojo dėsnio parametrus: α, β, μ, σ. Gauti rezultatai pateikiami 4.13 lentelėje.

4.13. Lentelė. Stabiliųjų sekų parametrų įverčiai

Akcija	α	β	μ	σ
ETLAT	1,5309	-0,0649	0,0004	0,0067
GZE1R	1,2656	0,0559	0,0019	0,0091
LDJ1L	1,6094	0,1585	0,0019	0,0133
MKO1T	1,6313	0,1252	0,0030	0,0118
MNF1L	1,6283	0,1310	0,0020	0,0162
NRM1T	1,6158	0,0171	0,0008	0,0071
SNG1L	1,2872	0,3317	0,0059	0,0093
TEO1L	1,7832	0,0354	0,0000	0,0107
VNF1R	1,6789	0,2737	0,0028	0,0161
VNG1L	1,5384	0,1209	0,0025	0,0133

4.5.1. Ryšių tarp sekų nustatymas

Apskaičiuokime kovariantiškumą pagal (3.18) ir kodiferenciją pagal (3.21) dešimčiai ilgiausias sekas turinčių akcijų ir sudarykime koreliacijų (4.14 ir 4.15 lentelės) lenteles (sekų ilgiai suvienodinti ir yra 1427).

4.14. Lentelė. Apibendrintas koreliacijos koeficientas (simetrinis)*

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
TEO1L	1	0,104	0,1466	0,3269	0,1344	0,4468	0,1613	0,2519	0,1522	0,1351
SNG1L	0,104	1	0,157	0,1269	0,1442	0,1219	0,1471	0,1271	0,1784	0,1322
VNG1L	0,1466	0,157	1	0,1587	0,2365	0,1599	0,1951	0,2277	0,1648	0,2056
ETLAT	0,3269	0,1269	0,1587	1	0,1583	0,3423	0,17	0,179	0,1544	0,1556
GZE1R	0,1344	0,1442	0,2365	0,1583	1	0,1464	0,1862	0,2013	0,1546	0,1874
MKO1T	0,4468	0,1219	0,1599	0,3423	0,1464	1	0,1681	0,1873	0,1333	0,1512
NRM1T	0,1613	0,1471	0,1951	0,17c	0,1862	0,1681	1	0,2054	0,1943	0,1962
VNF1R	0,2519	0,1271	0,2277	0,179	0,2013	0,1873	0,2054	1	0,1584	0,1701
LDJ1L	0,1522	0,1784	0,1648	0,1544	0,1546	0,1333	0,1943	0,1584	1	0,18
MNF1L	0,1351	0,1322	0,2056	0,1556	0,1874	0,1512	0,1962	0,1701	0,18	1

*visi reikšmingi su pasikliovimo lygmeniu, didesniu už 0,006.

4.15. Lentelė. Kodiferencijos normos koeficientas (visi reikšmingi).

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
TEO1L	1	0,0065	0,0088	0,34	0,011	0,8072	0,0081	0,0569	0,0155	0,0024
SNG1L	0,0065	1	0,0396	0,0021	0,0299	0,001	0,0042	0,0044	0,0033	0,0044
VNG1L	0,0088	0,0396	1	0,0115	0,1016	0,0172	0,0312	0,0442	0,0174	0,0848
ETLAT	0,34	0,0021	0,0115	1	0,019	0,3744	0,0136	0,02	0,0092	0,0082
GZE1R	0,011	0,0299	0,1016	0,019	1	0,0185	0,0246	0,0266	0,0085	0,0296
MKO1T	0,8072	0,001	0,0172	0,3744	0,0185	1	0,015	0,0267	0,0078	0,0111
NRM1T	0,0081	0,0042	0,0312	0,0136	0,0246	0,015	1	0,0231	0,0281	0,0447
VNF1R	0,0569	0,0044	0,0442	0,02	0,0266	0,026	0,0231	1	0,0017	0,0151
LDJ1L	0,0155	0,0033	0,0174	0,0092	0,0085	0,0078	0,0281	0,0017	1	0,0307
MNF1L	0,0024	0,0044	0,0848	0,0082	0,0296	0,0111	0,0447	0,0151	0,0307	1

Kita vertus, portfelio teorijoje reikalinga kovariacija arba jos atitikmuo, todėl pateikiame ir apibendintų kovariacijų lenteles (4.16 ir 4.17 lentelės)

4.16. Lentelė. Kovariantiškumo koeficientas

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
TEO1L	0,0031	0,0008	0,0012	0,0028	0,0013	0,0029	0,0013	0,0017	0,0014	0,0011
SNG1L	0,0008	0,0084	0,0014	0,0012	0,0015	0,0009	0,0014	0,001	0,0017	0,0012
VNG1L	0,0012	0,0014	0,0091	0,0016	0,0026	0,0012	0,0019	0,0018	0,0017	0,0019
ETLAT	0,0028	0,0012	0,0016	0,0103	0,0018	0,0028	0,0018	0,0016	0,0017	0,0015
GZE1R	0,0013	0,0015	0,0026	0,0018	0,0125	0,0014	0,0021	0,002	0,0018	0,002
MKO1T	0,0029	0,0009	0,0012	0,0028	0,0014	0,0063	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012
NRM1T	0,0013	0,0014	0,0019	0,0018	0,0021	0,0013	0,0088	0,0017	0,0021	0,0019
VNF1R	0,0017	0,001	0,0018	0,0016	0,002	0,0013	0,0017	0,0071	0,0014	0,0014
LDJ1L	0,0014	0,0017	0,0017	0,0017	0,0018	0,0012	0,0021	0,0014	0,011	0,0018
MNF1L	0,0011	0,0012	0,0019	0,0015	0,002	0,0012	0,0019	0,0014	0,0018	0,0091

Pavyzdžiui, iš duotųjų akcijų galima sudaryti portfelius (pagal (3.23) ir (3.24) sistemas) su tokiais optimaliais svoriais (žr. 4.18 lentelę).

4.17. Lentelė. Kodiferencijos koeficientas

	TEO1L	SNG1L	VNG1L	ETLAT	GZE1R	MKO1T	NRM1T	VNF1R	LDJ1L	MNF1L
TEO1L	7,4E-04	1,1E-05	1,3E-05	6,0E-04	2,1E-05	6,0E-04	1,1E-05	3,5E-05	2,6E-05	3,0E-06
SNG1L	1,1E-05	4,2E-04	2,0E-05	1,6E-06	1,7E-05	1,6E-06	2,1E-06	5,7E-06	1,6E-06	2,9E-06
VNG1L	1,3E-05	2,0E-05	4,0E-04	8,7E-06	7,2E-05	2,2E-05	1,2E-05	4,4E-05	9,1E-06	3,9E-05
ETLAT	6,0E-04	1,6E-06	8,7E-06	1,1E-03	1,7E-05	6,0E-04	1,0E-05	2,6E-05	7,3E-06	6,9E-06
GZE1R	2,1E-05	1,7E-05	7,2E-05	1,7E-05	6,4E-04	3,3E-05	1,7E-05	4,0E-05	5,3E-06	2,6E-05
MKO1T	6,0E-04	1,6E-06	2,2E-05	6,0E-04	3,3E-05	7,2E-04	1,9E-05	1,4E-05	1,2E-05	1,2E-05
NRM1T	1,1E-05	2,1E-06	1,2E-05	1,0E-05	1,7E-05	1,9E-05	3,4E-04	2,2E-05	1,4E-05	1,9E-05
VNF1R	3,5E-05	5,7E-06	4,4E-05	2,6E-05	4,0E-05	1,4E-05	2,2E-05	2,4E-04	2,1E-06	1,2E-05
LDJ1L	2,6E-05	1,6E-06	9,1E-06	7,3E-06	5,3E-06	1,2E-05	1,4E-05	2,1E-06	5,2E-04	2,0E-05
MNF1L	3,0E-06	2,9E-06	3,9E-05	6,9E-06	2,6E-05	1,2E-05	1,9E-05	1,2E-05	2,0E-05	4,0E-04

4.18. Lentelė. Optimalūs vertybinių popierių portfelio svoriai išsprendus (3.23) ir (3.24) sistemas.

	(3.23)	(3.24)
TEO1L	0.01931127121831664739	0.00000458324159077873
SNG1L	0.14748791669745869859	0.20832600703143941412
VNG1L	0.06520432421240375531	0.07441099228178453540
ETLAT	0.02316874195215026799	0.00877015050036948456
GZE1R	0.06396124707815362131	0.26926385550778603184
MKO1T	0.00856555150906847772	0.12372356319707422667
NRM1T	0.13592436635025012537	0.04210572877402151554
VNF1R	0.28168613842527678859	0.11068516003731768138
LDJ1L	0.11707050740499311270	0.07642465720903288129
MNF1L	0.13761993515192852411	0.08628530221958331803

Pastebima, kad šios dienos kursu portfelis (3.23) duotų didesnį pelną (2007 m. rugsėjo 15 d.).

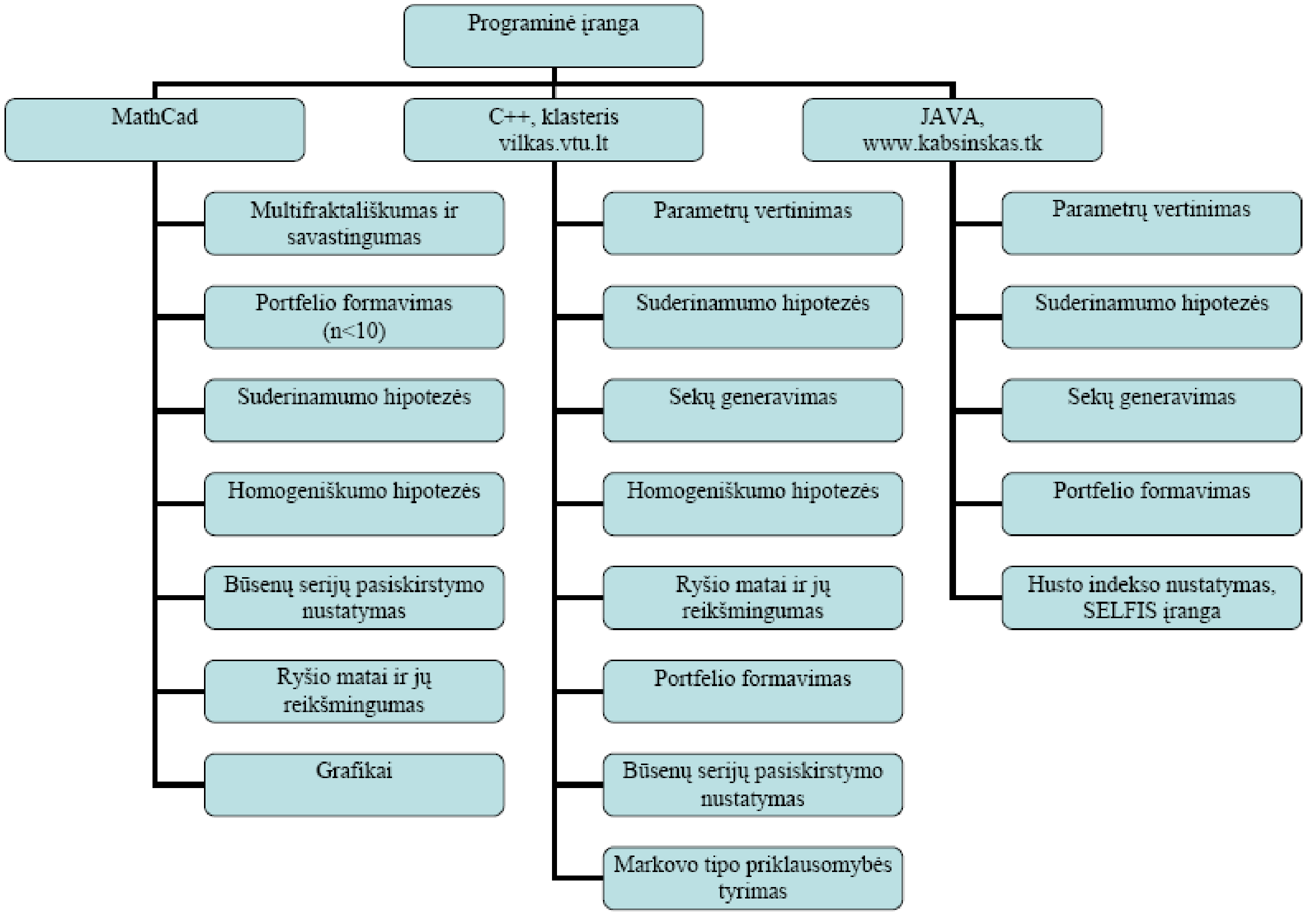
4.6. Programinės įrangos pasirinkimas, kūrimas ir testavimas

Atliekant disertacijoje minimus tyrimus ir realizuojant pateiktus algoritmus buvo naudojamos skirtingos programinės priemonės: JAVA ir C++ sukurti moduliai bei MathCad (žr. schemą 4.14). Universalių programavimo kalbų panaudojimas leido efektyviai taikyti iteracinius algoritmus ir nestabdant darbo tą patį algoritmą taikyti iš eilės visoms duomenų sekoms. Skaičiavimai buvo atliekami tiek personaliniu kompiuteriu – Intel Pentium IV 1.6 GHz, RAM 512 MB, MS Windows 2000 OS, tiek ir superkompiuteriu *http://vilkas.vtu.lt* – Intel Pentium IV 3.207 GHz, RAM 1024 MB, Linux OS. Visi programiniai moduliai (99%) buvo sukurti savarankiškai, naudojant MS Visual C++ 6.0 paketą ir Borland JBuilder 10. Likęs 1% (atsitiktinių dydžių generatorius, statistiniai paketai ir specialiosios Beselio funkcijos) algoritmų realizacijų buvo surastas internete per Google paieškos sistemą. MathCad sistemos funkcijos 100% sukurtos savarankiškai (išskyrus standartines MathCad funkcijas).

4.6.1. Superkompiuterio naudojimas ir lygiagretusis skaičiavimas

Kartu su personaliniu kompiuteriu (su vienu procesoriumi), atlikti sudėtingiems ir daug resursų reikalaujantiems skaičiavimams, buvo naudojamas ir klasteris VILKAS[10] – tai mišrios architektūros lygiagrečiųjų skaičiavimų mašina, kurią šiuo metu sudaro 21 vienprocesorinis ir 10 dviprocesorinių SMP technologijos Intel® architektūros personalinių kompiuterių, sujungtų Gigabit Ethernet

[10] Klasterio resursais naudojasi ne tik VGTU mokslininkai ir doktorantai, bet ir kitų Lietuvos mokslo bei akademinių institucijų darbuotojai. *vilkas.vtu.lt*



Paveikslas 4.14: Sukurtosios programinės įrangos schema.

technologija į lokalų tinklą. Tokiu būdu gauntas mišrios lygiagrečios architektūros (bendros ir paskirstytos atminties) kompiuteris. Trumpa klasterio VILKAS konfigūracija pateikta pav. 4.19

4.19. Trumpa klasterio VILKAS konfigūracija

Procesorių skaičius	41
Mazgų skaičius	31
Bendras RAM kiekis, GB	31
Bendras diskinės erdvės dydis, GB	4050
Scratch mazguose, GB	185 arba 70
Max greitis Pmax , Gflop/s	162,4
Teorinis komunikacijų tarp mazgų greitis, Mbit/s	1000

Superkompiuterio mazgai buvo naudojami įvertinti visų tyrinėtų stabiliųjų sekų parametrams bei atlikti kitiems skaičiavimams. Kadangi buvo tiriama virš 200 realių sekų ir virš 1.000.000 sugeneruotų sekų, tai superkompiuterio panaudojimas žymiai paspartino tyrimų eigą. Daugumai skaičiavimų buvo naudojamas tik vienas mazgas, tačiau testai buvo atliekami ir su skaičiavimais 2, 3 ir 4 mazguose. Vienas iš pagrindinių darbo tikslų buvo ištirti parametrų vertinimo algoritmų efektyvumą. Efektyvumas buvo tiriamas dviem aspektais: parametrų vertinimo tikslumas ir sparta (trukmė sugaištama parametrams įvertinti). Parametrų vertinimo tikslumas yra aptariamas rezultatų dalyje (3.2.4.4 skyriuje). Parametrų vertinimo trukmė akivaizdu, kad priklauso nuo sekos ilgio ir norint nustatyti šios priklausomybės tipą buvo atliekami testavimai superkompiuteriu. Tam buvo generuojamos skirtingo ilgio (nuo 100 iki 30000) stabiliosios sekos

4.20. Skaičiavimams naudotų kompiuterių konfigūracijos

	compute-1-9.local	compute-0-19.local
Procesorius	2 x 1.36 Ghz	2 x 3.13 Ghz
Atmintis, RAM	0.99 GB	0.99 GB
Kietas diskas	77.764 GB	195.879 GB
OS	Linux 2.6.9-22.ELsmp (x86)	Linux 2.6.9-22.ELsmp (x86)

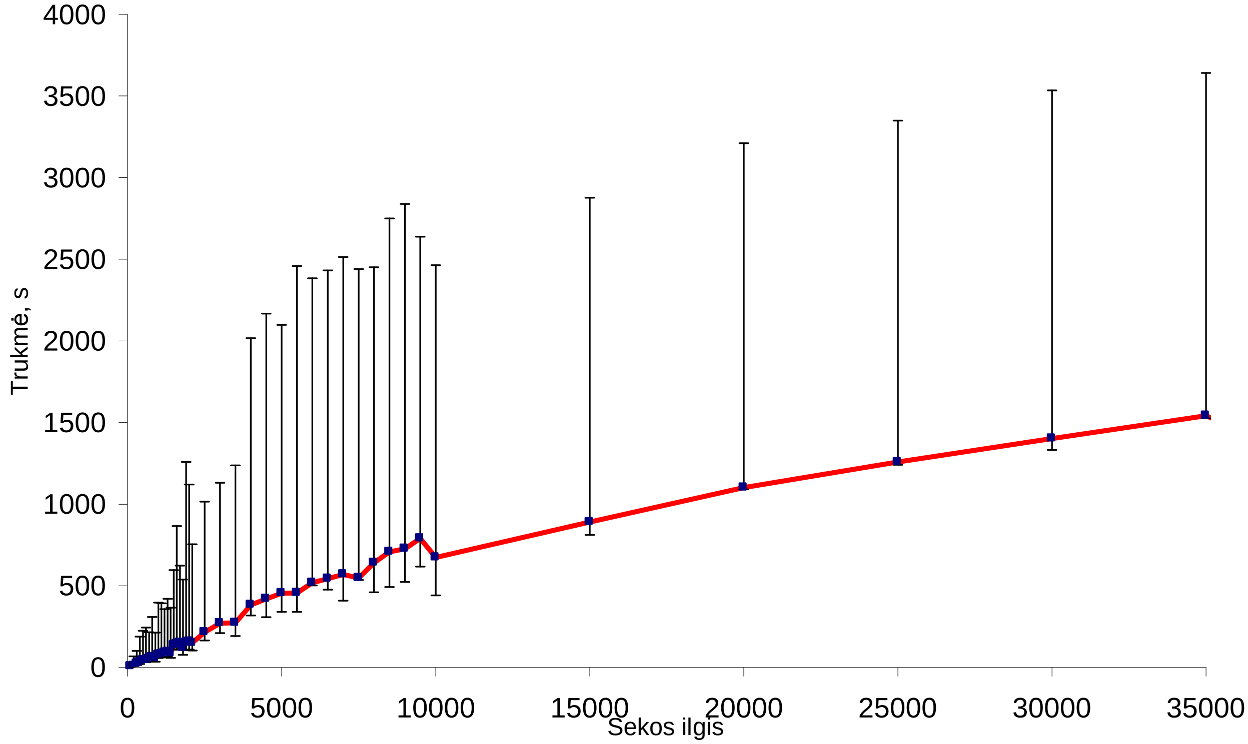
($\alpha = 1.45, \beta = 0.15, \mu = 0.5, \sigma = 0.5$), šioms sekoms buvo skaičiuojami parametrų įverčiai, o kiekvienas eksperimentas buvo kartojamas 50–100 kartų. Eksperimentai buvo atliekami dviejuose skirtinguose mazguose, kurių aprašymas pateiktas 4.20 lentelėje. Eksperimento rezultatai pateikti lentelėje 4.22, o grafinė parametrų vertinimo trukmės priklausomybė nuo sekos ilgio pateikta 4.15 ir 4.16 paveiksluose.

4.21. Lentelė. Parametrų vertinimo trukmės priklausomybės nuo sekos ilgio tyrimo rezultatai. Procesorius P3

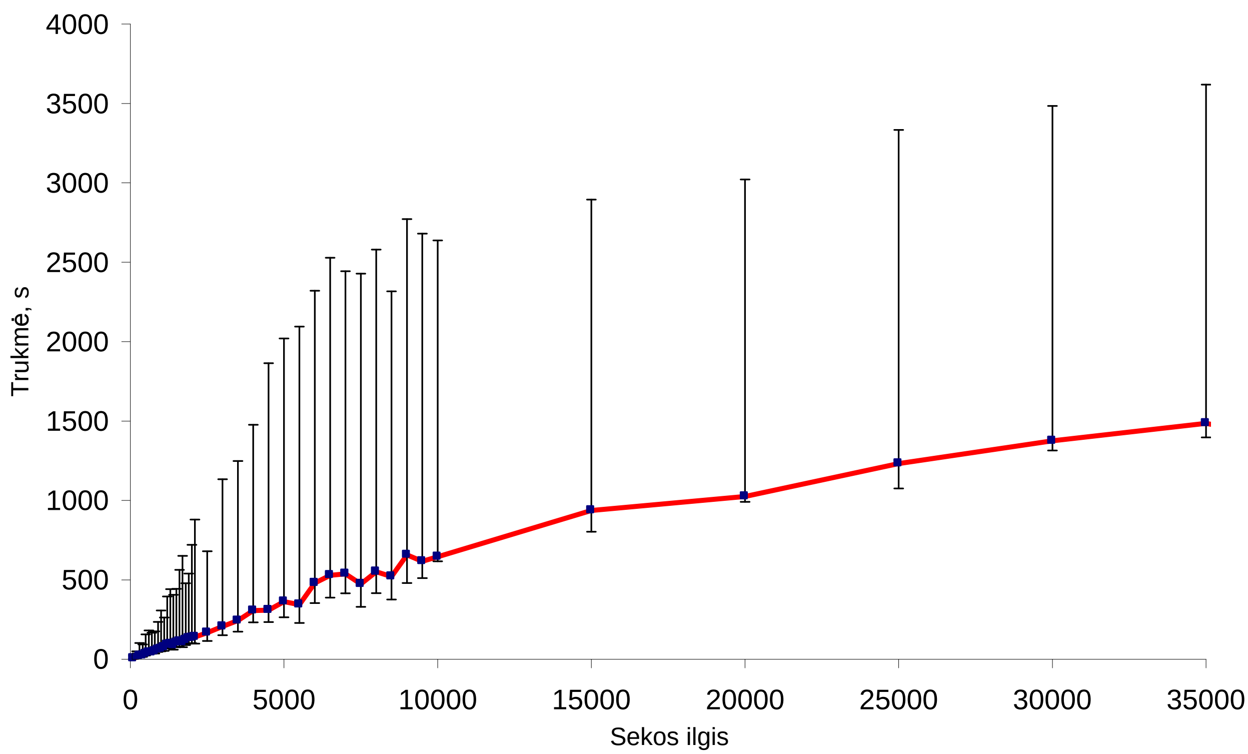
Sekos ilgis	Vidutinis laikas, s	Minimalus laikas, s	Maksima-lus laikas, s	Standarti-nis nuokrypis	Sekos ilgis	Vidutinis laikas, s	Minimalus laikas, s	Maksima-lus laikas, s	Standarti-nis nuokrypis
100	7,12	4,56	0,72	22,36	2500	215,52	151,30	50,14	799,58
200	13,76	8,82	4,69	54,35	3000	270,55	208,93	59,85	860,70
300	22,82	15,34	7,87	78,37	3500	273,31	211,40	80,63	963,97
400	31,12	24,00	10,24	157,92	4000	382,68	355,39	64,36	1634,42
500	44,19	32,07	11,73	180,66	4500	420,07	354,47	112,12	1746,85
600	45,97	35,02	13,52	198,76	5000	454,31	355,66	113,11	1643,45
700	52,53	34,47	16,33	163,29	5500	456,42	415,43	115,98	2002,48
800	63,12	44,92	19,21	246,34	6000	519,35	445,45	16,59	1864,61
900	58,46	32,28	22,45	154,86	6500	544,30	450,99	67,46	1887,93
1000	77,99	60,42	19,44	319,36	7000	570,27	437,25	161,01	1942,91
1100	81,74	59,58	19,03	311,25	7500	548,14	424,45	11,42	1892,28
1200	90,58	56,65	28,45	267,30	8000	641,43	414,41	180,39	1809,91
1300	95,39	64,55	29,60	326,15	8500	707,79	516,39	214,69	2041,61
1400	86,61	52,70	27,52	279,81	9000	726,71	514,23	202,16	2112,37
1500	135,76	85,66	25,29	461,04	9500	789,97	494,08	172,01	1848,06
1600	144,25	107,52	34,60	722,20	10000	673,28	399,03	231,43	1791,16
1700	150,85	109,87	41,60	473,00	15000	890,35	437,64	78,64	1986,89
1800	118,92	77,44	41,33	420,32	20000	1101,67	500,12	11,36	2108,67
1900	152,04	138,13	46,39	1107,40	25000	1258,37	557,67	16,86	2091,23
2000	158,93	132,71	47,94	961,16	30000	1402,32	560,88	69,98	2131,89
2100	151,00	109,31	47,05	604,12	35000	1541,62	525,63	15,09	2099,89

Iš grafikų 4.15 ir 4.16 akivaizdu, kad priklausomybė yra tiesioginė, tačiau ne tiesinė, tai patvirtina polinominės bei laipsninės priklausomybės determinacijos koeficientai (atitinkamai $R^2 = 0,9431$, $R^2 = 0,9721$).

Vienprocesorinio kompiuterio naudojimas tokiam eksperimentui nėra efektyvus, nes atlikti visą eksperimentą užtrunka apie 3 mėnesius. Logiška tokiu atveju panaudoti daugiaprocesorinį superkompiuterį ir dalies sekų analizę perkelti į daugiau procesorių. Toks išskaidymas parametrų vertinimo algoritmuose yra bene vienitelis būdas paspartinti tyrimus, tačiau realios sekos analizei tai neturi įtakos (nors galima lygiagretinti).



Paveikslas 4.15: Parametrų vertinimo laiko priklausomybė nuo duomenų sekos ilgio. Procesorius Pentium 3.



Paveikslas 4.16: Parametrų vertinimo laiko priklausomybė nuo duomenų sekos ilgio. Procesorius Pentium 4.

4.22. Lentelė. Parametrų vertinimo trukmės priklausomybės nuo sekos ilgio tyrimo rezultatai. Procesorius P4

Sekos ilgis	Vidutinis laikas, s	Minimalus laikas, s	Maksimalus laikas, s	Standartinis nuokrypis	Sekos ilgis	Vidutinis laikas, s	Minimalus laikas, s	Maksimalus laikas, s	Standartinis nuokrypis
100	5,47	3,13	1,70	17,89	2500	166,94	102,15	51,41	513,65
200	11,99	8,05	3,61	37,83	3000	206,62	171,54	55,38	927,48
300	20,60	15,25	6,39	81,55	3500	243,14	195,73	69,19	1004,82
400	23,16	14,86	7,74	69,64	4000	306,65	248,78	73,79	1169,80
500	32,95	25,85	9,17	123,41	4500	309,23	269,44	75,11	1554,70
600	41,88	27,40	11,54	139,57	5000	363,42	312,66	99,90	1656,25
700	41,91	24,78	7,50	124,60	5500	344,11	315,89	115,29	1751,00
800	50,08	30,34	14,32	125,12	6000	479,92	390,85	125,90	1840,32
900	59,69	35,02	13,41	175,40	6500	528,93	463,85	140,82	1999,18
1000	65,54	45,05	15,45	241,61	7000	538,04	416,50	122,67	1905,05
1100	75,39	39,30	22,56	186,65	7500	473,09	381,73	142,72	1954,60
1200	90,28	61,16	23,60	304,69	8000	550,19	442,97	133,93	2029,07
1300	95,31	74,25	26,66	346,16	8500	520,82	367,39	144,29	1796,03
1400	86,79	60,79	27,06	319,55	9000	657,39	512,15	177,43	2113,71
1500	103,25	63,44	28,21	340,68	9500	616,18	435,37	105,09	2063,98
1600	111,29	76,33	32,74	451,94	10000	645,54	441,62	29,08	1991,04
1700	106,33	93,65	30,27	545,20	15000	936,99	451,65	134,41	1957,42
1800	120,62	82,16	31,89	357,69	20000	1024,55	444,44	33,24	1996,57
1900	132,24	85,41	33,75	407,53	25000	1232,16	550,36	156,70	2101,67
2000	134,78	105,34	33,94	585,65	30000	1374,87	516,54	60,20	2109,86
2100	139,72	101,28	41,40	739,32	35000	1485,05	580,78	88,33	2133,39

4.6.2. Internetinis puslapis

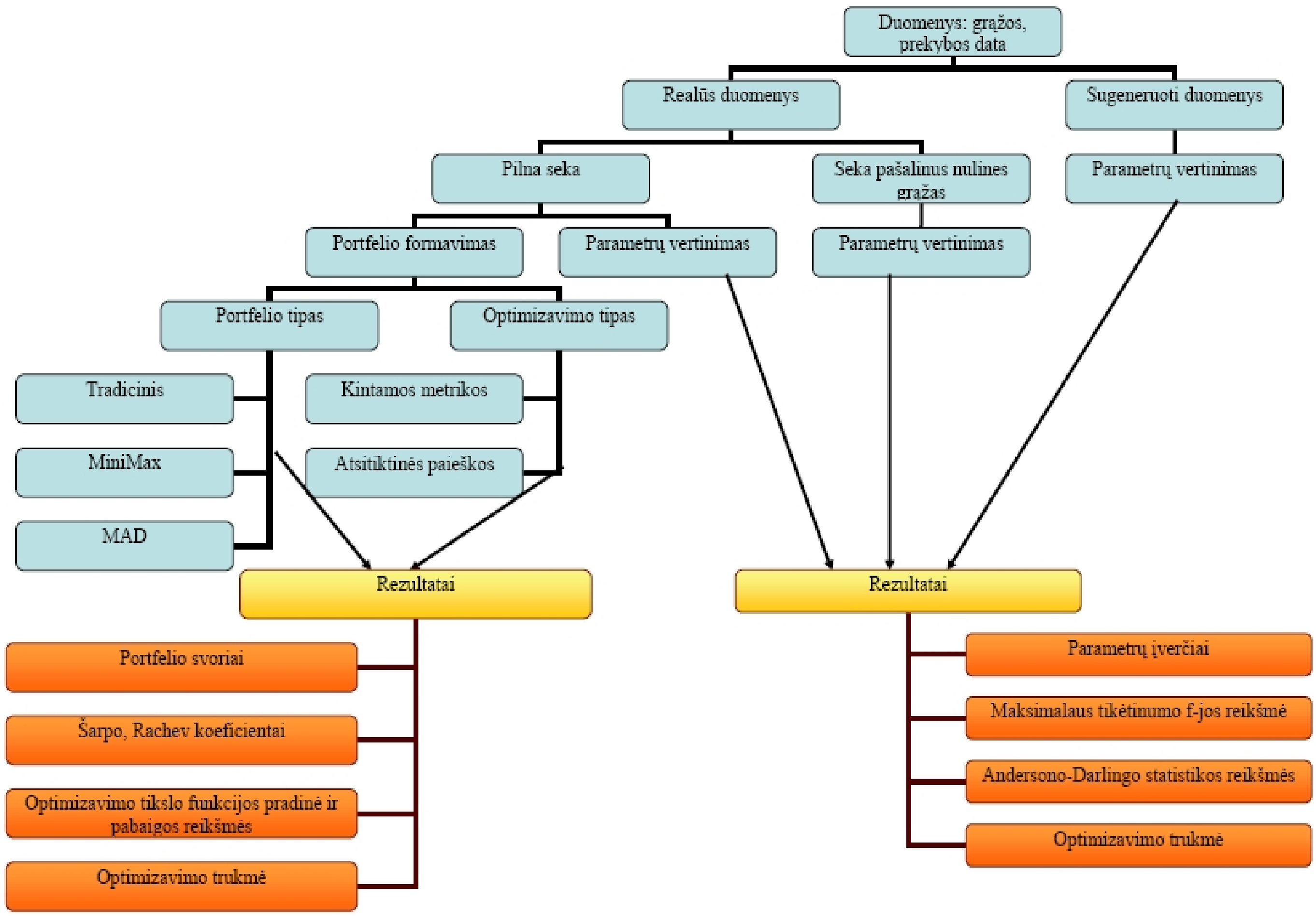
Programinės įrangos demo versija galima rasti adresu *www.kabasinskas.tk*. Ši demonstracinė programinės įrangos versija sudaryta iš trijų valdymo langų:

1. stabiliųjų atsitiktinių dydžių sekos generavimas – programa su nudytais parametrais $(\alpha,\beta,\mu,\sigma)$ sugeneruoja norimo ilgio grąžų seką.
2. parametrų skaičiavimas – didžiausio tikėtinumo metodu įvertinami sugeneruotos arba iš anksto numatytų sekų parametrai, t. y. randami jų įverčiai $(\alpha,\beta,\mu,\sigma)$ ir apskaičiuoja Andersano–Darlingo kriterijaus reikšmė.
3. vertybinių popierių portfelio sudarymas – iš pateikto akcijų sąrašo sudaro optimalų portfelį (Minimax, MAD ir pagal (3.24) sistemą). Optimalus sprendinys gali būti randamas kintamos metrikos arba atsitiktinės paieškos metodais (pradinis taškas parenkamas generuojant svorių rinkinį ir išrenkant tą su kuriuo tikslo funkcija įgyja mažiausią reikšmę). Čia taip pat pateikiami ir Šarpo (C.25) bei Rachev (C.28) portfelio elgesio matai.

Demonstracinės programinės įrangos veikimą ir duomenų perdavimą galima pavaizduoti schema 4.17. Viršutinėje dalyje pateiktas duomenų perdavimo moduliams kelias, o apatinėje dalyje pateikti gaunami rezultatai.

4.6.2.1. Atsitiktinių dydžių sekos generavimas

Iš pradžių tam skirtuose laukuose reikia įvesti parametrus (alfa, beta, miu ir sigma). Kiekvieno parametro reikšmė turi patekti į reikiamą intervalą ($1 <$ alfa < 2, $-1 \leqslant$ beta $\leqslant 1$, miu $\in \mathbf{R}$ ir sigma > 0), jeigu įvedami netinkami parametrai, tai ekrane pasirodo specialus pranešimas. Taip pat reikia nepamiršti įvesti ir generuojamų reikšmių kiekio. Kuo didesnį reikšmių kiekį ketinama sugeneruoti, tuo ilgiau kompiuteris užtruks atlikdamas šį veiksmą. Generavimas atliekamas paspaudus mygtuką „Vykdyti". Mygtukas „Valyti" išvalo visus parametrų įvedimo laukus ir sugeneruotas reikšmes išvedimo lange.



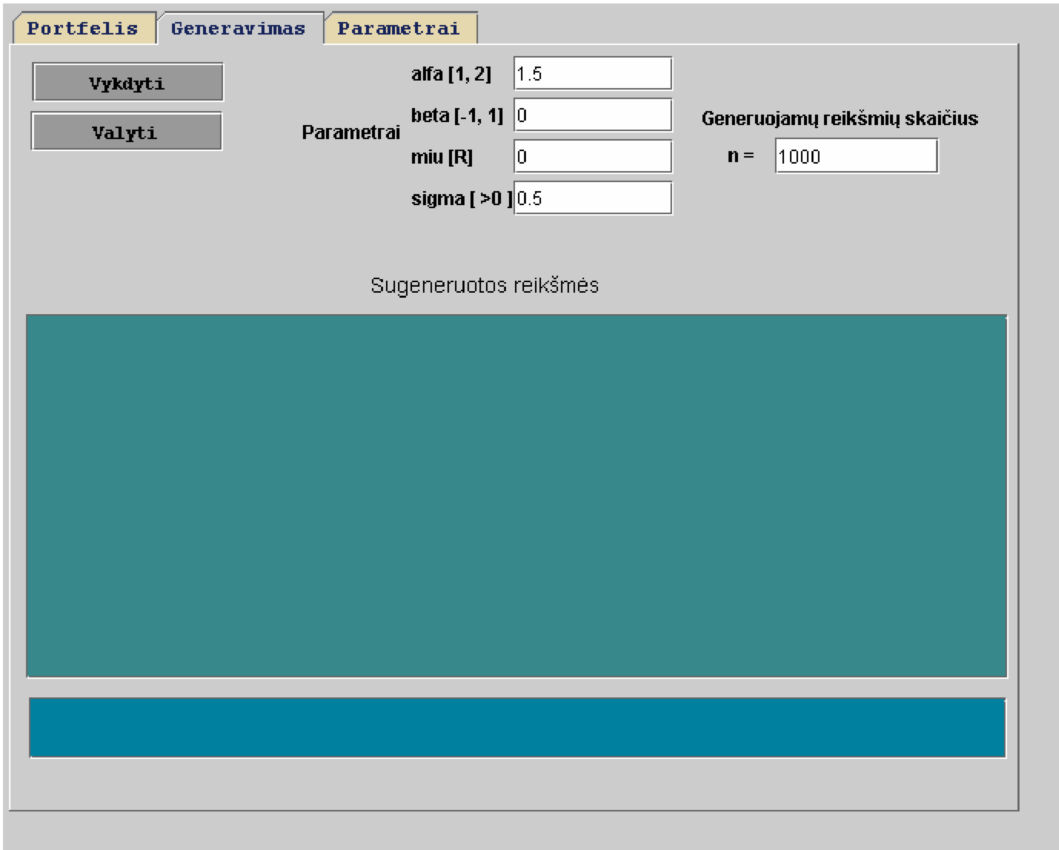
Paveikslas 4.17: Duomenų perdavimas iš vieno programinio modulio į kitą demonstracinėje versijoje.

Generavimo trukmė Buvo atliktas toks testavimo eksperimentas: generuojama stabilioji seka (ilgis n), skaičiuojamas sugaištas laikas, generuojama kita seka, ir taip kartojama K kartų. Tuomet skaičiuojamas vidutinis sugaištas laikas. Tokiu būdu keičiant n ir K sudaryta 4.23 lentelė. 4.23 lentelėje ir 4.19 paveiksle pateikti stabiliojio skirstinio reikšmių generavimo vidutinės trukmės priklausomai nuo generuojamų reikšmių skaičiaus.

Iš grafiko (pav. 4.19) matyti, kad generuojant daugiau nei 1000 reikšmių programa sugaista gana daug laiko. Pastebėtina, kad laiko priklausomybė nuo reikšmių skaičiaus nėra tiesinė.

4.6.2.2. Parametrų vertinimas

Parametrų vertinimo programos lange (pav. 4.20) programos vykdymas atliekamas tokia tvarka: pirmiausia pasirenkama su kokiais duomenimis bus dirbama. Jeigu pasirinkama opcija „Su sugeneruotomis reikšmėmis", tai tuomet vertinami sugeneruotos sekos parametrai (šia seką pirmiausia reikia sugeneruoti „Generavimo" lange pav. 4.18). Jeigu pasirenkama opcija „Su realiais duomenimis", tai tada atsiranda galimybė pasirinkti seką iš specialaus sąrašo. Pasirinkus norimą akciją dar yra galimybę įvertinti akcijų grąžų parametrus su nulinėmis ir nenulinėmis grąžomis. Dabar jau galima spausti mygtuką „Įvertinti parametrus". Po šios operacijos į atitinkamus laukus bus išvesti parametrų įverčiai. Laukelyje „Andersano–Darlingo kriterijus" pateikiamos atitinkamo dėsnio Andersano–Darlingo suderinamumo kriterijaus statistikos reikšmės (plačiau apie tai priede B).



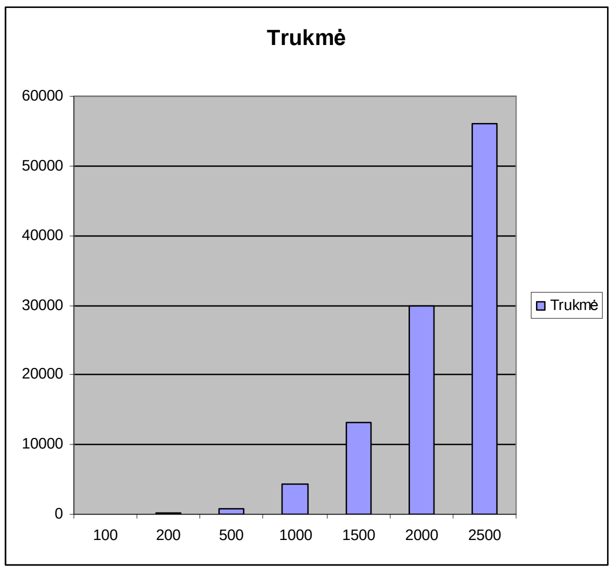
Paveikslas 4.18: Grąžų generavimo programos langas

Parametrų vertinimo trukmė Pirmiausiai tikriname generavimo, parametrų vertinimo, bei Andersono–Darlingo koeficiento skaičiavimo metodus. Tam generuojame skirtingo ilgio sekas ir vertindami jų parametrus stebime Andersono–Darlingo foeficiento reikšmę. Kaip matome 4.24 lentelėje didžiausio tikėtinumo metodas pakankamai gerai įvertina stabiliojo dėsnio parametrus. Bendra generavimo ir didžiausio tikėtinumo metodo (MTM) paklaida, esant 1500–2000 reikšmių, yra 10^{-2} eilės. Grafikas 4.21 parodo skaičiavimo laiko priklausomybę nuo sekos ilgio. Tarkim 2000 elementų sekos parametrus programa skaičiuoja apie 300000 milisekundžių, tai yra penkias minutes. Todėl norint gauti gerus parametrus reikia šiek tiek palaukti.

Šie bandymai rodo, kad programoje realizuoti stabiliųjų dėsnių generavimo, parametrų vertinimo ir Andersono–Darlingo koeficiento skaičiavimo metodai veikia gerai.

4.23. Lentelė. Generavimo trukmė

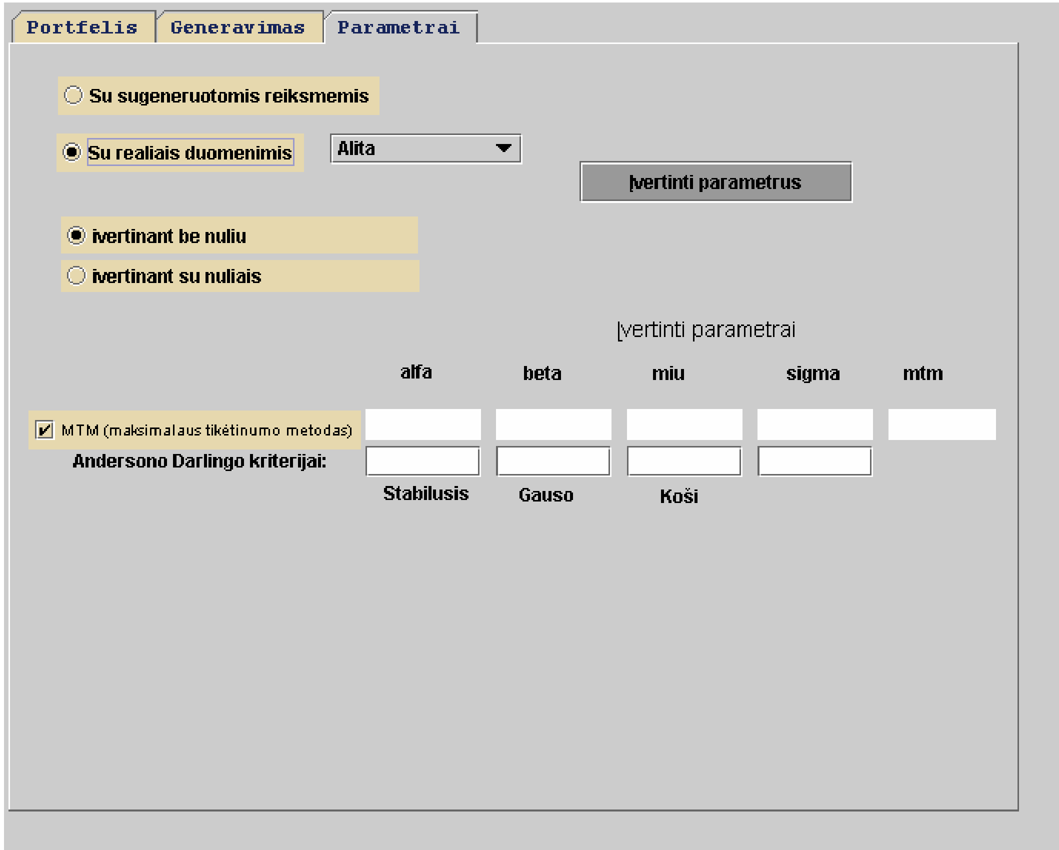
Generuojamų reikšmių skaičius	Generavimo laikas, ms
100	63
200	125
500	734
1000	4328
1500	13203
2000	30000
2500	56000



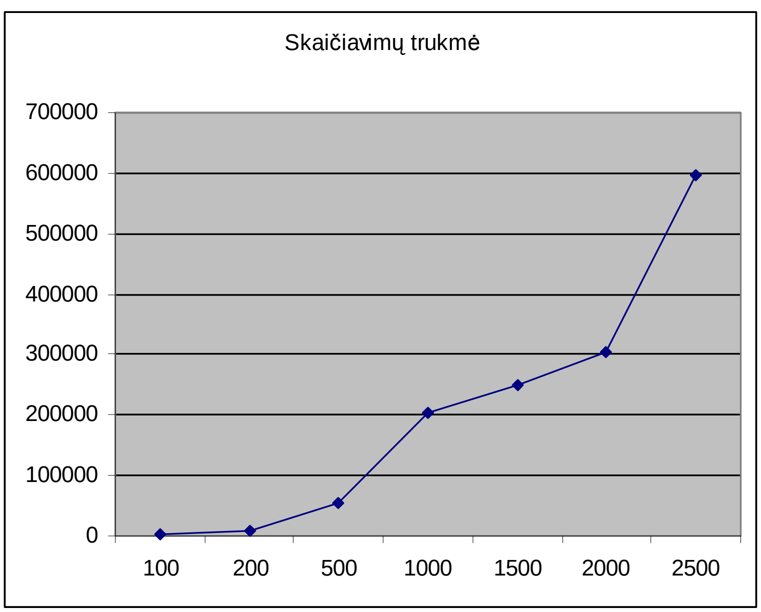
Paveikslas 4.19: Reikšmių generavimo trukmė

4.24. Lentelė. Sugeneruotų sekų parametrų vertinimas

Reikšmių skaičius\ Tikrosios reiksmės	Parametrai				Trukmė, ms
	α	β	μ	σ	
	1,5	0	0	0,5	
100	1,475141	0,364136	0,164085	0,438396	1654
200	1,465655	0,437603	0,248343	0,519739	8656
500	1,482575	-0,02686	-0,0088	0,489784	55671
1000	1,508168	0,008942	-0,00236	0,509995	204765
1500	1,494083	-0,02691	0,00367	0,49877	250360
2000	1,516273	0,005866	-0,00981	0,491137	302875
2500	1,533998	-0,01822	-0,01798	0,49358	597297

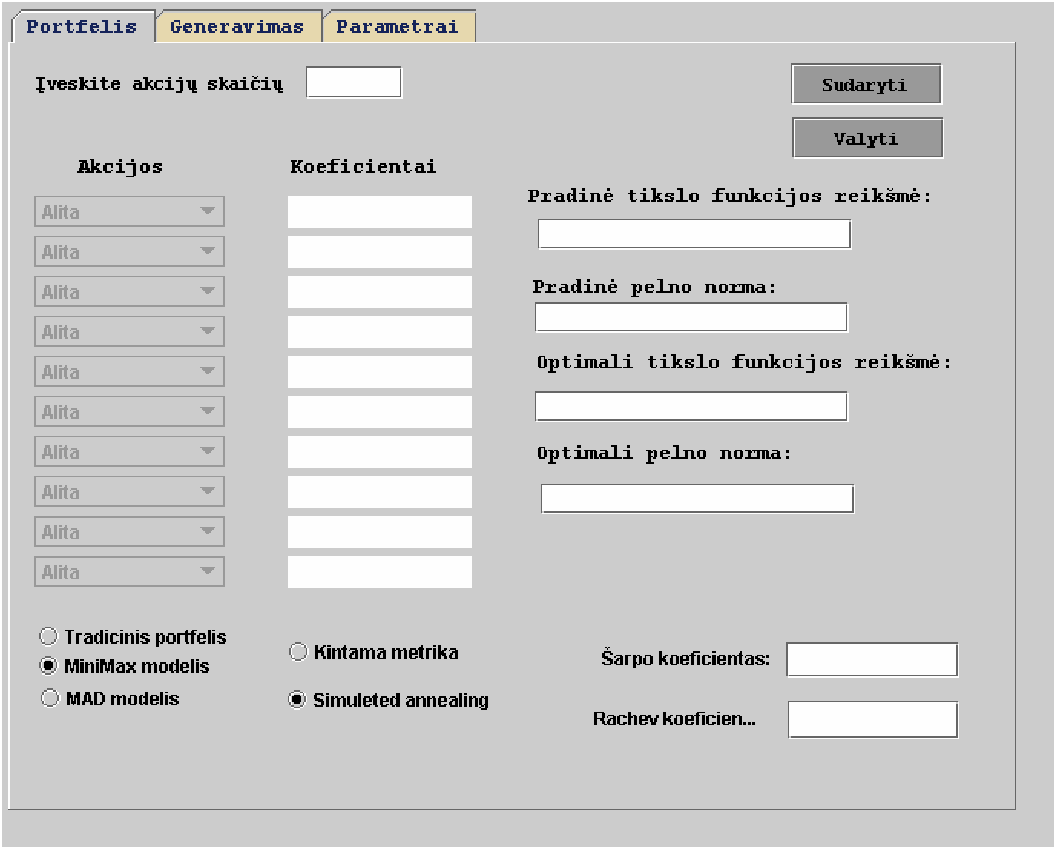


Paveikslas 4.20: Parametrų vertinimo programos langas



Paveikslas 4.21: Parametrų vertinimo trukmė

4.6.2.3. Portfelio sudarymas



Paveikslas 4.22: Portfelio sudarymo programos langas

Portfelio sudarymo programos lange (pav. 4.22) galima nurodyti, iš kelių ir iš kokių akcijų norime sudaryti portfelį. Vartotojui reikia tik įvesti norimą akcijų skaičių ir iš pateikto sąrašo išsirinkti akcijas. Tada reikia pasirinkti pageidaujamą modelį ir optimizavimo metodą. Paspaudus mygtuką „Sudaryti”, bus įvertinti pasirinktų akcijų grąžų parametrai ir sudarytas optimalus portfelis iš tų akcijų. Taip pat parodoma tikslo funkcijos reikšmė prieš optimizavima ir po jo. Suskaičiuojama pradinė ir optimali akcijų portfelio pelno normos. Be to skaičiuojami Šarpo ir Rachev koeficientai, kurių pagalba galime palyginti ne tik skirtingais metodais surastus sprendinius, bet ir palyginti pačius modelius. Mygtukas „Valyti” išvalo visus laukus.

4.7. 4-o skyriaus išvados ir apibendrinimas

1. Darbe nustatyti Baltijos šalių ir tarptautinių biržų finansinių sekų (atitinkamai 64 sekos ir 27 sekos) empiriniai parametrai. Dauguma sekų yra stipriai asimetriškos ($0.1 < |\gamma_1| < 30$), o empirinis ekscesas ($\gamma_2 \neq 0$) rodo, kad sekos empirinė tankio funkcija yra smailiaviršūniškenė už Gauss'o tankio funkciją. Andersono–Darlingo bei Kolmogorovo–Smirnovo suderinamumo testų rezultatai leidžia atmesti hipotezę, kad akcijų kainų grąžų sekos pasiskirstę pagal normalųjį Gauss'o dėsnį.
2. Tarptautinių rinkų finansinių sekų parametrų α ir β parametrų įverčių išsibarstymas rodo, kad α dažniausiai yra virš 1,5 ir nelygus 2. Parametras β šiuo atveju nėra didelis, tačiau dažniau įgyja neigiamas reikšmes. Baltijos šalių finansinių sekų (kai iš nagrinėjama pilna seka) parametrų α ir β įverčių išsibarstymas rodo, kad α yra mažesnis už 1,5 ir neretai įgyja reikšmes

artimas 1, o parametras β įgyja labai skirtingas reikšmes. Tuo tarpu Baltijos šalių finansinių sekų (kai iš sekų pašalintos nulinės grąžos) parametras α yra išsibarstęs apie 1,5, tačiau kartais gali įgyti reikšmes artimas 1 ar 2. Parametras β šiuo atveju dažniau įgyja palyginti mažas teigiamas reikšmes, tačiau kai kuriais atvejais gali išaugti iki kritinių reikšmių ($> 0,5$).

3. Sekų homogeniškumo testų eksperimentinis patikimumo tyrimas parodė, kad Andersono kriterijus vidutiniškai homogeniškas sekas atpažįsta geriau nei Smirnovo, o tai reiškia, kad Andersono kriterijus (su pasikliovimo lygmenimis 0.01, 0.05 ir 0.1) yra galingesnis už Smirnovo kriterijų su atitinkamu pasikliovimo lygmeniu. Dėl šios priežasties Andersono kriterijus vėlesniuose tyrimuose buvo naudojamas dviejų sekų homogeniškumui nustatyti.
4. Tiriant realių sekų homogeniškumą su jų dalinių sumų sekomis nustatyta, kad 21 tarptautinė seka priklauso stabiliųjų dėsnių traukos zonai, o analizuojant Baltijos šalių sekas nustatyta, kad tik dviem atvejais (ETLAT ir LFO1L) ir tik pašalinus nulines grąžas, sekos yra homogeniškos su agreguotomis sekomis (visais kitais atvejais sekos nėra homogeniškos).
5. Tarptautinių kompanijų sekų savastingumo tyrimas pagal absoliutinių momentų metodą parodė, kad visos 27 sekos yra multifraktalinės, o 9 iš jų yra ir savastingos. Baltijos šalių finansinių sekų (nagrinėjant pilnas sekas) savastingumo tyrimas parodė, kad 49 sekos yra multifraktalinės, 8 iš jų yra savastingos, o likę 15 netenkina reikalavimų keliamų nei savastingoms, nei multifraktalinės sekoms. Nagrinėjant sekas pašalinus nulines grąžas gautos 27 multifraktalinės sekos ir 9 iš jų buvo savastingos.
6. Mišriojo-stabiliojo modelio parametrų suderinamumas buvo tikrintas pagal Koutrouvelio kriterijų, paremtą empirine charakteristine funkcija, bei modifikuotą χ^2 (Romanovskio) metodą. Šių metodų patikimumo tyrimas parodė, kad didėjant tiek stabilumo parametrui α, tiek nulių skaičiui, abiejų testų patikimumas didėja. Atlikus analogišką eksperimentą su tolygiai intervale $[0, 1]$ pasiskirsčiusiomis sekomis, buvo nustatyta, kad abu metodai vienodai atmeta suderinamumo hipotezes, o rezultatai yra trivialūs. Tiriant realias sekas nustatyta, kad net 99% Baltijos šalių sekų tenkina mišrųjį stabilųjį modelį (pagal Koutrouvelis testą).
7. Nulinių būsenų serijų ilgių pasiskirstymo tyrimas parodė, kad empirinius duomenis geriausiai aprašo Hurwitz'o dzeta dėsnis (tiko 81–95%). Šis rezultatas leidžia kelti hipotezę, kad nulinių bei vienetinių būsenų pasiskirstymai nėra atsitiktiniai, o tai reiškia, kad realios nulinių (vienetinių) būsenų sekos nėra pasiskirsčiusios pagal binominį dėsnį. Atliktas Wald-Wolfowitz ženklų kriterijaus testas parodė, kad beveik visos Baltijos šalių sekos (išskyrus ETLAT) nėra grynai atsitiktinės, su pasikliovimu lygmenimis (0.008,..., 0.1).
8. Priklausmybei būsenų sekose tirti buvo pritaikytas Hoelio pasiūlytas kriterijus. Pastebėta, kad nulinės eilės Markovo grandinių arba, kitaip sakant, Bernulio schemą atitinkančių sekų praktiškai nėra. Esant $\gamma = 10\%$ pasikliovimo lygmeniui 4 eilės Markovo grandinių yra apie 50%, tuo tarpu esant $\gamma = 0.1\%$ pasikliovimo lygmeniui tokių sekų jau yra 95%.
9. Sukurta programinės įrangos bandomoji versija. Ši programinė priemonė leidžia generuoti atsitiktinių dydžių sekas, įvertinti pasirinktų sekų stabiliuosius parametrus bei sudaryti vertybinių popierių portfelį (iki 10 akcijų). Testavimai parodė, kad sekų parametrų vertinimo trukmė netiesiškai priklauso nuo seko ilgio, tai patvirtino ir bandymai su superkompiuteriu VILKAS.

Bendrosios išvados

Darbo tikslas – sukurti ir ištirti metodus vertybinių popierių rinkos analizei ir finansinio portfelio valdymui, remiantis finansinių sekų stabilumo hipoteze.

1. Sudarius programinę įrangą, realizuojančią stabiliųjų modelių su asimetrija parametrų vertinimą didžiausio tikėtinumo ir empirinius metodais, bei ištirus šių metodų efektyvumą laiko sąnaudų ir patikimumo prasme, nustatyta:
   1.1. laiko sąnaudų prasme efektyvesni yra robastiniai metodai (apie 95%)
   1.2. didžiausio tikėtinumo metodas yra žymiai efektyvesnis tikslumo prasme, tai patvirtina Andersono–Darlingo suderinamumo testų rezultatai
   1.3. vertinant stabiliųjų sekų parametrus didžiausio tikėtinumo metodu pastebėta, kad tikslo funkcijos (MTM) reikšmę, o tuo pačiu ir minimumo tašką stipriai įtakoja parametrų α ir σ pokyčiai, kita vertus funkcija MTM yra mažiau jautri parametrų β ir μ pokyčiams.
2. Nustačius Baltijos šalių ir tarptautinių biržų finansinių sekų (atitinkamai 64 sekos ir 27 sekos) empirinius parametrus, paaiškėjo, kad dauguma sekų yra stipriai asimetriškos ($0,1 < |\gamma_1| < 30$). Empirinis ekscesas ($\gamma_2 \neq 0$) rodo, kad sekos empirinė tankio funkcija yra smailiaviršūniškenė už Gauss'o tankio funkciją. Vadinasi, galima atmesti hipotezę, kad akcijų kainų grąžų sekos pasiskirstę pagal normalųjį Gauss'o dėsnį. Šią prielaidą pagrindžia Andersono–Darlingo bei Kolmogorovo–Smirnovo suderinamumo testų rezultatai.
3. Tarptautinių rinkų finansinių sekų α ir β parametrų įverčių išsibarstymas rodo, kad dažniausiai $1,5 \leq \alpha \leq 2$. Parametras β šiuo atveju nėra didelis, bet dažniau įgyja neigiamas reikšmes. Baltijos šalių finansinių sekų (nagrinėjant pilną seką) parametrų α ir β įverčių išsibarstymas rodo, kad $\alpha < 1,5$ ir gali įgyti reikšmes artimas 1. Tuo tarpu, Baltijos šalių finansinių sekų (kai iš sekų pašalintos nulinės grąžos) parametras α yra išsibarstęs apie $1,5$, bet gali įgyti reikšmes artimas 1 ar 2. Parametras β gali įgyti mažas teigiamas reikšmes, tačiau kai kuriais atvejais gali išaugti iki kritinių reikšmių ($> 0,5$).
4. Sekų homogeniškumo testų eksperimentinis patikimumo tyrimas parodė, kad Andersono kriterijus vidutiniškai homogeniškas sekas atpažįsta geriau nei Smirnovo kriterijus. Andersono kriterijus tiriant realių sekų homogeniškumą su jų dalinių sumų sekomis nustatyta, kad 21 išsivysčiusių rinkų seka tenkina pagrindinę stabiliųjų dydžių savybę, o analizuojant Baltijos šalių sekas nustatyta, kad tik dviem atvejais (ETLAT ir LFO1L) ir tik pašalinus nulines grąžas, sekos yra homogeniškos su agreguotomis sekomis.
5. Tarptautinių kompanijų sekų savastingumo tyrimas pagal absoliutinių momentų metodą parodė, kad visos 27 sekos yra multifraktalinės, o 9 iš jų – savastingos. Analogiškai tiriant Baltijos šalių pilnas finansines seks nustatyta, kad 49 sekos yra multifraktalinės, 8 iš jų –savastingos. Pašalinus nulines grąžas gautos 27 multifraktalinės sekos iš kurių 9 – savastingos.
6. Sudarytas mišrusis stabilusis modelis leidžia tirti pasyvumo efektą besivystančiose rinkose. Finansines sekas siūloma modeliuoti mišriuoju stabiliuoju dėsniu. Ávestos šio modelio tikimybinio tankio, pasiskirstymo bei charakteringosios funkcijos. Pasiūlyti metodai leidžia įvertinti mišriojo modelio parametrus esant priklausomoms ir nepriklausomoms grąžų būsenoms. Laukimų trukmę tarp dviejų akcijos kainos pasikeitimų (nulinių grąžų serijų ilgių pasiskirstymą) siūloma modeliuoti ne binominiu, bet Hurwitz dzeta dėsniu.
7. Patikrinus Baltijos šalių rinkų sekų parametrų suderinamumą, pagal Koutrouvelio bei modifikuotą χ^2 (Romanovskio) metodus, nustatyta, kad 99% tenkina mišrųjį-stabilųjį modelį (pagal Koutrouvelis testą). Šių metodų patikimumo tyrimas parodė, kad didėjant tiek stabilumo parametrui α, tiek nulių skaičiui, abiejų testų patikimumas didėja. Atlikus analogišką eksperimentą su tolygiai intervale [0,1] pasiskirsčiusiomis sekomis, nustatyta, kad abu metodai vienodai atmeta suderinamumo hipotezes, o rezultatai yra trivialūs.
8. Nulinių būsenų serijų ilgių pasiskirstymo tyrimas parodė, kad empirinius duomenis geriau-

siai aprašo Hurwitz'o dzeta dėsnis (tiko 81-95%).Tai leidžia kelti hipotezę, kad nulinių bei vienetinių būsenų pasiskirstymai nėra atsitiktiniai. Atliktas Wald-Wolfowitz ženklų kriterijaus testas parodė, kad beveik visos Baltijos šalių sekos, išskyrus ETLAT, nėra grynai atsitiktinės su pasikliovimu lygmenimis $(0,008, ..., 0,1)$.

9. Priklausomybei būsenų sekose tirti pritaikius Hoelio kriterijų, pastebėta, kad nulinės eilės Markovo grandinių arba Bernulio schemą atitinkančių sekų beveik nėra. Esant $\phi = 10\%$ pasikliovimo lygmeniui 4-tos eilės Markovo grandinių yra apie 50% .
10. Aprašytieji ryšio tarp atskirų akcijų grąžų nustatymo metodai leidžia ryšį tarp sekų nustatyti netgi tuo atveju, kai neegzistuoja vieno ar kito atsitiktinio dydžio dispersija. Tam siūloma naudoti kovariantiškumo (simetriniams a.d.) ir kodiferencijos matus, kurių reikšmingumą galima nustatyti savirankos metodu.
11. Vertybinių popierių portfelio sudarymui, kai duomenys yra iš stabiliosios imties, siūloma naudoti modifikuotą Markowitz'o modelį. Šiame modelyje vietoje kovariacijų matricos siūloma naudoti kodiferencijų arba kovariantiškumo matricas.
12. Sukurta programinės įrangos bandomoji versija (*www.kabasinskas.tk*). Ši programinė priemonė leidžia generuoti atsitiktinių dydžių sekas, įvertinti pasirinktų sekų stabiliuosius parametrus bei sudaryti vertybinių popierių portfelį (iki 10 akcijų). Testavimai parodė, kad sekų parametrų vertinimo trukmė netiesiškai priklauso nuo sekos ilgio, tai patvirtino ir bandymai su superkompiuteriu VILKAS.

Literatūros sąrašas

[1] P. Abry and D. Veitch (1998). Wavelet analysis of long-range dependence traffic. *IEEE Transactions on Information Theory* **4**(1) 2–15.

[2] C. Acerbi, C. Nordio and C. Sirtori (2001). Expected shortfall as a tool for financial risk management. Working paper, available at *http://www.gloriamundi.org*.

[3] C.J. Adcock and N. Meade (1994). A simple algorithm to incorporate transaction costs in quadratic optimisation. *Eur. J. Operational Res.* **79** 85–94

[4] P. Albrecht (2004). Risk measures. *In*: Encyclopedia for actuarial science. John Wiley & Sons, New York.

[5] R. Armañanzas, J. A. Lozano (2005). A Multiobjective Approach to the Portfolio Optimization Problem. The 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2005, *Evolutionary Computation* **2** 1388–1395.

[6] P. Arzner and F. Delbaen (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance* **9** 203–228.

[7] L. Bachelier (1964), Theory of Speculation. *In*: P. Cootner (ed.), The Random Character of Stock Market Prices, MIT Press, Cambridge, MA. (Originaliai išleistas 1900 metais).

[8] S. Barami (2006). Portfolio Optimization with Optimal Search, available at *http://www.cs.ucla.edu/siavosh/Portfolio_ Selection_ final.pdf*

[9] F. Bassi, P. Embrechts and M. Kafetzaki (1998). Risk management and quantile estimation. *In*: R. Adler et al.(eds.), A Practical Guide to Heavy Tails, Birkhäuser, Boston, 111–130.

[10] V.C. Bawa, E.L. Elton and M.J. Gruber (1979). Simple rules for optimal portfolio selection in stable Paretian markets, *Journal of Finance* **34** 1041–1047.

[11] I. Belovas, A. Kabašinskas ir L. Sakalauskas (2005). Vertybinių popierių rinkos stabiliųjų modelių tyrimas. Konferencijos „Informacinės technologijos 2005" medžiaga, Technologija, Kaunas, pp. 439–462.

[12] I. Belov, A. Kabašinskas ir L. Sakalauskas (2006). A study of stable models of stock markets. *Information Technology And Control* **35**(1) 34–56.

[13] I. Belov, A. Kabašinskas ir L. Sakalauskas (2006). Returns modelling problem in the Baltic equity market. Proceedings of the 5th International Conference on Operational Research: Simulation and Optimization in Business and Industry, Kaunas, Technologija, pp. 3–8.

[14] M. Bertocchi, R.Giacometti, S. Ortobelli and S. Rachev (2005). The impact of different distributional hypothesis on returns in asset allocation. *Finance Letters* **3**(1) 17–27.

[15] M.J. Best and R.R. Grauer (1991). Sensitivity analysis for meanvariance portfolio problems. *Management Sci.* **37** 981–989.

[16] A. Biglova, S. Ortobeli, S.Z. Rachev and S. Stoyanov (2004). Different approaches to risk estimation in portfolio theory. *Journal of Portfolio Management* **31** 103–112.

[17] F. Black and M. Scholes (1973). J*ournal of Political Economy* **81** 637–659.

[18] G.C.E. Boender (1997). A hybrid simulation/optimization scenario model for asset/liability management. *European Journal of Operation Research* **99** 126–135.

[19] B. Brorsen and S. Yung (1990). Maximum likelihood estimates of symmetric stable distribution parameters. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* **19**(14) 1459–1464.

[20] C.L. Brown and S. Saliu (1999). Testing of alpha-stable distributions with the characteristic function. Higher-order statistics. Proceedings of the IEEE Signal Processing Workshop on 14–16 June 1999, pp. 224–227.

[21] X. Cai, K.-L. Teo, X. Yang and X.Y. Zhou (2000). Portfolio optimization under a minimax

rule. *Management Science, INFORMS* **46**(7) 957–972.

[22] J.M. Campa, P.H.K. Chang and R.L. Reider (1997). Implied exchange rate distributions: Evidence from OTC option markets. Technical Report, Stern School of Business, New York University.

[23] D.R. Cariño and W.T. Ziemba (1998). Formulation of the Russel–Yasuda–Kasai financial planning model. *Operations Res.* **46** 1–17.

[24] L. Carvalho, J. Angeja, A. Navarro (2005). A new packet loss model of the IEEE 802.11g wireless network for multimedia communications. *Consumer Electronics. IEEE Transactions* **51**(3) 809–814.

[25] T.W. Chamberlain, C.S. Cheung and C.C. Kwan (1990). Optimal portfolio selection using the general multi-index model: A stable-Paretian framework. *Decision Sciences* **21** 563–571.

[26] B.N. Cheng and S.T. Rachev (1995). Multivariate stable future prices. *Mathematical Finance* **5** 133–153.

[27] G. Christoph and K. Schreiber (1998). Discrete stable random varibles. *Statist. Probab. Lett.* **37** 243–247.

[28] G.M. Constantinides and A.G. Malliaris (1995). Portfolio theory Finance. R.A. Jarrow, V. Maksimovic and W.T. Ziemba (eds), Elsevier, Amsterdam, pp. 1–30.

[29] R. Cont (2006). Long range dependence in financial markets. Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, France, available at *www.cmap.polytechnique.fr/~rama.*

[30] A. Cowles (1933). Can stock market forecasters forecast? *Econometrica* **1**(3) 309–324.

[31] R.S. Dembo and D. Rosen (1999). The practice of portfolio replication: a practical overview of forward and inverse problems. *Annals of Operations Research* **85** 267–284.

[32] A.S. De Vany and W.D. Walls (2004). Motion picture profit, the stable Paretian hypothesis, and the curse or the superstar. *Journal of Economic Dynamics & Control* **28** 1035–1057.

[33] S.A. Dostoglou and S.T. Rachev (1999). Stable distributions and the term structure of interest rates, *Math. Comput. Modelling* **29** 57–60, 79.

[34] A. Duarte (1999). Fast Computation of Efficient Portfolios, *Journal of Risk* **1**(4) 71–94.

[35] G. Dueck, P. Winker (1992). New Concepts and Algorithms for Portfolio Choice. *Applied Stochastic Models and Data Analysis* **8** 159–178.

[36] W.H. DuMouchel (1971). Stable distributions in statistical inference. PhD thesis, Dept. of Statistics, Yale University, USA.

[37] W.H. DuMouchel (1973). On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution. *The Annals of Statistics* **1**(5) 948–957.

[38] J. Dupačová (2002). Applications of stochastic programming: Achievements and questions. *European Journal of Operation Research* **140** 281–290.

[39] P. Embrechts (2002). Selfsimilar Processes. Princeton University Press, USA.

[40] J.G. Evertsz and B.B. Mandelbrot (1992). Multifractal measures. *In*: H.O. Peitgen, H. Jurgens and D. Saupe (eds), Chaos and Fractals, Springer- Verlag, New York, pp. 921–953, Appendix B.

[41] E. Fama (1965). The behavior of stock market prices. *Journal of Business* **38** 34–105.

[42] E. Fama (1963). Mandelbrot and stable Paretian hypothesis. *Journal of Business* **36** 420–429.

[43] E.F. Fama (1965). Portfolio analysis in a stable Paretian market. *Management Science* **11** 404–419.

[44] E. Fama and M.H. Miller (1972). The Theory of Finance. Holt, Rinehart and Winston, New

York.

[45] E. Fama and R. Roll (1968). Some properties of symmetric stable distributions. *Journal of American Statistical Association* **63** 817–836.

[46] E. Fama and R. Roll (1971). Parameter estimates for symmetric stable distributions. *Journal of American Statistical Association* **66** 331–338.

[47] W. Feller (1971). An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol 2. Wiley, London.

[48] B.D. Fielitz and E.W. Smith (1971). Asymmetric stable distributions of stock price changes. *Journal of American Statistical Association* **67** 331–338.

[49] P.C. Fishburn (1977). Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. *American Economic Review* **67** 116–126.

[50] H. Fofack and J.P. Nolan (2001). Distribution of parallel exchange rates in African countries. *Journal of International Money and Finance* **20** 987–1001.

[51] H. Fofack (1998). Distribution of parallel market premium under stable alternative modeling. PhD thesis, American university, Department of Statistics.

[52] R. Fox and M.S. Taqqu (1986). Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series. *The Annals of Statistics* **14** 517–532.

[53] B. Gamrowski and S.T. Rachev (1996). Testing the validity of value-at-risk measures. *In*: C. Heyde et al. (eds), Applied Probability, Springer-Verlag, Berlin.

[54] J. Geweke and S. Porter-Hudak (1983). The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis* **4** 221–238.

[55] M. Gilli and E. Këllezi (2001), A global optimization heuristic for portfolio choice with VaR and expected shortfall. *In*: P. Pardalos and D.W. Hearn, eds, Computational Methods in Decision-making, Economics and Finance. Applied Optimization Series, Kluwer Academic Publishers.

[56] L. Giraitis, R. Leipus, P. M. Robinson and D. Surgailis (2004). LARCH, leverage, and long memory. *Journal of Financial Econometrics* **2** 177–210

[57] B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogorov (1949), Limit distributions for sums of independent random variables. Moscow-Leningrad (Russian); English translation Addison-Wesley, Cambridge, MA.

[58] R. Gonin and J. Money (1989). Non-linear L_p-Norm Estimation. Marcel Dekker, Inc, New York.

[59] I. Gotoh and H. Konno (2000). Third degree stochastic dominance and mean risk analysis. *Management Science* **46** 289–301.

[60] C.W. Granger and D. Orr (1972). Infinite variance and research strategy in time series analysis. *Journal of the American Statistical Society* **67**(338) 275–285.

[61] G. Hanoch and H. Levy (1969) The efficiency analysis of choices involving risk. *Rev. Econ. Stud.* **36** 335–346.

[62] T. Hesterberg, S. Monaghan, D.S. Moore, A. Clipson, R. Epstein (2003). Bootstrap Methods and Permutation Tests, Companion Chapter 18 to The Practice of Business Statistics, W. H. Freeman and Company, New York.

[63] M. Hoechstoetter, S.Z. Rachev and F.J. Fabozzi (2005). Distributional analysis of the stocks comprising the DAX 30. *Probability and Mathematical Statistics* **25**(1) 363–383.

[64] P.G. Hoel (1954). A test for Markoff chains. *Biometrika* **41**(3/4) 430–433.

[65] J. Holtsmark (1919). Uber die Verbreiterung von Spektrallinien. *Annalen der Physik* **58** 577–630.

[66] M.D. Horniman, N.J. Jobst, C.A. Lucas and G. Mitra (2000). Constructing efficient portfolios with discrete constraints – a computational study. Technical report TR/06/00, Department of Mathematical Sciences, Brunel University, UK.

[67] S.H. Hurst, E. Platen and S.T. Rachev (1999). Option pricing for a logstable asset price model. *Mathl. Comput. Modelling* **29**(10–12) 105–119.

[68] A. Janicki, I. Popova, R. Ritchken and W. Woyczynski (1997). Option pricing bounds in an a-stable security market. *Communication in Statistics–Stochastic Models* **13** 817–839.

[69] A. Janicki and A. Weron (1994). Simulation and chaotic behavior of α-stable stochastic processes. Marcel Dekker Inc., New York–Basel.

[70] Ph. Jorion (1997). Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk. McGraw-Hill, New York.

[71] J.G. Kallberg and W.T. Ziemba (1983). Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems. *Management Science* **29** 1257–1276.

[72] T. Karagiannis, M. Faloutsos and M. Molle (2003). A user-friendly self-similarity analysis tool. *In*: Tools and Technologies for Networking Research and Education, ACM SIGCOMM Computer Communication Review.

[73] R. Karandikar and S.T. Rachev (1995). A generalized binomial model and option formulae for subordinated stock price processes. *Probability and Mathematical Statistics* **15** 427–447.

[74] M.G. Kendall (1953). The Analytics of Economic Time Series, Part 1: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society* **96** 11–25.

[75] A.I. Kobzar (1978). Matematiko–Statisticheskie Metody v Elektronnoj Technike. Nauka, Moskva (in Russian).

[76] P.S. Kokoszka and M.S. Taqqu (1996). Parameter estimation for infinite variance fractional ARIMA. *The Annals of Statistics* **24** 1880–1913.

[77] H. Konno (1988). Portfolio optimization using 1_L risk function. IHSS report, Institute of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology, pp. 88–89.

[78] H. Konno and H. Yamazaki (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo Stock Market. *Management Science* **37** 519–531.

[79] V.S . Koroliuk, N.I. Portenko, A.V. Skorokhod and A.F. Turbun (1985). Spravochnik po Teorii Verojatnostej i Matematicheskoj Statistike. Nauka, Moskva (in Russian).

[80] I.A. Koutrouvelis (1980). A goodness-of-fit test of simple hypotheses based on the empirical characteristic function. *Biometrika* **67**(1) 238–240

[81] I.A. Koutrouvelis (1980). Regression – type estimation of the parameters of stable laws. *J. Amer. Statist. Assoc.* **75** 918–928.

[82] I.A. Koutrouvelis (1981). An iterative procedure for the estimation of the parameters of the stable law. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* **10** 17–28.

[83] I.A. Koutrouvelis and J.A. Kellermeier (1981). Goodness-of-fit test based on the empirical characteristic function when parameters must be estimated. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)* **43**(2) 173–176.

[84] S. Kring, S.T. Rachev, M. Höchstötter, F.J. Fabozzi (2007). Estimation of α-stable sub-Gaussian distributions for asset returns. Technical report, Dept. Statistics & Applied Probability, University of California, Santa Barbara, CA.

[85] J. Kruopis (1993). Matematinė statistika. Mokslas, Vilnius.

[86] P. Krokhmal, J. Palmquist and S. Uryasev (2002). Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *The Journal of Risk* **4**(2) 11–27

[87] I.P. Levin (1999). Relating Statistics and Experimental Design: An Introduction. Quantita-

tive Applications in the Social Sciences, series 125. Sage Publications, Thousand Oaks.

[88] P. Lévy (1925). Calcul des probabilities. Gauthier-Villarset et Cie, Paris.

[89] P. Lévy (1954). Theorie de l'addditions des variables allatoires. 2-me ed. Gauthier-Villarset, Paris.

[90] A.W. Lo (1991). Long-term memory in stock market prices. *Econometrica* **59** 1279–1313.

[91] B.B. Mandelbrot (1960). The Pareto-Levy law and the distribution of income. *International Economic Revue* **1** 79–106.

[92] A. McNeil, R. Frey and P. Embrechts (2005). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press.

[93] B.B. Mandelbrot (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business* **36** 394–419.

[94] B.B. Mandelbrot (1963). New methods in statistical economics. *Journal of Political Economy* **71** 421–440.

[95] B.B. Mandelbrot (1964). The variation of certain speculative prices. *In*: P. Cootner (ed.), The random character of stock prices. MIT Press, Cambridge.

[96] B.B. Mandelbrot and J.R. Wallis (1969). Computer experiments with fractional Gaussian noises, (Parts 1,2,3), *Water Resources Research* **5** 228–267.

[97] B.B. Mandelbrot (1975). Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **31** 271–285.

[98] B.B. Mandelbrot and M.S. Taqqu (1979). Robust R/S analysis of long-run serial correlation. Proceedings of the 42nd Session of the International Statistical Institute, Manila. *Bulletin of the International Statistical Institute* **48**(2) 69–104.

[99] H.M. Markowitz (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance* **7** 77–91.

[100] H.M. Markowitz (1956). The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. Naval Research Logistics Quarterly **3**, pp. 111–133.

[101] H.M. Markowitz (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. Wiley, New York, NY.

[102] D. Martin, S. Rachev and F. Siboulet (2003). Phi-alpha optimal portfolios and extreme risk management. *Wilmott Magazine of Finance* **November/2003** 70–83.

[103] J.H. McCulloch (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parametres. *Comun. Stast – Simula.* **15**(4) 1009–1136.

[104] G. Mitra, T. Kyriakis, C. Lucas and M. Pirbhai (2003). A review of portfolio planning: Models and systems. *In*: S.E. Satchell and A.E. Scowcroft, eds, Advances in Portfolio Construction and Implementation, Butterworth-Heinemann, Oxford, pp. 1–39.

[105] S. Mittnik, S. Rachev, T. Doganoglu and D. Chenyao (1999). Maximum likelihood estimation of stable Paretian models. *Mathematical and computer modeling* **29** 275–293.

[106] S. Mittnik, S.T. Rachev and M.S. Paolella (1998). Stable Paretian modeling in finance: Some empirical and theoretical aspects. *In*: F.L. Adler, R. Feldman and M.S. Taqqu (eds), A Practical Guide to Heavy Tails. Birkhliuser, Boston, pp. 79–110.

[107] C. L. Nikias and M. Shao (1995). Signal Processing With Alpha-Stable Distributions and Applications. Wiley, New York.

[108] J. Nowicka-Zagrajek and A. Wylomanska (2006). The dependence structure for PARMA models with α-stable innovations. *Acta Physica Polonica* **B37**(11) 3071–3081.

[109] W. Ogryczak and A. Ruszczynski (1999). From stochastic dominance to mean-risk models:

Semideviations as risk measures. *European Journal of Operational Research* **116** 33-50.

[110] S. Ortobelli, S.T. Rachev, S. Stoyanov, F.J. Fabozzi and A. Biglova (2005). The proper use of risk measures in portfolio theory. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **8**(8) 1107–1134.

[111] A.S. Paulson, E.W. Holcomb and R.A. Leitch (1975). The estimation of the parameters of the stable laws. *Biometrika* **62**(1) 163–170.

[112] C.S. Pedersen and S.E. Satchell (1998). An extended family of financial risk measures. *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* **23** 89–117.

[113] C.K. Peng, S.V. Buldyrev, M. Simons, H.E. Stanley and A.L. Goldberger (1994). Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review* **E 49** 1685–1689.

[114] E.E. Peters (1996). Chaos and the order in the capital markets. A New View of Cycles, Prices and Market Volatility, 2nd edition. John Wiley & Sons Inc., New York.

[115] G. Pflug (2000). Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. *In*: S. Uryasev (ed.), Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications. Kluwer Academic Publishers, London.

[116] S.J. Press (1982). Applied Multivariate Analysis, 2nd edition. Robert E. Krieger, Malabar.

[117] S. J. Press (1972). Estimation in univariate and multivariate stable distribution. *J. Amer. Statist. Assoc.* **67** 842–846.

[118] A. Puelz (1999). Value-at-Risk Based Portfolio Optimization. Working paper, Southern Methodist University, USA.

[119] S.T. Rachev, J.L. Kim and S. Mittnik (1997). Econometric modeling in the presence of heavy-tailed innovations: A survey of some recent advances. *Communication in Statistics – Stochastic Models* **13** 841–866.

[120] S.T. Rachev, C. Menn, F.J. Fabozzi (2005). Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio selection, and Option Pricing. John Wiley, Finance, New York.

[121] S.T. Rachev and S. Mittnik (1993). Modeling asset returns with alternative stable distributions. *Econometric Reviews* **12**(3) 261–330.

[122] S.T. Rachev and S. Mittnik (2000). Stable Paretian models in Finance. John Wiley&Sons, Chichester, NY.

[123] S.T. Rachev and L. Ruschendorf (1994). On the Cox-Ross and Rubinstein model for option pricing. *Theory of Probability Applied* **39** 150–190.

[124] S.T. Rachev and G. Samorodnitsky (1993). Option pricing formula for speculative prices modelled by subordinated stochastic processes, vol. **19**, Pliska, Studia Mathematika Bulgarica, Bulg. Academy of Sciences, pp. 175–190.

[125] S. T. Rachev, Y. Tokat, E.S. Schwartz (2003). The stable non-Gaussian asset allocation: a comparison with the classical Gaussian approach. *Journal of Economic Dynamics & Control* **27** 937–969.

[126] P.M. Robinson (1995). Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *The Annals of Statistics* **23** 1630–1661.

[127] R.T. Rockafeller and S. Uryasev (2000). Optimization of conditional value at risk. *The Journal of Risk* **2**(3) 21-41.

[128] R.T. Rockafellar and S. Uryasev (2001). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance* **26** 1443–1471.

[129] R.T. Rockafell, S. Uryasev and M. Zabarankin (2002). Deviation measures in risk analysis and optimization. Research report 2002-7, Risk Management and Financial Engineering

Lab/Center for Applied Optimization, University of Florida, Gainsville.

[130] D. Roman, K.D. Dowman and G. Mitra (2004). Portfolio optimization models and properties of return distributions. Technical report for CARISMA: The Center for the analysis of risk and Optimization Modelling Applications, Department of Mathematical Sciences Brunel University, UK.

[131] S.A. Ross (1976), The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory* **13** 341–360.

[132] A. Rudd and B. Rosenberg (1979). Realistic portfolio optimisation. Portfolio Theory – Studies in the Management Sciences, vol. 11. *In*: E.J. Elton and M.J. Gruber (eds), North-Holland, Amsterdam, pp. 21–46.

[133] G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu (2000). Stable non-Gaussian random processes, stochastic models with infinite variance. Chapman & Hall, New York–London.

[134] The SELFIS Tool, available at *http://www.cs.ucr.edu/~tkarag*.

[135] H. Shalit and S. Yitzhaki (1984). Mean-Gini, portfolio theory, and the pricing of risky assets. *Journal of Finance* **39** 1449–1468.

[136] W.F. Sharpe (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management Science* **9** 277–293.

[137] A.V. Skorochod (1954). Asimptoticheskie formuli dla ustoichivix zakonov paspredelenia. *Dokladi akademi nauk SSSR* XCVII **5** 731–734.

[138] M.G. Speranza (1996). A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the Milan stock market. *Computers Operations Res.* **23** 433–441.

[139] S.V. Stoyanov, S.T. Rachev and F.J. Fabozzi (2005). Optimal Financial Portfolios. Technical report.

[140] B.K. Stone (1973). A general class of three-parameter risk measures. *Journal of Finance* **28** 675–685.

[141] V. Teverovsky and M.S. Taqqu (1995). Testing for long-range dependence in the presence of shifting means or a slowly declining trend using a variance-type estimator. Preprint.

[142] M.S. Taqqu and V. Teverovsky (1996). Semi-parametric graphical estimation techniques for long-memory data. *In*: P.M. Robinson and M. Rosenblatt (eds), Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis. Volume II: Time Series Analysis in Memory of E.J. Hannan. *Lecture Notes in Statistics* **115**, pp. 420–432. Springer-Verlag, New York.

[143] M.S. Taqqu, V. Teverovsky and W. Willinger (1995). Estimators for long-range dependence: an empirical study. *Fractals* **3**(4) 785–798. Reprinted in C.J.G. Evertsz, H-O Peitgen and R.F. Voss (eds) (1996), Fractal Geometry and Analysis. World Scientific Publishing Co., Singapore.

[144] M.S. Taqqu, V. Teverovsky and W. Willinger (1997). Is network traffic self-similar or multifractal? *Fractals* **5** 63–73.

[145] M.S. Taqqu and V. Teverovsky (1998). Estimating long-range dependence in finite and infinite variance series. *In*: R. Adler, R. Feldman and M.S. Taqqu (eds), A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques for Analyzing Heavy-Tailed Distributions. Birkhauser, Boston, pp. 177–217.

[146] Y. Tokat and E. Schwartz (2002). The impact of fat tailed returns on asset allocation. *Mathematical Methods of Operations Resaerch* **55** 165–185.

[147] R.H. Tütüncü (2003). Optimization in Finance. Advanced Lecture on Mathematical Science and Information Science. Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.

[148] S. Uryasev (2000). Conditional value-at-risk: optimization algorithms and applications. *Fi-*

nancial Engineering News **14** 1–5.

[149] E. Valakevičius (2000). Investicijų mokslas. Technologija, Kaunas.

[150] J. Von Neumann and O. Morgenstern (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[151] S.A. Zenios (1995). Asset/liability management under uncertainty for fixed income securities. *Ann. Operations Res.* **59** 77–98. Reprinted *in*: J.M. Mulvey and W.T. Ziemba (eds)(1998), World Wide Asset and Liability Modeling, Cambridge University Press, Cambridge.

[152] S.A. Zenios and W.T. Ziemba (2003). Handbook of Asset Liability Management. North-Holland, The Netherlands.

[153] W.T. Ziemba (1974). Choosing investment portfolios when the returns have stable distributions. *In*: P.L. Hammer and G. Zoulendijk (eds), Mathematical Programming in Theory and Practice. North-Holland, Amsterdam, pp. 443–482.

[154] W.T. Ziemba and J. Mulvey (1999). World Wide Asset and Liability Modeling. Cambridge University Press.

[155] V.M. Zolotariov (1954). Vyrazhenie plotnosti ustoichivogo raspredelinija s pokazateliem α bolshim edinitsy cherez plotnost s pokazateliem $1/\alpha$. *Doklady Akademii Nauk USSR* **98** 735–738.

[156] V.M. Zolotariov (1983). Odnomernyje Ustojchivyje Raspredelenyja. Nauka, Moskva.

[157] a) A.Weron and R.Weron (1995). Computer simulation of Levy stable variables and processes. *Lecture Notes in Physics* **457** 379–392;
b) R.Weron (1996). On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables. *Statistics and Probability Letters* **28** 165–171.

[158] Web page of Baltic Stock exchanges, available at *www.omxgroup.com* (checked 01.04.2007).

[159] G.A. Whitmore, M.C. Findlay (eds) (1978). Stochastic Dominance: An Approach to Decision-Making Under Risk. D.C. Heath, Lexington, MA.

[160] G. Xiaohu, Z. Guangxi and Z. Yaoting (2004). On the testing for alpha-stable distributions of network traffic. *Computer Communications* **27** 447–457.

[161] M.R. Young (1998). A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Management Science* **44** 673–683.

Priedas A. Papildomos lentelės

A.1. Lentelė. Empirinės duomenų sekos charakteristikos (vidurkis, standartas, simetrijos koef. ir ekscesas) ir Anderson–Darling statistikos tikimybė (tikrinant normalumą).

Indeksas	Empirinės charakteristikos				
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma_1}$	$\hat{\gamma_2}$	A-D
ISPIX	0	0,0002	-0,0203	2,1077	0,99970
AMEX	-0,0004	0,0003	0,4237	11,725	0,99999
AT&T	0,0002	0,0005	18,403	1190,7	0,99999
BP	0	0,0006	14,415	426,03	0,99999
FCHI	-0,0002	0,0002	0,1002	2,7032	0,99999
CAC	0,0002	0,0010	20,754	739,51	0,99999
Coca	0,0001	0,0006	19,445	660,44	0,99999
GDAXI	-0,0003	0,0002	0,1928	3,5719	0,99999
DJC	-0,0001	0,0001	0,5157	7,4797	0,99999
DJ	0	0,0004	1,9248	41,859	0,99999
DJIA	0,0002	0,0001	-0,9114	26,040	0,99999
DJTA	0,0001	0,0001	-0,1545	15,259	0,99999
FIAT	0,0004	0,0007	-3,7374	126,16	0,99999
GE	0,0001	0,0006	20,253	749.55	0,99999
GM	0,0001	0,0003	5,3537	204,43	0,99999
IBM	0,0002	0,0006	23,209	1114,1	0,99999
LMT	-0,0003	0,0008	12,869	476,76	0,99999
MCD	0	0,0007	11,471	284,85	0,99999
MER	-0,0002	0,0009	7,6567	184,51	0,99999
MSFT	0	0,0013	9,9985	180,47	0,99999
NASDAQ	0,0006	0,0010	7,9646	188,53	0,99999
NIKE	-0,0003	0,0009	9,2816	223,60	0,99999
NIKKEI	0	0,0002	0,1113	7,6903	0,99999
Phile	-0,0001	0,0010	16,206	663,69	0,99999
S&P	-0,0003	0,0001	1,3313	35,117	0,99999
SONY	-0,0002	0,0005	4,8083	150,51	0,99999

A.2. Lentelė. Duomenų sekų empirinės charakteristikos (vidurkis, standartas, simetrijos koef. ir ekscesas) ir Anderson-Darling statistikos tikimybė (tikrinant normalumą)

Akcija	Sekos be nulinių grąžų					pilnos sekos				
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma_1}$	$\hat{\gamma_2}$	A-D krit	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma_1}$	$\hat{\gamma_2}$	A-D krit
ALT1L	0,0031	0,0263	0,4698	2,0143	0,99834	0,0013	0,0005	0,9352	8,7331	0,99999
ANK1L	0,0014	0,0415	-0,0994	0,0001	0,98217	0,0005	0,0008	-0,0718	6,4190	0,99999
APG1L	0,0062	0,0226	-8,3184	139,6726	0,99999	0,0023	0,0008	-13,0257	365,0884	0,99999
ATK1L	0,0121	0,0940	6,4767	69,3959	0,99999	0,0025	0,0052	14,4350	344,4148	0,99999
BAL1R	0,0046	0,0298	14,5760	327,6707	0,99999	0,0024	0,0019	20,5190	647,6244	0,99999
BLT1T	0,0028	0,0284	-7,8599	147,6269	0,99999	0,0015	0,0013	-10,6736	278,9829	0,99999
DKR1L	0,0024	0,0307	0,5721	1,1238	0,99834	0,0010	0,0007	1,0238	6,8092	0,99999
DPK1R	0,0055	0,0570	0,0294	-0,8370	0,98000	0,0020	0,0017	0,3037	2,8973	0,99999
EKR1L	0,0001	0,0266	0,0511	2,1056	0,99999	0,0001	0,0009	0,0670	4,8984	0,99999
ETLAT	-0,0006	0,0124	-21,1164	644,0050	0,99999	-0,0005	0,0008	-22,5950	737,4174	0,99999
GRD1R	0,0050	0,0317	-0,0654	1,7172	0,99793	0,0023	0,0008	0,1890	7,3324	0,99999
GRG1L	0,0043	0,0259	0,3045	1,3696	0,99880	0,0022	0,0006	0,6731	5,6024	0,99999
GUB1L	0,0023	0,0450	-5,9720	64,1459	0,99997	0,0011	0,0034	-8,5052	133,8511	0,99999
GZE1R	0,0022	0,0173	-0,0386	8,3435	0,99999	0,0014	0,0006	0,0415	13,9738	0,99999
HAE1T	-0,0004	0,0248	-10,0294	153,1925	0,99999	-0,0002	0,0017	-13,1418	264,6663	0,99999
IVL1L	0,0062	0,0260	0,2496	1,1396	0,99978	0,0031	0,0006	0,7079	5,2589	0,99999
KBL1L	0,0036	0,0286	6,1048	93,4439	0,99999	0,0016	0,0011	9,3165	215,4559	0,99999
KJK1L	0,0087	0,0407	0,3061	0,7736	0,92671	0,0016	0,0006	1,5523	17,5685	0,99999
KLEAT	0,0061	0,0614	5,7669	111,7835	0,99999	0,0023	0,0047	9,5853	305,0954	0,99999
KLV1T	0,0026	0,0484	-3,1018	39,1929	0,99999	0,0014	0,0029	-4,1442	74,3572	0,99999
KNF1L	-0,0011	0,0271	-10,4531	158,1977	0,99999	-0,0006	0,0018	-14,7056	314,6091	0,99999
KNR1L	0,0009	0,0432	1,3271	7,1023	0,92200	0,0002	0,0009	2,6350	34,9196	0,99999
LBS1L	0,0001	0,0316	0,2951	1,0918	0,99959	0,0000	0,0006	0,4676	7,0887	0,99999
LDJ1L	0,0021	0,0196	0,3825	3,7456	0,99997	0,0013	0,0005	0,5898	7,8349	0,99999
LEL1L	0,0045	0,0296	0,5979	1,8983	0,99769	0,0029	0,0010	0,9015	4,8147	0,99999
LEN1L	0,0017	0,0276	-8,1176	122,7273	0,99999	0,0009	0,0015	-11,2832	241,5299	0,99999
LFO1L	0,0030	0,0353	0,6855	0,9862	0,99793	0,0010	0,0007	1,4166	9,5189	0,99999
LJL1L	0,0021	0,0516	0,3195	-0,3319	0,99937	0,0007	0,0012	0,6539	4,6700	0,99999
LLK1L	0,0040	0,0345	0,1043	0,0990	0,98317	0,0013	0,0006	0,5258	6,7898	0,99999
LME1R	0,0042	0,0412	0,1394	0,9749	0,99970	0,0020	0,0015	0,3625	5,2006	0,99999
LNS1L	0,0020	0,0298	0,0613	1,1627	0,99973	0,0010	0,0007	0,2080	5,6344	0,99999
LSC1R	0,0035	0,0292	0,0061	0,0147	0,99971	0,0018	0,0006	0,2055	2,6682	0,99999
LTK1L	0,0000	0,0148	0,1355	4,2283	0,99997	0,0000	0,0003	0,1583	6,7711	0,99999
MKO1T	0,0022	0,0180	-14,0903	307,0030	0,99999	0,0015	0,0011	-17,2359	463,1295	0,99999
MNF1L	0,0033	0,0237	2,6375	28,0659	0,99998	0,0022	0,0008	3,3199	43,4710	0,99999
MZE1L	0,0059	0,0439	-0,0120	-0,1057	0,68213	0,0024	0,0013	0,2769	4,1072	0,99999
NDL1L	0,0060	0,0469	-1,6435	11,8376	0,80589	0,0009	0,0006	-3,6388	93,7616	0,99999
NRM1T	0,0000	0,0111	-23,7207	730,4190	0,99999	0,0000	0,0007	-26,3245	900,0363	0,99999
OLF1R	0,0066	0,0530	-0,1334	-0,1770	0,84774	0,0028	0,0019	0,0566	3,5541	0,99999
PTR1L	0,0117	0,0372	0,5192	0,8186	0,99892	0,0026	0,0006	2,1301	15,2675	0,99999
PZV1L	0,0034	0,0216	-0,0720	5,7125	0,99998	0,0017	0,0005	0,1401	14,7811	0,99999
RKB1R	0,0043	0,0348	0,2064	0,9360	0,96327	0,0017	0,0008	0,6153	7,3324	0,99999
RLK1T	0,0039	0,0418	-4,3841	61,8334	0,99999	0,0014	0,0017	-7,1573	177,0632	0,99999
RST1L	0,0034	0,0185	0,9443	10,2458	0,99999	0,0023	0,0005	1,2842	16,6040	0,99999
RSU1L	0,0016	0,0147	0,4826	3,7608	0,99999	0,0009	0,0003	0,7530	8,7488	0,99999
RTF1R	0,0071	0,0726	0,3829	0,5608	0,87665	0,0024	0,0027	0,9303	7,9026	0,99999
SAB1L	0,0012	0,0279	-9,3405	160,1865	0,99999	0,0004	0,0012	-15,4640	446,0007	0,99999
SAN1L	0,0034	0,0359	-6,2702	76,9564	0,99999	0,0013	0,0017	-9,8613	198,7710	0,99999
SKU1T	0,0004	0,0181	-14,8483	378,8222	0,99999	0,0003	0,0010	-17,4480	524,3487	0,99999
SNG1L	0,0015	0,0180	-13,3323	304,3642	0,99999	0,0008	0,0010	-17,4577	525,9907	0,99999
SRS1L	0,0037	0,0276	0,2596	2,2910	0,99998	0,0016	0,0007	0,6273	9,2489	0,99999
STU1L	0,0053	0,0303	0,2222	1,4694	0,99981	0,0020	0,0007	0,7318	8,9137	0,99999

Tęsinys kitame puslapyje...

A.3. Lentelė. Duomenų sekų empirinės charakteristikos (vidurkis, standartas, simetrijos koef. ir ekscesas) ir Anderson-Darling statistikos tikimybė (tikrinant normalumą)(tęsinys)

Akcija	Sekos be nulinių grąžų					pilnos sekos				
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma_1}$	$\hat{\gamma_2}$	A-D krit	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma_1}$	$\hat{\gamma_2}$	A-D krit
...tęsinys										
TFA1T	0,0074	0,0814	-1,1137	9,4616	0,95554	0,0027	0,0042	-1,6261	30,7884	0,99999
TKM1T	0,0020	0,0228	-10,7110	226,4130	0,99999	0,0011	0,0011	-14,1612	400,9351	0,99999
UKB1L	0,0024	0,0344	0,4007	0,7917	0,99742	0,0013	0,0011	0,6558	4,2961	0,99999
UTR1L	0,0034	0,0272	3,6482	80,1504	0,99999	0,0012	0,0009	6,4019	237,6063	0,99999
VBL1L	0,0059	0,0183	3,8121	42,1042	0,99999	0,0032	0,0005	5,3697	78,8493	0,99999
VDG1L	0,0091	0,0421	2,7058	20,4327	0,97388	0,0021	0,0009	6,1751	99,4779	0,99999
VNF1R	0,0022	0,0245	0,4700	3,2835	0,99998	0,0013	0,0006	0,7196	7,7378	0,99999
VNG1L	0,0016	0,0190	-0,1584	5,3691	0,99999	0,0010	0,0005	-0,1173	10,1724	0,99999
VNU1T	0,0003	0,0293	-8,0391	150,6940	0,99999	0,0001	0,0013	-11,1198	291,1252	0,99999
VSS1R	0,0029	0,0260	0,2316	2,0166	0,99769	0,0014	0,0006	0,5254	7,6036	0,99999
VST1L	0,1960	0,3816	23,7677	564,9354	0,99999	0,1158	12,1881	30,9166	955,8900	0,99999
ZMP1L	0,0018	0,0260	-0,0708	2,7377	0,99998	0,0008	0,0007	0,0088	9,5511	0,99999

A.4. Lentelė. Metodų rezultatų palyginimas, kai $S_{1.25}(1,0,0)$

Tikrieji parametrai	Įverčiai	MTM	Regresijos	Momentų
	Vidurkis	1,250	1,252	1,252
	Std. nuokrypis	0,048	0,062	0,051
$\alpha = 1,25$	Mediana	1,249	1,251	1,254
	Minimali reikšmė	1,098	1,076	1,100
	Maksimali reikšmė	1,389	1,419	1,423
	Vidurkis	0,003	0,007	0,003
	Std. nuokrypis	0,081	0,125	0,096
$\beta = 0$	Mediana	0,004	0,003	0,002
	Minimali reikšmė	-0,258	-0,540	-0,349
	Maksimali reikšmė	0,267	0,442	0,266
	Vidurkis	0,002	-0,562	0,122
	Std. nuokrypis	0,204	0,107	1,688
$\mu = 0$	Mediana	-0,001	-0,556	0,036
	Minimali reikšmė	-0,654	-0,849	-14,005
	Maksimali reikšmė	0,892	-0,273	30,403
	Vidurkis	1,001	1,002	1,000
	Std. nuokrypis	0,042	0,063	0,044
$\sigma = 1$	Mediana	0,999	0,998	0,998
	Minimali reikšmė	0,895	0,827	0,884
	Maksimali reikšmė	1,138	1,204	1,140
	Vidurkis	-0,002	0,080	0,120
Tiksl. f-jos	Std. nuokrypis	0,001	0,065	0,437
nuokrypis	Mediana	-0,002	0,062	0,018
	Minimali reikšmė	-0,008	-0,003	-0,007
	Maksimali reikšmė	0,000	0,517	6,455

A.5. Lentelė. Metodų rezultatų palyginimas, kai $S_{1,25}(1, 0.5, 0)$

Tikrieji parametrai	Įverčiai	MTM	Regresijos	Momentų
$\alpha = 1,25$	Vidurkis	1,256	1,255	1,256
	Std. nuokrypis	0,037	0,059	0,05
	Mediana	1,254	1,259	1,256
	Minimali reikšmė	1,151	1,08	1,098
	Maksimali reikšmė	1,369	1,446	1,408
$\beta = 0.5$	Vidurkis	0,5	0,492	0,501
	Std. nuokrypis	0,065	0,114	0,106
	Mediana	0,499	0,496	0,499
	Minimali reikšmė	0,173	0,159	0,138
	Maksimali reikšmė	0,734	0,846	0,787
$\mu = 0$	Vidurkis	-0,01	-0,571	0,045
	Std. nuokrypis	0,203	0,064	6,078
	Mediana	0,01	-0,569	-0,288
	Minimali reikšmė	-0,739	-0,749	-18,951
	Maksimali reikšmė	1,06	-0,368	133,191
$\sigma = 1$	Vidurkis	1	0,999	0,998
	Std. nuokrypis	0,039	0,059	0,041
	Mediana	0,999	0,999	1
	Minimali reikšmė	0,897	0,836	0,892
	Maksimali reikšmė	1,1	1,155	1,1
Tiksl. f-jos nuokrypis	Vidurkis	-0,002	0,103	0,157
	Std. nuokrypis	0,001	0,138	0,602
	Mediana	-0,002	0,059	0,031
	Minimali reikšmė	-0,009	-0,006	-0,007
	Maksimali reikšmė	0	1,267	10,424

A.6. Lentelė. Metodų rezultatų palyginimas, kai $S_{1,25}(1, 1, 0)$

Tikrieji parametrai	Įverčiai	MTM	Regresijos	Momentų
$\alpha = 1,25$	Vidurkis	1,258	1,253	1,254
	Std. nuokrypis	0,026	0,051	0,065
	Mediana	1,251	1,253	1,252
	Minimali reikšmė	1,167	1,119	1,062
	Maksimali reikšmė	1,381	1,404	1,452
$\beta = 1$	Vidurkis	1	0,966	0,97
	Std. nuokrypis	0,002	0,051	0,043
	Mediana	1	1	0,997
	Minimali reikšmė	0,967	0,714	0,673
	Maksimali reikšmė	1	1	1
$\mu = 0$	Vidurkis	-0,065	-0,076	-0,567
	Std. nuokrypis	0,212	2,347	0,104
	Mediana	-0,006	-0,489	-0,568
	Minimali reikšmė	-0,884	-1,228	-0,873
	Maksimali reikšmė	1,132	42,222	-0,246
$\sigma = 1$	Vidurkis	0,999	1	1,003
	Std. nuokrypis	0,03	0,039	0,061
	Mediana	1	1,001	1
	Minimali reikšmė	0,882	0,883	0,821
	Maksimali reikšmė	1,084	1,094	1,182
Tiksl. f-jos nuokrypis	Vidurkis	-0,001	4,128	0,161
	Std. nuokrypis	0,001	45,525	0,264
	Mediana	-0,001	0,077	0,068
	Minimali reikšmė	-0,007	-0,005	-0,004
	Maksimali reikšmė	0	697,746	2,555

A.7. Lentelė. Metodų rezultatų palyginimas, kai $S_{1,5}(1,0,0)$

Tikrieji parametrai	Įverčiai	MTM	Regresijos	Momentų
	Vidurkis	1,498	1,499	1,5
	Std.nuokrypis	0,049	0,051	0,059
$\alpha = 1,5$	Mediana	1,495	1,498	1,498
	Minimali reikšmė	1,382	1,384	1,364
	Maksimali reikšmė	1,645	1,646	1,697
	Vidurkis	-0,001	0	0,001
	Std.nuokrypis	0,101	0,124	0,154
$\beta = 0$	Mediana	0	-0,001	-0,006
	Minimali reikšmė	-0,335	-0,369	-0,465
	Maksimali reikšmė	0,27	0,349	0,459
	Vidurkis	-0,002	-0,008	-0,319
	Std.nuokrypis	0,089	0,225	0,065
$\mu = 0$	Mediana	-0,005	-0,009	-0,317
	Minimali reikšmė	-0,313	-1,796	-0,496
	Maksimali reikšmė	0,309	1,192	-0,145
	Vidurkis	0,999	0,999	1
	Std.nuokrypis	0,036	0,036	0,058
$\sigma = 1$	Mediana	0,998	0,998	0,999
	Minimali reikšmė	0,903	0,895	0,852
	Maksimali reikšmė	1,152	1,154	1,246
	Vidurkis	-0,002	0,009	0,023
Tiksl. f-jos	Std.nuokrypis	0,001	0,036	0,014
nuokrypis	Mediana	-0,002	0,001	0,02
	Minimali reikšmė	-0,01	-0,007	0
	Maksimali reikšmė	0	0,567	0,08

A.8. Lentelė. Metodų rezultatų palyginimas, kai $S_{1,5}(1,0.5,0)$

Tikrieji parametrai	Įverčiai	MTM	Regresijos	Momentų
	Vidurkis	1,491	1,5	1,501
	Std. nuokrypis	0,05	0,052	0,061
$\alpha = 1,5$	Mediana	1,488	1,499	1,499
	Minimali reikšmė	1,357	1,36	1,343
	Maksimali reikšmė	1,632	1,643	1,699
	Vidurkis	0,523	0,51	0,504
	Std. nuokrypis	0,091	0,122	0,146
$\beta = 0.5$	Mediana	0,512	0,499	0,514
	Minimali reikšmė	0,254	0,134	0,028
	Maksimali reikšmė	0,778	0,928	0,874
	Vidurkis	0,043	0	-0,317
	Std. nuokrypis	0,107	0,314	0,052
$\mu = 0$	Mediana	0,033	-0,028	-0,317
	Minimali reikšmė	-0,222	-2,455	-0,465
	Maksimali reikšmė	0,445	3,147	-0,168
	Vidurkis	0,999	0,997	0,997
	Std. nuokrypis	0,034	0,034	0,054
$\sigma = 1$	Mediana	0,999	0,996	0,995
	Minimali reikšmė	0,91	0,9	0,855
	Maksimali reikšmė	1,113	1,095	1,149
	Vidurkis	-0,002	0,019	0,025
Tiksl. f-jos	Std. nuokrypis	0,002	0,125	0,018
nuokrypis	Mediana	-0,002	0,001	0,021
	Minimali reikšmė	-0,008	-0,007	-0,003
	Maksimali reikšmė	0	2,097	0,109

A.9. Lentelė. Metodų rezultatų palyginimas, kai $S_{1,5}(1,1,0)$

Tikrieji parametrai	Įverčiai	MTM	Regresijos	Momentų
	Vidurkis	1,494	1,504	1,504
	Std. nuokrypis	0,033	0,055	0,064
$\alpha = 1,5$	Mediana	1,497	1,505	1,507
	Minimali reikšmė	1,391	1,349	1,31
	Maksimali reikšmė	1,612	1,682	1,649
	Vidurkis	0,999	0,954	0,971
	Std. nuokrypis	0,005	0,067	0,049
$\beta = 1$	Mediana	1	1	1
	Minimali reikšmė	0,961	0,689	0,728
	Maksimali reikšmė	1	1	1
	Vidurkis	0,03	0	-0,32
	Std. nuokrypis	0,096	0,389	0,044
$\mu = 0$	Mediana	0,017	-0,075	-0,32
	Minimali reikšmė	-0,243	-0,371	-0,439
	Maksimali reikšmė	0,6	4,257	-0,186
	Vidurkis	0,999	0,999	0,999
	Std. nuokrypis	0,03	0,033	0,056
$\sigma = 1$	Mediana	0,998	0,997	0,998
	Minimali reikšmė	0,909	0,88	0,838
	Maksimali reikšmė	1,085	1,104	1,184
	Vidurkis	-0,001	0,052	0,027
Tiksl. f-jos	Std. nuokrypis	0,001	0,471	0,022
nuokrypis	Mediana	-0,001	0,004	0,022
	Minimali reikšmė	-0,008	-0,005	-0,001
	Maksimali reikšmė	0	8,456	0,207

A.10. Lentelė. Metodų rezultatų palyginimas, kai $S_{1,75}(1,0,0)$

Tikrieji parametrai	Įverčiai	MTM	Regresijos	Momentų
	Vidurkis	1,756	1,756	1,758
	Std. nuokrypis	0,045	0,047	0,05
$\alpha = 1,75$	Mediana	1,759	1,759	1,761
	Minimali reikšmė	1,596	1,621	1,613
	Maksimali reikšmė	1,882	1,891	1,883
	Vidurkis	-0,004	0	-0,004
	Std. nuokrypis	0,162	0,192	0,229
$\beta = 0$	Mediana	-0,009	-0,005	0,004
	Minimali reikšmė	-0,446	-0,576	-0,736
	Maksimali reikšmė	0,659	0,688	0,733
	Vidurkis	0	0	-0,176
	Std. nuokrypis	0,055	0,086	0,044
$\mu = 0$	Mediana	-0,001	-0,002	-0,172
	Minimali reikšmė	-0,174	-0,665	-0,328
	Maksimali reikšmė	0,162	0,593	-0,066
	Vidurkis	1,001	1	1,003
	Std. nuokrypis	0,03	0,03	0,053
$\sigma = 1$	Mediana	1,001	1	1,003
	Minimali reikšmė	0,927	0,928	0,861
	Maksimali reikšmė	1,096	1,093	1,187
	Vidurkis	-0,002	0	0,006
Tiksl. f-jos	Std. nuokrypis	0,001	0,007	0,003
nuokrypis	Mediana	-0,002	-0,001	0,006
	Minimali reikšmė	-0,008	-0,007	-0,003
	Maksimali reikšmė	0	0,104	0,024

A.11. Lentelė. Metodų rezultatų palyginimas, kai $S_{1,75}(1, 0.5, 0)$

Tikrieji parametrai	Įverčiai	MTM	Regresijos	Momentų
$\alpha = 1,75$	Vidurkis	1,749	1,752	1,751
	Std. nuokrypis	0,046	0,049	0,052
	Mediana	1,749	1,752	1,751
	Minimali reikšmė	1,587	1,631	1,615
	Maksimali reikšmė	1,898	1,891	1,89
$\beta = 0.5$	Vidurkis	0,509	0,511	0,506
	Std. nuokrypis	0,161	0,2	0,203
	Mediana	0,498	0,504	0,513
	Minimali reikšmė	0,109	-0,011	-0,004
	Maksimali reikšmė	1	1	1
$\mu = 0$	Vidurkis	0,005	-0,001	-0,178
	Std. nuokrypis	0,059	0,097	0,041
	Mediana	0,006	-0,005	-0,176
	Minimali reikšmė	-0,171	-0,313	-0,298
	Maksimali reikšmė	0,188	1,145	-0,064
$\sigma = 1$	Vidurkis	1,002	1,002	1,004
	Std. nuokrypis	0,029	0,03	0,053
	Mediana	1,001	1,003	1,004
	Minimali reikšmė	0,91	0,912	0,846
	Maksimali reikšmė	1,101	1,096	1,18
Tiksl. f-jos nuokrypis	Vidurkis	-0,002	0,001	0,007
	Std. nuokrypis	0,001	0,014	0,004
	Mediana	-0,002	-0,001	0,006
	Minimali reikšmė	-0,012	-0,011	-0,003
	Maksimali reikšmė	0	0,295	0,025

A.12. Lentelė. Metodų rezultatų palyginimas, kai $S_{1,75}(1, 1, 0)$

Tikrieji parametrai	Įverčiai	MTM	Regresijos	Momentų
$\alpha = 1,75$	Vidurkis	1,739	1,748	1,747
	Std. nuokrypis	0,04	0,052	0,057
	Mediana	1,74	1,75	1,752
	Minimali reikšmė	1,617	1,609	1,592
	Maksimali reikšmė	1,854	1,898	1,883
$\beta = 1$	Vidurkis	0,995	0,924	0,964
	Std. nuokrypis	0,018	0,107	0,062
	Mediana	1	1	1
	Minimali reikšmė	0,87	0,555	0,643
	Maksimali reikšmė	1	1	1
$\mu = 0$	Vidurkis	0,02	-0,001	-0,18
	Std. nuokrypis	0,066	0,133	0,035
	Mediana	0,013	-0,012	-0,182
	Minimali reikšmė	-0,161	-0,214	-0,269
	Maksimali reikšmė	0,271	2,27	-0,072
$\sigma = 1$	Vidurkis	0,999	0,998	0,998
	Std. nuokrypis	0,027	0,03	0,053
	Mediana	0,998	0,998	0,993
	Minimali reikšmė	0,914	0,925	0,855
	Maksimali reikšmė	1,068	1,1	1,166
Tiksl. f-jos nuokrypis	Vidurkis	-0,002	0,004	0,008
	Std. nuokrypis	0,001	0,068	0,005
	Mediana	-0,001	0	0,007
	Minimali reikšmė	-0,007	-0,007	-0,002
	Maksimali reikšmė	0	1,518	0,026

A.13. Lentelė. Stabiliųjų sekų parametrų įverčiai ir Anderson–Darling statistikos tikimybė (tikrinant stabilumą)

Indeksas	Stabiliojo modelio parametrų įverčiai					
	α	β	μ	σ	A-D krit	K-S krit
ISPIX	1,7864	0,0393	0,0001	0,0078	0,63744	0,02584
AMEX	1,6984	0,1283	-0,0001	0,0099	0,83053	0,01824
AT&T	1,5319	-0,0679	-0,0001	0,0075	0,99999	-
BP	1,7356	-0,0706	-0,0004	0,0101	0,98932	-
FCHI	1,7506	0,1881	-0,0000	0,0081	0,28359	0,01198
CAC	1,5145	-0,1701	-0,0006	0,0088	0,99866	-
Coca	1,7121	-0,0699	-0,0004	0,0088	0,98818	-
GDAXI	1.6502	0,1607	-0,0001	0,0079	0,84363	-
DJC	1,7954	0,0778	-0,0001	0,0046	0,87824	-
DJ	1,7046	-0,0107	-0,0000	0,0103	0,91486	-
DJIA	1,5958	-0,0995	0,0002	0,0056	0,99834	-
DJTA	1,5629	0,01586	0,0002	0,0056	0,99970	-
FIAT	1,6331	-0,0692	0,0006	0,0127	0,99999	-
GE	1,7431	-0,0558	-0,0003	0,0090	0,97881	-
GM	1,7339	-0,0908	-0,0000	0,0098	0,99769	-
IBM	1,7005	-0,0548	-0,0002	0,0091	0,91800	-
LMT	1,6322	-0,1375	-0,0007	0,0115	0,97905	-
MCD	1,7296	-0,039	-0,0005	0,0106	0,88734	-
MER	1,7705	-0,1355	-0,0005	0,0148	0,89021	-
MSFT	1,7381	-0,0021	-0,0010	0,0141	0,83503	-
NASDAQ	1,6753	0,2431	0,0013	0,0145	0,82352	0,02928
NIKE	1,6714	-0,1450	-0,0010	0,0130	0,93361	-
NIKKEI	1,6431	0,1526	0,0003	0,0076	0,98046	-
Phile	1,6482	0,0058	-0,0004	0,0138	0,98355	-
S&P	1,6735	0,1064	-0,0002	0,0049	0,99913	-
SONY	1,6769	-0,2057	-0,0005	0,0115	0,98979	-

A.14. Lentelė. Stabiliųjų sekų parametrų įverčiai ir Anderson–Darling statistikos tikimybė (tikrinant stabilumą)

Akcija	Sekos be nulinių grąžų					pilnos sekos				
	α	β	μ	σ	A-D krit	α	β	μ	σ	A-D krit
ALT1L	1,6932	0,2285	0,0033	0,0207	0,82823	1,1762	0,2141	0,0019	0,0012	0,99999
ANK1L	1,9998	-0,6707	0,0014	0,0354	0,98217	1,0500	0,0881	0,0012	0,0008	0,99999
APG1L	1,1840	0,3256	0,0156	0,0121	0,99999	1,5483	0,0820	-0,0003	0,0005	0,99999
ATK1L	1,7866	0,8497	0,0092	0,0619	0,99997	1,0500	0,1108	0,0044	0,0028	0,99999
BAL1R	1,7884	0,0481	0,0029	0,0221	0,99967	1,0500	-0,0423	-0,0014	0,0021	0,99999
BLT1T	1,6120	0,1230	0,0044	0,0211	0,30355	1,0500	0,1459	0,0025	0,0012	0,99999
DKR1L	1,6810	0,5551	0,0042	0,0246	0,63206	1,0500	-0,1191	-0,0021	0,0013	0,99999
DPK1R	1,9998	0,8245	0,0055	0,0476	0,98000	1,2781	0,1317	0,0000	0,0006	0,99999
EKR1L	1,4886	0,0450	0,0004	0,0194	0,84975	1,0718	0,0450	0,0022	0,0049	0,99999
ETLAT	1,5232	-0,0528	-0,0001	0,0084	0,63206	1,3486	-0,0284	0,0000	0,0067	0,98258
GRD1R	1,6525	-0,0930	0,0047	0,0247	0,54695	1,3732	0,5210	0,0067	0,0044	0,99999
GRG1L	1,6510	0,2934	0,0053	0,0205	0,43277	1,0500	0,0370	0,0018	0,0033	0,99999
GUB1L	1,5014	0,2418	0,0086	0,0303	0,15127	1,0500	0,1236	0,0019	0,0010	0,99999
GZE1R	1,0850	-0,1265	-0,0067	0,0086	0,99999	1,0755	-0,0610	-0,0015	0,0032	0,99999
HAE1T	1,6567	0,1591	0,0024	0,0175	0,30355	1,0623	-0,0398	-0,0018	0,0040	0,99999
IVL1L	1,6047	0,3885	0,0082	0,0201	0,57324	1,0500	0,1066	0,0019	0,0013	0,99999
KBL1L	1,5601	0,1433	0,0026	0,0208	0,48922	1,0523	0,0514	0,0011	0,0010	0,99999
KJK1L	1,7657	0,4257	0,0098	0,0348	0,51170	1,3568	0,0032	-0,0010	0,0005	0,99999
KLEAT	1,8693	0,4659	0,0053	0,0498	0,67274	1,0500	0,1858	0,0052	0,0019	0,99999
KLV1T	1,7807	0,4738	0,0059	0,0396	0,62660	1,0500	-0,0569	-0,0039	0,0047	0,99999
KNF1L	1,5738	0,1706	0,0026	0,0179	0,99553	1,0500	-0,0487	-0,0028	0,0032	0,99999
KNR1L	1,6876	0,5276	0,0029	0,0330	0,57956	1,3973	0,1194	0,0030	0,0020	0,99999
LBS1L	1,8840	0,5427	0,0005	0,0249	0,99976	1,1700	-0,2513	-0,0019	0,0012	0,99999
LDJ1L	1,6079	0,1497	0,0024	0,0146	0,75424	1,0500	-0,0703	-0,0057	0,0061	0,99999
LEL1L	1,7030	0,4475	0,0053	0,0232	0,50432	1,0500	-0,0186	-0,0025	0,0095	0,99999
LEN1L	1,4632	0,4920	0,0102	0,0177	0,99981	1,0500	0,0334	0,0008	0,0019	0,99999
LFO1L	1,9998	-0,5138	0,0030	0,0335	0,99793	1,6784	-0,6089	-0,0006	0,0004	0,99999
LJL1L	1,9692	1,0000	0,0014	0,0409	0,99949	1,1117	-0,2865	-0,0061	0,0027	0,99999
LLK1L	1,9998	-1,0000	0,0040	0,0299	0,98317	1,5759	0,0003	0,0007	0,0009	0,99999
LME1R	1,5689	0,0696	0,0045	0,0318	0,77088	1,0500	-0,0667	-0,0030	0,0027	0,99999
LNS1L	1,7829	0,2793	0,0029	0,0237	0,99880	1,0500	0,1293	0,0063	0,0037	0,99999
LSC1R	1,9807	0,8311	0,0033	0,0237	0,99983	1,0500	0,0715	0,0067	0,0065	0,99999
LTK1L	1,7531	0,0979	0,0001	0,0114	0,99769	1,4791	0,0280	0,0000	0,0079	0,99996
MKO1T	1,6662	0,1571	0,0037	0,0132	0,28359	1,0500	0,0383	0,0021	0,0043	0,99999
MNF1L	1,7186	0,2838	0,0031	0,0186	0,76438	1,0500	0,1079	0,0102	0,0070	0,99999
MZE1L	1,0500	0,3140	0,1132	0,0266	0,99999	1,0500	-0,0657	-0,0034	0,0028	0,99999
NDL1L	1,0582	-0,2696	-0,0934	0,0349	0,99999	1,0959	0,1360	0,0010	0,0010	0,99999
NRM1T	1,5898	-0,0206	0,0012	0,0076	0,79773	1,3068	0,1414	0,0019	0,0055	0,99903
OLF1R	1,9998	0,8113	0,0065	0,0472	0,84774	1,0500	0,1864	0,0196	0,0076	0,99999
PTR1L	1,4223	0,4599	0,0184	0,0263	0,93111	1,2768	0,0790	0,0004	0,0005	0,99999
PZV1L	1,5006	0,2639	0,0050	0,0153	0,47367	1,1343	-0,7352	-0,0344	0,0078	0,99999
RKB1R	1,8377	0,3423	0,0048	0,0293	0,86659	1,1319	-0,1982	-0,0009	0,0006	0,99999
RLK1T	1,4995	0,0934	0,0063	0,0294	0,43277	1,2181	-0,1693	0,0001	0,0004	0,99999
RST1L	1,5757	0,3999	0,0046	0,0133	0,96194	1,0640	-0,0556	-0,0029	0,0065	0,99999
RSU1L	1,3319	0,1827	0,0030	0,0094	0,66307	1,1140	-0,8561	-0,0225	0,0041	0,99999
RTF1R	1,9496	1,0000	0,0077	0,0616	0,87665	1,2792	0,1945	0,0002	0,0006	0,99999
SAB1L	1,3790	0,1624	0,0054	0,0169	0,82112	1,0500	-0,1437	-0,0023	0,0010	0,99999
SAN1L	1,6103	0,1096	0,0064	0,0266	0,57324	1,3034	0,7166	0,0026	0,0010	0,99999
SKU1T	1,7244	0,0054	0,0012	0,0138	0,31342	1,0500	-0,0018	0,0000	0,0064	0,99999
SNG1L	1,2250	0,3227	0,0087	0,0101	0,99999	1,0500	0,0854	0,0026	0,0021	0,99999
SRS1L	1,0648	0,0180	0,0046	0,0161	0,84975	1,3079	-0,0546	-0,0003	0,0006	0,99999
STU1L	1,4703	0,1204	0,0062	0,0223	0,80589	1,2521	-0,1461	-0,0029	0,0016	0,99999

Tęsinys kitame puslapyje...

A.15. Lentelė. Stabiliųjų sekų parametrų įverčiai ir Anderson–Darling statistikos tikimybė (tikrinant stabilumą)(tęsinys)

Akcija	Sekos be nulinių grąžų					pilnos sekos				
	α	β	μ	σ	A-D krit	α	β	μ	σ	A-D krit
...tęsinys										
TFA1T	1,6349	-1,0000	-0,0223	0,0753	0,99995	1,0732	0,0020	0,0005	0,0009	0,99999
TKM1T	1,5429	0,0576	0,0031	0,0160	0,21217	1,0614	-0,0438	-0,0011	0,0026	0,99999
UKB1L	1,8803	0,9852	0,0037	0,0304	0,95222	1,0500	-0,2011	-0,0061	0,0022	0,99999
UTR1L	1,4991	0,0891	0,0030	0,0185	0,21217	1,6193	-0,5577	0,0002	0,0004	0,99999
VBL1L	1,5474	0,4473	0,0065	0,0129	0,50432	1,1481	0,4279	0,0039	0,0016	0,99999
VDG1L	1,8723	0,9995	0,0093	0,0349	0,47367	1,0500	0,0471	0,0016	0,0023	0,99999
VNF1R	1,6754	0,1890	0,0023	0,0182	0,99814	1,0573	0,0480	0,0034	0,0074	0,99999
VNG1L	1,8789	-0,8607	0,0003	0,0147	0,99993	1,0500	-0,0274	-0,0021	0,0050	0,99999
VNU1T	1,7338	0,1246	0,0016	0,0225	0,24296	1,0500	0,0265	0,0011	0,0030	0,99999
VSS1R	1,7659	0,1080	0,0028	0,0206	0,96959	1,0500	-0,1495	-0,0077	0,0036	0,99999
VST1L	1,5411	0,3731	0,0070	0,0159	0,81868	1,0500	0,0248	0,0018	0,0044	0,99999
ZMP1L	1,3660	0,1285	0,0037	0,0174	0,59189	1,3098	0,2223	0,0008	0,0007	0,99999

A.16. Lentelė. Dalinių sumų ir pradinių sekų homogeniškumo testų rezultatai, pagal Andersono kriterijų, pasikliovimo lygmuo 5%.

Indeksas	$m_1 = 10^*$	$m_2 = 15$
ISPIX	+	+
AMEX	+	+
AT&T	+	−
BP	+	+
FCHI	+	+
CAC	−	−
Coca	+	+
GDAXI	+	+
DJC	+	+
DJ	+	+
DJIA	−	−
DJTA	+	+
FIAT	−	−
GE	+	+
GM	+	+
IBM	+	+
LMT	+	+
MCD	+	+
MER	+	+
MSFT	+	+
NASDAQ	−	+
NIKE	+	+
NIKKEI	−	−
Phile	+	+
S&P	+	+
SONY	+	+

* homogeniškumo hipotezė neatmetama "+", homogeniškumo hipotezė atmetama "−"

A.17. Lentelė. Koreliacijos koeficientai tarp $H(q)$ ir q.

Indeksas	koreliacija	ryšys tiesinis?	rezultatas
ISPIX	97,57	taip	savastingas
AMEX	99,01	taip	savastingas
AT&T	92,57	ne	multifraktalinis
BP	92,44	ne	multifraktalinis
FCHI	98,53	taip	savastingas
CAC	90,77	ne	multifraktalinis
Coca	92,48	ne	multifraktalinis
GDAXI	99,17	taip	savastingas
DJC	99,59	taip	savastingas
DJ	97,82	taip	savastingas
DJIA	98,10	taip	multifraktalinis
DJTA	98,50	taip	savastingas
FIAT	96,82	ne	multifraktalinis
GE	92,43	ne	multifraktalinis
GM	96,91	ne	multifraktalinis
IBM	92,98	ne	multifraktalinis
LMT	95,25	ne	multifraktalinis
MCD	93,77	ne	multifraktalinis
MER	95,25	ne	multifraktalinis
MSFT	92,56	ne	multifraktalinis
NASDAQ	94,51	ne	multifraktalinis
NIKE	94,37	ne	multifraktalinis
NIKKEI	98,30	taip	savastingas
Phile	93,65	ne	multifraktalinis
S&P	98,58	taip	savastingas
SONY	96,91	ne	multifraktalinis

A.18. Lentelė. Hurst indekso įverčiai ir koreliacijos koeficintai arba pasikliautinieji H indekso įverčių intervalai.

Indeksas	agreguota dispersija		R/S		periodograma		absoliutinių mom.		liekanų dispersijos		Abry-Veitch		Whittle	
ISPIX	0,516	98.70%	0.561	99.66%	0,438	6.967%	0,855	26.90%	0,601	99.03%	0,540	[0.483–0.598]	0.500	[0.461–0.538]
AMEX	0,470	99.52%	0.573	99.92%	0,448	7.720%	0,675	64.35%	0,584	99.40%	0,527	[0.503–0.552]	0.500	[0.480–0.519]
AT&T	0,393	97.70%	0.555	99.96%	0,507	1.561%	0,616	83.01%	0,656	98.40%	0,452	[0.435–0.468]	0.500	[0.486–0.513]
BP	0,522	99.48%	0.541	99.77%	0,481	2.790%	0,759	66.42%	0,611	98.71%	0,494	[0.469–0.518]	0,500	[0.481–0.519]
FCHI	0,558	98.92%	0.568	99.92%	0,435	9.037%	0,813	40.65%	0,570	98.41%	0,543	[0.506–0.580]	0.500	[0.472–0.527]
CAC	0,317	96.10%	0.563	99.82%	0,371	18.87%	0,619	54.03%	0,469	99.45%	0,541	[0.483–0.598]	0.500	[0.461–0.538]
COKE	0,397	99.48%	0.505	99.59%	0,503	0.590%	0,617	83.76%	0,591	98.77%	0,514	[0.497–0.531]	0.500	[0.486–0.513]
GDAXI	0,549	99.37%	0.585	99.97%	0,495	0.578%	0,794	44.38%	0,551	99.00%	0,529	[0.492–0.566]	0.500	[0.472–0.527]
DJC	0,540	99.58%	0.599	99.84%	0,485	2.394%	0,828	31.82%	0,561	99.11%	0,544	[0.507–0.581]	0.504	[0.477–0.531]
DJ	0,409	99.45%	0.545	99.82%	0,444	7.625%	0,621	68.04%	0,491	99.60%	0,523	[0.498–0.548]	0.500	[0.480–0.519]
DJIA	0,471	99.41%	0.580	99.94%	0,551	7.628%	0,648	70.84%	0,539	99.59%	0,564	[0.553–0.576]	0.511	[0.501–0.520]
DJTA	0,434	95.85%	0.579	99.92%	0,525	3.902%	0,621	69.54%	0,567	99.71%	0,597	[0.586–0.609]	0.544	[0.534–0.554]
FIAT	0,503	99.85%	0.549	99.62%	0,445	7.318%	0,732	59.42%	0,518	99.00%	0,513	[0.476–0.551]	0.500	[0.472–0.527]
GE	0,414	98.24%	0.530	99.88%	0,489	1.772%	0,628	80.99%	0,631	99.22%	0,605	[0.588–0.622]	0.500	[0.486–0.513]
GM	0,474	99.75%	0.547	99.89%	0,495	0.669%	0,659	73.12%	0,523	99.33%	0,558	[0.542–0.575]	0.500	[0.486–0.513]
IBM	0,448	98.82%	0.543	99.73%	0,509	1.748%	0,664	84.22%	0,614	99.55%	0,443	[0.426–0.460]	0.500	[0.486–0.513]
LMT	0,487	99.61%	0.568	99.93%	0,558	8.571%	0,711	69.35%	0,642	98.97%	0,458	[0.433–0.483]	0.500	[0.480–0.519]
MCD	0,319	98.21%	0.541	99.88%	0,479	3.137%	0,515	82.05%	0,560	99.31%	0,548	[0.531–0.564]	0.500	[0.486–0.513]
MER	0,475	99.66%	0.549	99.72%	0,480	2.766%	0,680	75.91%	0,582	99.77%	0,531	[0.506–0.556]	0.500	[0.480–0.519]
MSFT	0,383	99.26%	0.503	99.35%	0,472	4.317%	0,603	83.19%	0,586	99.44%	0,493	[0.468–0.518]	0.500	[0.480–0.519]
NASDAQ	0,515	98.82%	0.567	99.89%	0,502	0.392%	0,799	40.49%	0,582	97.81%	0,497	[0.440–0.554]	0.500	[0.461–0.538]
NIKE	0,327	97.48%	0.528	99.49%	0,510	1.688%	0,550	78.79%	0,546	99.79%	0,611	[0.587–0.636]	0.503	[0.484–0.522]
NIKKEI	0,316	93.90%	0.572	99.92%	0,512	1.880%	0,531	66.54%	0,505	99.53%	0,528	[0.504–0.553]	0.500	[0.480–0.519]
PHILE	0,491	99.81%	0.570	99.93%	0,503	0.708%	0,695	83.92%	0,697	98.32%	0,569	[0.544–0.594]	0.500	[0.480–0.519]
S&P	0,464	99.37%	0.578	99.94%	0,477	3.421%	0,674	62.89%	0,546	99.52%	0,570	[0.554–0.587]	0.520	[0.506–0.534]
SONY	0,497	99.60%	0.579	99.95%	0,539	6.246%	0,710	66.43%	0,618	98.95%	0,642	[0.617–0.666]	0.522	[0.503–0.541]

A.19. Lentelė. Hurst eksponentė ir stabilumo parametras α.

Indeksas	R/S Hurst	$1/H$	α
ISPIX	0,561	1,783	1,786
AMEX	0,573	1,745	1,698
AT&T	0,555	1,802	1,532
BP	0,541	1,848	1,736
FCHI	0,568	1,761	1,751
CAC	0,563	1,776	1,515
Coca	0,505	1,980	1,712
GDAXI	0,585	1,709	1,650
DJC	0,599	1,669	1,795
DJ	0,515	1,942	1,705
DJIA	0,58	1,724	1,596
DJTA	0,579	1,727	1,563
FIAT	0,549	1,821	1,633
GE	0,53	1,887	1,743
GM	0,547	1,828	1,734
IBM	0,543	1,842	1,701
LMT	0,568	1,761	1,632
MCD	0,541	1,848	1,730
MER	0,549	1,821	1,771
MSFT	0,503	1,988	1,738
NASDAQ	0,567	1,764	1,675
NIKE	0,528	1,894	1,671
NIKKEI	0,572	1,748	1,643
Phile	0,57	1,754	1,648
S&P	0,578	1,730	1,674
SONY	0,579	1,727	1,677
ISPIX	0,561	1,783	1,786

A.20. Lentelė. Agreguotų sekų ir pradinės sekos homogeniškumo testų rezultatai pagal Andersono kriterijų (sumuojant po $m = 10$, pasikliovimo lygmuo 5%).

Indeksas	atmesta (−), visa seka	atmesta (−), be nuliu	Indeksas	atmesta (−), visa seka	atmesta (−), be nuliu
ALT1L	−	−	LTK1L	−	−
ANK1L	−	−	MKO1T	−	−
APG1L	−	−	MNF1L	−	−
ATK1L	−	−	MZE1L	−	−
BAL1R	−	−	NDL1L	−	−
BLT1T	−	−	NRM1T	−	−
DKR1L	−	−	OLF1R	−	−
DPK1R	−	−	PTR1L	−	−
EKR1L	−	−	PZV1L	−	−
ETLAT	−	+	RKB1R	−	−
GRD1R	−	−	RLK1T	−	−
GRG1L	−	−	RST1L	−	−
GUB1L	−	−	RSU1L	−	−
GZE1R	−	−	RTF1R	−	−
HAE1T	−	−	SAB1L	−	−
IVL1L	−	−	SAN1L	−	−
KBL1L	−	−	SKU1T	−	−
KJK1L	−	−	SNG1L	−	−
KLEAT	−	−	SRS1L	−	−
KLV1T	−	−	STU1L	−	−
KNF1L	−	−	TFA1T	−	−
KNR1L	−	−	TKM1T	−	−
LBS1L	−	−	UKB1L	−	−
LDJ1L	−	−	UTR1L	−	−
LEL1L	−	−	VBL1L	−	−
LEN1L	−	−	VDG1L	−	−
LFO1L	−	+	VNF1R	−	−
LJL1L	−	−	VNG1L	−	−
LLK1L	−	−	VNU1T	−	−
LME1R	−	−	VSS1R	−	−
LNS1L	−	−	VST1L	−	−
LSC1R	−	−	ZMP1L	−	−

homogeniškumo hipotezė neatmetama "+", homogeniškumo hipotezė atmetama "−"

A.21. Lentelė. Koreliacijos koeficientas tarp $H(q)$ ir q.

Indeksas	sekos be nulinių grąžų			pilnos sekos		
	koreliacija	tiesinė priklausomybė	rezultatas	koreliacija	tiesinė priklausomybė	rezultatas
ALT1L	0,99	taip	savastingas	0,996	taip	savastingas
ANK1L	0,931	ne	–	0,945	ne	multifraktalinis
APG1L	0,92	ne	multifraktalinis	0,916	ne	multifraktalinis
ATK1L	0,93	ne	–	0,925	ne	multifraktalinis
BAL1R	0,901	ne	–	0,886	ne	–
BLT1T	0,928	ne	multifraktalinis	0,935	ne	multifraktalinis
DKR1L	0,93	ne	–	0,949	taip	savastingas
DPK1R	0,966	ne	–	0,971	taip	savastingas
EKR1L	0,97	ne	–	0,961	ne	–
ETLAT	0,918	ne	–	0,914	ne	–
GRD1R	0,981	taip	savastingas	0,952	ne	multifraktalinis
GRG1L	0,948	ne	–	0,97	taip	savastingas
GUB1L	0,918	ne	–	0,905	ne	multifraktalinis
GZE1R	0,911	ne	–	0,906	ne	–
HAE1T	0,913	ne	multifraktalinis	0,914	ne	multifraktalinis
IVL1L	0,971	taip	savastingas	0,965	ne	multifraktalinis
KBL1L	0,928	ne	–	0,932	ne	–
KJK1L	0,935	ne	–	0,935	ne	–
KLEAT	0,921	ne	–	0,91	ne	multifraktalinis
KLV1T	0,94	ne	multifraktalinis	0,942	ne	multifraktalinis
KNF1L	0,884	ne	–	0,901	ne	–
KNR1L	0,924	ne	–	0,919	ne	–
LBS1L	0,931	ne	–	0,924	ne	–
LDJ1L	0,967	ne	multifraktalinis	0,969	taip	savastingas
LEL1L	0,946	ne	–	0,94	ne	–
LEN1L	0,906	ne	–	0,905	ne	–
LFO1L	0,935	ne	multifraktalinis	0,92	ne	multifraktalinis
LJL1L	0,935	ne	multifraktalinis	0,953	ne	multifraktalinis
LLK1L	0,92	ne	–	0,96	ne	multifraktalinis
LME1R	0,946	ne	multifraktalinis	0,943	ne	multifraktalinis
LNS1L	0,973	ne	–	0,965	ne	multifraktalinis
LSC1R	0,971	ne	–	0,97	taip	savastingas
LTK1L	0,975	taip	savastingas	0,971	taip	savastingas
MKO1T	0,918	ne	multifraktalinis	0,918	ne	multifraktalinis
MNF1L	0,972	taip	savastingas	0,972	ne	multifraktalinis
MZE1L	0,95	ne	–	0,93	ne	–
NDL1L	0,942	ne	–	0,914	ne	–
NRM1T	0,907	ne	multifraktalinis	0,903	ne	multifraktalinis
OLF1R	0,963	ne	multifraktalinis	0,988	taip	savastingas
PTR1L	0,943	ne	–	0,92	ne	multifraktalinis
PZV1L	0,964	ne	–	0,957	ne	multifraktalinis
RKB1R	0,965	ne	–	0,953	ne	multifraktalinis
RLK1T	0,933	ne	–	0,935	ne	multifraktalinis
RST1L	0,949	ne	–	0,94	ne	–
RSU1L	0,947	ne	multifraktalinis	0,928	ne	multifraktalinis
RTF1R	0,954	ne	–	0,946	ne	multifraktalinis
SAB1L	0,898	ne	–	0,914	ne	multifraktalinis
SAN1L	0,923	ne	multifraktalinis	0,924	ne	multifraktalinis
SKU1T	0,911	ne	multifraktalinis	0,91	ne	multifraktalinis
SNG1L	0,924	ne	multifraktalinis	0,909	ne	multifraktalinis
SRS1L	0,935	ne	–	0,93	ne	multifraktalinis
STU1L	0,934	ne	–	0,932	ne	multifraktalinis

Tęsinys kitame puslapyje...

A.22. Lentelė. Koreliacijos koeficientas tarp $H(q)$ ir q. (tęsinys)

Indeksas	sekos be nulinių grąžų			pilnos sekos		
	koreliacija	tiesinė priklausomybė	rezultatas	koreliacija	tiesinė priklausomybė	rezultatas
...tęsinys						
TFA1T	0,932	ne	–	0,954	ne	multifraktalinis
TKM1T	0,915	ne	multifraktalinis	0,918	ne	multifraktalinis
UKB1L	0,975	taip	savastingas	0,963	ne	multifraktalinis
UTR1L	0,932	ne	–	0,938	ne	multifraktalinis
VBL1L	0,914	ne	–	0,94	ne	–
VDG1L	0,949	ne	–	0,922	ne	multifraktalinis
VNF1R	0,976	taip	savastingas	0,961	ne	multifraktalinis
VNG1L	0,987	taip	savastingas	0,96	ne	multifraktalinis
VNU1T	0,931	ne	multifraktalinis	0,912	ne	multifraktalinis
VSS1R	0,971	taip	savastingas	0,957	ne	multifraktalinis
VST1L	0,836	ne	multifraktalinis	0,826	ne	multifraktalinis
ZMP1L	0,948	ne	–	0,925	ne	multifraktalinis

A.23. Lentelė. Stabilumo parametro ir Hurst indekso ryšys

v.p.	sekos be nulinių grąžų			pilna seka		
	H	$1/H$	α	H	$1/H$	α
ALT1L	0,573	1,745	1,693	0,544	1,838	1,176
ANK1L	0,547	1,828	2,000	0,575	1,739	1,050
APG1L	0,603	1,658	1,184	0,658	1,520	1,548
ATK1L	0,465	2,151	1,787	0,564	1,773	1,050
BAL1R	0,459	2,179	1,788	0,49	2,041	1,050
BLT1T	0,534	1,873	1,612	0,562	1,779	1,050
DKR1L	0,627	1,595	1,681	0,701	1,427	1,050
DPK1R	0,479	2,088	2,000	0,489	2,045	1,278
EKR1L	0,599	1,669	1,489	0,62	1,613	1,072
ETLAT	0,561	1,783	1,523	0,594	1,684	1,349
GRD1R	0,45	2,222	1,652	0,488	2,049	1,373
GRG1L	0,538	1,859	1,651	0,576	1,736	1,050
GUB1L	0,632	1,582	1,501	0,592	1,689	1,050
GZE1R	0,549	1,821	1,085	0,581	1,721	1,076
HAE1T	0,562	1,779	1,657	0,556	1,799	1,062
IVL1L	0,627	1,595	1,605	0,655	1,527	1,050
KBL1L	0,587	1,704	1,560	0,642	1,558	1,052
KJK1L	0,569	1,757	1,766	0,513	1,949	1,357
KLEAT	0,526	1,901	1,869	0,497	2,012	1,050
KLV1T	0,501	1,996	1,781	0,508	1,969	1,050
KNF1L	0,592	1,689	1,574	0,643	1,555	1,050
KNR1L	0,261	3,831	1,688	0,437	2,288	1,397
LBS1L	0,586	1,706	1,884	0,657	1,522	1,170
LDJ1L	0,603	1,658	1,608	0,589	1,698	1,050
LEL1L	0,644	1,553	1,703	0,648	1,543	1,050
LEN1L	0,56	1,786	1,463	0,588	1,701	1,050
LFO1L	0,33	3,030	2,000	0,639	1,565	1,678
LJL1L	0,463	2,160	1,969	0,592	1,689	1,112
LLK1L	0,665	1,504	2,000	0,648	1,543	1,576
LME1R	0,548	1,825	1,569	0,54	1,852	1,050
LNS1L	0,495	2,020	1,783	0,555	1,802	1,050
LSC1R	0,472	2,119	1,981	0,59	1,695	1,050
LTK1L	0,529	1,890	1,753	0,642	1,558	1,479
MKO1T	0,554	1,805	1,666	0,585	1,709	1,050
MNF1L	0,575	1,739	1,719	0,58	1,724	1,050
MZE1L	0,595	1,681	1,050	0,662	1,511	1,050
NDL1L	0,462	2,165	1,058	0,65	1,538	1,096
NRM1T	0,594	1,684	1,590	0,562	1,779	1,307
OLF1R	0,518	1,931	2,000	0,483	2,070	1,050
PTR1L	0,674	1,484	1,422	0,697	1,435	1,277
PZV1L	0,634	1,577	1,501	0,618	1,618	1,134
RKB1R	0,629	1,590	1,838	0,559	1,789	1,132
RLK1T	0,506	1,976	1,500	0,446	2,242	1,218
RST1L	0,57	1,754	1,576	0,67	1,493	1,064
RSU1L	0,642	1,558	1,332	0,622	1,608	1,114
RTF1R	0,556	1,799	1,950	0,516	1,938	1,279
SAB1L	0,493	2,028	1,379	0,507	1,972	1,050
SAN1L	0,658	1,520	1,610	0,592	1,689	1,303
SKU1T	0,625	1,600	1,724	0,553	1,808	1,050
SNG1L	0,535	1,869	1,225	0,597	1,675	1,050
SRS1L	0,445	2,247	1,065	0,521	1,919	1,308
STU1L	0,614	1,629	1,470	0,616	1,623	1,252

Tęsinys kitame puslapyje...

A.24. Lentelė. Stabilumo parametro ir Hurst indekso ryšys (tęsinys)

v.p.	sekos be nulinių grąžų			pilna seka		
	H	$1/H$	α	H	$1/H$	α
...tęsinys						
TFA1T	0,47	2,128	1,635	0,508	1,969	1,073
TKM1T	0,447	2,237	1,543	0,518	1,931	1,061
UKB1L	0,562	1,779	1,880	0,567	1,764	1,050
UTR1L	0,528	1,894	1,499	0,514	1,946	1,619
VBL1L	0,718	1,393	1,547	0,692	1,445	1,148
VDG1L	0,584	1,712	1,872	0,685	1,460	1,050
VNF1R	0,536	1,866	1,675	0,562	1,779	1,057
VNG1L	0,621	1,610	1,879	0,606	1,650	1,050
VNU1T	0,543	1,842	1,734	0,534	1,873	1,050
VSS1R	0,471	2,123	1,766	0,482	2,075	1,050
VST1L	0,595	1,681	1,541	0,664	1,506	1,050
ZMP1L	0,652	1,534	1,366	0,593	1,686	1,310

Priedas B. Statistinės duomenų analizės metodai

Šiame priede aprašomi statistiniai įvairių hipotezių tikrinimo metodai naudojami disertacijoje ir pateikiami jų algoritmai.

B.1. Neparametrinių suderinamumo hipotezių tikrinimas

Pasiskirstymo funkcijos atitikimą empiriniams duomenims galima tikrinti Andersono–Darlingo (A–D) metodu, Kolmugorovo–Smirnovo (K–S) ir kt A–D kriterijaus statistika turi pavidalą:

$$AD_n = \max_{x \in \mathbf{R}} \frac{|F(x) - F_n(x)|}{\sqrt{F(x)(1 - F(x))}}$$

arba

$$n\Omega^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right) \ln\left[1 - F(x_i)\right] \right\}$$

tuomet $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(n\Omega^2 < x\right) = a_2(x)$ (Kobzar [75]). Šis kriterijus labiau jautrus empirinės ir teorinės pasiskirstymo funkcijos skirtumams tolimuose kvantiliuose (uodegose), o kitas kriterijus, leidžiantis patikrinti ar pasiskirstymas su įvertintais parametrais atitinka empirinius duomenis centrinėje pasiskirstymo dalyje yra K–S kriterijus.

K–S kriterijus aprašomas statistika

$$D_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| F(x) - F_n(x) \right|,$$

kur F_0 yra teorinė ir F_n empirinė pasiskirstymo funkcijos. Tačiau praktikoje skaičiuojamas

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-),$$

kur

$$D_n^+ = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\frac{i}{n} - F(x_i)\right) \quad \text{ir} \quad D_n^- = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(F(x_i) - \frac{i-1}{n}\right).$$

Algoritmas 22 Andersono–Darlingo statistikos skaičiavimas $AndDar(n, par, X, vi, di, kr)$

■ *Tikslas*: Apskaičiuoti Andersono–Darlingo statistikos reikšmę duotajai sekai X, su parametrais par ir kurios empirinis vidurkis vi ir dispersija di;

Įėjimo parametrai: n (sveikasis skaičius) grąžų sekos ilgis; X (n matis realių skaičių masyvas) grąžų vektorius (variacinė seka), par (m matis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų vektorius, vi (realusis skaičius) sekos vidurkis, di (realusis skaičius) sekos dispersija, kr (sveikasis skaičius) dėsnio kodas (0 – Gauss'o, 1 – Koši, 2 – stabilusis);

Išėjimo parametrai: s (realusis skaičius) Andersono–Darlingo statistikos reikšmė;

Naudojama atmintis: atminties beveik nenaudoja;

Laiko sąnaudos: labai priklauso nuo duomenų sekos ilgio ir pasiskirstymo funkcijos apskaičiavimo;

Aprašymas:

- grąžų seka X turi būti surūšiuota, t.y. turi būti sudaryta jos variacinė seka;
- priklausomai nuo įėjimo parametro kr galimi trys šios funkcijos variantai, t.y. lokalus kintamasis g yra apskaičiuojamas pagal tris skirtingas funkcijas:
  - $g_i = F(x_i)$ centruota ir normuota (pagal vidurkį ir dispersiją) Gauss'o dėsnio pasiskirstymo funkcijos reikšmė taške $x_i = X[i]$;
  - $g_i = F(x_i)$ Koši dėsnio pasiskirstymo funkcijos reikšmė taške $x_i = X[i]$;
  - $g_i = F(x_i)$ α-stabiliojo dėsnio su parametrais par pasiskirstymo funkcijos reikšmė taške $x_i = X[i]$;

- skaičiuojama suma $z = \sum_{i=1}^{n} \left((2i-1)\ln(g_i) + (2n-2i+1)\ln(1-g_i)\right)$;
- skaičiuojama statistikos reikšmę $s = -n - z/n$.

Algoritmas:

1. $s = 0$;
2. SWITCH (kr){

   2.1. CASE $(kr = 0)$: ——————————————-tikrinam Gauss'o atveju

   2.1.1. FOR $i = 1$ TO n DO

   2.1.1.1. $g = gaussp((X[i-1] - vi)/di)$;

   $s+ = (2 \cdot i - 1) \cdot \ln(g) + (2 \cdot n - 2 \cdot i + 1) \cdot \ln(1-g)$;

   2.1.1.1. $i = i + 1$;

   2.2. CASE $(kr = 1)$: —————————————— tikrinam Koši atveju

   2.2.1. FOR $i = 1$ TO n DO

   2.2.1.1. $g = kosi((X[i-1] - 0)/1)$;

   $s+ = (2 \cdot i - 1) \cdot \ln(g) + (2 \cdot n - 2 \cdot i + 1) \cdot \ln(1-g)$;

   2.2.1.1. $i = i + 1$;

   2.3. DEFAULT: —————————————————-tikrinam stabiliuoju atveju

   2.3.1. FOR $i = 1$ TO n DO

   2.3.1.1. $g = pasiskirstymas(X[i-1], par)$;

   $s+ = (2 \cdot i - 1) \cdot \ln(g) + (2 \cdot n - 2 \cdot i + 1) \cdot \ln(1-g)$;

   2.3.1.1. $i = i + 1$;
3. $s = -n - s/n$; ————————————————-skaičiuojam statistiką s;
4. IF $(s < 1e - 307)$ THEN $s = 1e - 307$;
5. IF $(s > 1e + 307)$ THEN $s = 1e + 307$;
6. RETURN s. ■

Algoritmas 23 Asimetrijos kriterijus $asimetrijos(vi, di, X, n)$

■*Tikslas*: Apskaičiuoti asimetrijos kriterijaus statistikos reikšmę duotajai sekai X, kurios empirinis vidurkis vi ir dispersija di;

Įėjimo parametrai: n (sveikasis skaičius) grąžų sekos ilgis; X (n matis realių skaičių masyvas) grąžų vektorius (variacinė seka), vi (realusis skaičius) sekos vidurkis, di (realusis skaičius) sekos dispersija;

Išėjimo parametrai: d gali įgyti vieną iš dviejų reikšmių: jei seka simetriška (1) ir jei asimetriška (0);

Naudojama atmintis: atminties beveik nenaudoja;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio;

Aprašymas:

- Skaičiuojam trečiąjį centrinį momentą $g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X[i]-vi}{di}\right)^3$;

- Skaičiuojam teorinę reikšmę $f = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}$;
- palyginam g ir f: jei $g > f$ laikoma, kad seka asimetriška, jei $g < f$ laikoma, kad seka simetriška. ■

Algoritmas 24 Eksceso kriterijus $akses(vi, di, X, n)$

■*Tikslas*: Apskaičiuoti eksceso kriterijaus statistikos reikšmę duotajai sekai X, kurios empirinis vidurkis vi ir dispersija di;

Įėjimo parametrai: n (sveikasis skaičius) grąžų sekos ilgis; X (n matis realių skaičių masyvas) grąžų vektorius (variacinė seka), vi (realusis skaičius) sekos vidurkis, di (realusis skaičius) sekos dispersija;

Išėjimo parametrai: d gali įgyti vieną iš dviejų reikšmių: jei seka su mažu ekscesu (1) ir jei seka su dideliu ekscesu (0);

Naudojama atmintis: atminties beveik nenaudoja;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio;

Aprašymas:

- Skaičiuojam ketvirtąjį centrinį momentą $g = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X[i]-vi}{di}\right)^4 - 3$;
- Skaičiuojam teorinę reikšmę $f = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}$;
- palyginam g ir f: jei $g > f$ laikoma, kad seka su mažu ekscesu arba be jo, jei $g < f$ laikoma, kad seka yra su dideliu ekscesu. ■

Algoritmas 25 Kolmogorovo–Smirnovo kriterijus $kolmogorov(par, n, X)$

■*Tikslas*: Apskaičiuoti Kolmogorovo–Smirnovo kriterijaus statistikos reikšmę duotajai sekai X, su parametrais par;

Įėjimo parametrai: n (sveikasis skaičius) grąžų sekos ilgis; X (n matis realių skaičių masyvas) grąžų vektorius (variacinė seka), par (keturmatis realių skaičių masyvas) stabiliojo dėsnio parametrų vektorius;

Išėjimo parametrai: rez (realusis skaičius) Kolmogorovo–Smirnovo kriterijaus statistikos reikšmė arba 0, jei suderinamumo hipoteze atmetama su tikimybe $p = 0.05$;

Naudojama atmintis: papildomai reikia atminties sekų $Dp1$ ir $Dp2$ saugojimui (n mačiai realių skaičių masyvai);

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio;

Aprašymas:

- grąžų seka X turi būti surūšiuota, t.y. turi būti sudaryta jos variacinė seka;
- Sudarom skirtumų tarp teorinės ir empirinės pasiskirstymo funkcijų sekas $Dp1[i] = (i+1)/n - f[i]$ ir $Dp2[i] = f[i] - i/n$, čia $f[i] = F(X[i])$ pasiskirstymo funkcijos reikšmė taške $X[i]$ (šiuo atveju $f[i] = pasiskirstymas(X[i], par)$);
- Išrenkam maksimalų skirtumą iš abiejų sekų $Dp1m = \max(Dp1)$ ir $Dp2m = \max(Dp2)$, bei maksimalų skirtumą $Dna = \max(Dp1m, Dp2m)$;
- Skaičiuojam teorinę kritinę reikšmę $Dp = \sqrt{\frac{-\ln(p/2)}{2n}} - \frac{1}{6n}$;
- Jei maksimalus skirtumas tarp teorinės ir empirinės pasiskirstymo funkcijų yra didesnis už teorinę kritinę reikšmę ($Dna > Dp$) tai suderinamumo hipotezė atmetama (su klaidos tikimybė 0.05) ir grąžinama nulinė reikšmė (0), priešingu atveju ($Dna < Dp$) suderinamumo hipotezės atmesti negalima ir grąžinama statistikos reikšmė Dna.

Algoritmas:

1. FOR $i = 0$ TO n DO
   1.1. $f1 = pasiskirstymas(X[i], par)$;
   1.2. $Dp1[i] = (i+1)/n - f1$;
   1.3. $Dp2[i] = f1 - i/n$;
2. $Dp1m = maxmax(Dp1, n)$;
3. $Dp2m = maxmax(Dp2, n)$;
4. $Dna = max(Dp1m, Dp2m)$;
5. IF $(Dna < Dnmin)$ THEN
   5.1. $rezmin = Dna$;
   5.2. $Dnmin = Dna$;
6. $Dp = \sqrt{-\ln(p/2)/(2n)} - 1/(6n)$;//——————teorine reiksme——————
7. IF($Dnmin > Dp$) THEN $rez = 0.0$;
   ELSE $rez = rezmin$;
8. RETURN rez. ■

B.2. Dviejų sekų homogeniškumo nustatymas Andersono ir Smirnovo kriterijais

Dviejų imčių homogeniškumo nustatymui taikomi Smirnovo ir Andersono (ω^2) kriterijai.

Andersono statistika apskaičiuojama pagal formulę:

$$T = \frac{1}{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} \left[n_1 \sum_{i=1}^{n_1} (r_{1,i} - i)^2 + n_2 \sum_{j=1}^{n_2} (r_{2,j} - j)^2 \right] - \frac{4 n_1 n_2 - 1}{6(n_1 + n_2)},$$

čia n_1 – pirmosios imties tūris, n_2 – antrosios imties tūris, $r_{1,i}$ ir $r_{2,j}$ – atitinkamai pirmosios ir antrosios rūšiuotų imčių elementų rangai bendroje variacinėje sekoje. Ši statistika, kai $n_1 n_2 \to \infty$ ($n_1 \geqslant 50$, $n_2 \geqslant 50$) ir $n_1/n_2 = const$ yra asimptotiškai pasiskirsčiusi pagal $n\omega^2$ dėsnį ($a_1(x)$).

Smirnovo statistika

$$D_{n_1,n_2} = \max(D^+_{n_1,n_2}, D^-_{n_1,n_2}),$$

čia $n_1 \leqslant n_2$,

$$D^+_{n_1,n_2} = \max_{1 \leqslant r \leqslant n_1} \left(\frac{r}{n_1} - F_{n_2}(x_{(r)}) \right) \quad \text{ir} \quad D^-_{n_1,n_2} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n_1} \left(F_{n_2}(x_{(r)}) - \frac{r-1}{n_1} \right),$$

o F_n – imties empirinė pasiskirstymo funkcija. Ši statistika, kai $n_1 n_2 \to \infty$ sutampa su Kolmogorovo pasiskirstymu.

Algoritmas 26 Dviejų seku homogeniskumas *homogenis*$(X, n, m, intpt)$

■*Tikslas*: Patikrinti ar dvi sekos yra homogeniškos (pirmoji seka yra įrašyta sekos X pirmuose m elementų, antroji nuo m iki n elemento);

Įėjimo parametrai: n (sveikasis skaičius) bendrosios sekos ilgis; X (n matis realių skaičių masyvas) duomenų vektorius (sulipdyta iš pirmosios ir antrosios sekų), m (sveikasis skaičius) pirmosios sekos ilgis, *itnpt* (sveikasis skaičius) nepriklausomų imčių skaičius;

Išėjimo parametrai: *teor* (realusis skaičius) homogeniškumo statistikos reikšmė, *itnpt* (sveikasis skaičius) vektorių skaičius;

Naudojama atmintis: papildomai reikia atminties rangų ir sekų kodo sekų saugojimui, bei nedidelei matricai *rang* (2×2) saugoti, pirmasis stulpelis skirtas saugoti i-tosios sekos rangų skaičių, antrasis stulpelis skirtas saugoti i-tosios sekos rangų vidurkiui;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio;

Aprašymas:

- Reikia apskaičiuoti statistikos H reikšmę $H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{2} rang[i,0](rang[i,1]-\bar{R})^2$, čia n bendras duomenų kiekis, $\bar{R} = \frac{n+1}{2}$ – rangų sekų bendrasis vidurkis, $rang[i,0]$ i-tosios sekos rangų skaičius, $rang[i,1]$ i-tosios sekos rangų vidurkis;
- Jei $H > \chi^2(itnpt - 1, 0.05)$ tai homogeniškumo hipotezė atmetama, priešingu atveju hipotezė neatmetama. ■

Algoritmas 27 Dviejų seku Smirnovo homogeniškumo testas $smirnovoh(X1, X2, n, m, p)$

■*Tikslas*: Patikrinti ar dvi sekos $X1$ ir $X2$ yra homogeniškos pagal Smirnovo kriterijų;

Įėjimo parametrai: $X1$(n matis realių skaičių masyvas) ir $X2$ (m matis realių skaičių masyvas) duomenų sekos, n (sveikasis skaičius) pirmosios sekos ilgis, m (sveikasis skaičius) antrosio sekos ilgis, p (realusis skaičius) pasikliovimo lygmuo;

Išėjimo parametrai: z gali įgyti vieną iš dviejų reikšmių: 0 – hipotezė apie homogeniškumą atmetama, 1 - hipotezė apie homogeniškumą neatmetama;

Naudojama atmintis: papildomai reikia atminties skirtumų sekoms DP ir DM saugojimui;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio;

Aprašymas:

- Skaičiuojam skirtumų tarp empirinių pasiskirstymo funkcijų sekas DP ir DM;
- Išrenkam maksimalų skirtumą iš visų galimų $D = max(max(DP), max(DM))$;
- Skaičiuojam kritinę reikšmę $Dp = \frac{1}{k} + \sqrt{-\frac{n+m}{2n \cdot m} \ln(p/2)} - \frac{m-n}{6(mn)} + \frac{n-d}{2(n+m+d)}$, čia $d = BendrasDidžiausiasDaliklis(n, m)$, o $k = BendrasMažiausiasKartotinis(n, m)$;
- Jei $Dp < D$ grąžinama reikšmė 0, jei $Dp > D$ grąžinama reikšmė 1.

duom :=

duomenų nuskaitymas

```
DER(Y) := | Z_0 <- 0
          | for i ∈ rows(Y) - 2..0
          |   Z_i <- ln( (Y_{i+1} - 0) / Y_i )
          | Z
```

X := DER(duom)

duomenų transformavimas

P := 0.05

pasikliovimo lygmuo

$\text{rows}(X) = 7.164 \times 10^3$

duomenų skaičius

```
epf(t,W) := | 0 if t ≤ W_0
            | 1 if t > W_{rows(W)-1}
            | otherwise
            |   | for k ∈ 0..rows(W) - 2
            |   |   z <- k / rows(W)  if W_k < t ≤ W_{k+1}
            |   | z
```

empirinė pasiskirstymo funkcija

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{Test}(n, P, X1) := \\
\quad j \leftarrow 0 \\
\quad N \leftarrow \mathrm{rows}(X1) \\
\quad m \leftarrow \mathrm{trunc}\left(\dfrac{N}{n}\right) \\
\quad \text{for } o \in 0..n-1 \\
\quad\quad \text{for } k \in o \cdot m..(o+1)\cdot m - 1 \\
\quad\quad\quad Z_{j,o} \leftarrow X1_k \\
\quad\quad\quad j \leftarrow j + 1 \\
\quad\quad Z^{\langle o \rangle} \leftarrow \mathrm{sort}\left(Z^{\langle o \rangle}\right) \\
\quad\quad j \leftarrow 0 \\
\quad N \leftarrow m \\
\quad k1 \leftarrow \mathrm{lcm}(N, m) \\
\quad d \leftarrow \mathrm{gcd}(N, m) \\
\quad nn \leftarrow \dfrac{N \cdot m}{N + m} \\
\quad Dp \leftarrow \dfrac{1}{k1} + \sqrt{\dfrac{-1}{2 \cdot nn} \cdot \ln\left(\dfrac{P}{2}\right)} - \dfrac{1}{nn} \cdot \left[\dfrac{m - N}{6 \cdot (m + N)} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{N - d}{N + m + d}\right] \\
\quad \text{for } k \in 0..n-1 \\
\quad\quad varX \leftarrow Z^{\langle k \rangle} \\
\quad\quad \text{for } o1 \in 0..n-1 \\
\quad\quad\quad u_{k,o1} \leftarrow 0 \\
\quad\quad\quad \text{if } o1 > k \\
\quad\quad\quad\quad varY \leftarrow Z^{\langle o1 \rangle} \\
\quad\quad\quad\quad \text{for } w \in 0..N-1 \\
\quad\quad\quad\quad\quad D\_p_w \leftarrow \dfrac{w+1}{N-1} - \mathrm{epf}\left(varX_w, varY\right) \\
\quad\quad\quad\quad\quad D\_m_w \leftarrow \mathrm{epf}\left(varX_w, varY\right) - \dfrac{w}{N-1} \\
\quad\quad\quad\quad D \leftarrow \max(\max(D\_p), \max(D\_m)) \\
\quad\quad\quad\quad u_{k,o1} \leftarrow 1 \ \text{ if } D \le Dp \\
\quad\quad\quad u_{k,o1} \leftarrow 1 \ \text{ if } o1 = k \\
\quad\quad\quad u_{k,o1} \leftarrow u_{o1,k} \ \text{ if } o1 < k \\
\quad u
\end{array}
$$

Sekos dalinimas į n dalių ir tų dalių tarpusavio homogeniškumo tyrimas

A := Test(10, P, X)

A =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
2	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
3	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
7	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
8	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

A ■

Algoritmas 28 Dviejų seku Andersono homogeniškumo testas $anderson(X, n, m, p)$

■*Tikslas*: Patikrinti ar dvi sekos (sujungtos į vieną vektorių) yra homogeniškos pagal Andersono kriterijų;

Įėjimo parametrai: X (n matis realių skaičių masyvas) duomenų seka, n (sveikasis skaičius) bendrosios sekos ilgis, m (sveikasis skaičius) pirmosios sekos ilgis, p (realusis skaičius iš intervalo $(0, ..., 1)$) pasikliovimo lygmuo;

Išėjimo parametrai: k gali įgyti vieną iš dviejų reikšmių: 0 – hipotezė apie homogeniškumą atmetama, 1 - hipotezė apie homogeniškumą neatmetama;

Naudojama atmintis: papildomai reikia atminties rangų ir sekų kodo sekų saugojimui;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio ir rūšiavimo efektyvumo;

Aprašymas:

- Statistikos T skaičiavimas paremtas priede B.1 pateikta schema
- Jei gautoji statistikos reikšmė mažesnė už 2,49 tai su pasikliovimo lygmeniu $p = 0.05$ hipotezės apie suderinamumą atmesti negalima, priešingu atveju hipotezę atmetame.

■

B.3. Wald–Wolfowitz serijų testas

Wald–Wolfowitz serijų testas[11] (angl. *runs test*) [87] skirtas patikrinti ar seka yra atsitiktinė. Tam skaičiuojame statistiką

$$W = \frac{R - \mu^*}{\sigma^*},$$

čia R yra 0 ir 1 serijų skaičius, μ^* ir σ^* atitinkamai yra a.d. R pasiskirstymo dėsnio vidurkis ir dispersija

$$\mu^* = 1 + 2\frac{N_0 N_1}{N_0 + N_1}, \qquad \sigma^* = \sqrt{2N_0 N_1 \frac{2N_0 N_1 - N}{N^2 (N-1)}}$$

kur N yra sekos ilgis, N_0 ir N_1 – atitinkamai nuliukų ir vienetukų skaičius sekoje.

Jei sekoje nuliukai ir vienetukai yra nepriklausomi tai statistika W – pasiskirsčiusi pagal standartinį normalųjį dėsnį su $100(1-\alpha)\%$ pasikliovimo lygmeniu. Priklausomai nuo statistikos reikšmės galimi du atvejai:

a) jei $|W| > Z_\alpha$, tai sekoje galimas cikliškumas, sezoniškumas arba trendas;

b) jei $|W| < Z_\alpha$, tai sekos yra atsitiktinės;

[11] Wald-Wolfowitz serijų testas aprašytas ir internetinėje enciklopedijoje Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Wald-Wolfowitz_runs_test.

čia Z_α yra normaliojo standartinio dėsnio atitinkamas kvantilis.

Reikėtų pastebėti, kad a) atveju statistikos reikšmė rodo, kad sekos nėra atsitiktinės (atsitiktinumo hipotezė atmetama).

Algoritmas 29 Sekos atsitiktinumo nustatymas (runs testas)

■ *Tikslas*: nustatyti ar duotoji seka yra atsitiktinė;

Įėjimo parametrai: duom (n matis realių skaičių masyvas) duomenų seka (skaitoma iš failo, čia $n = rows(duom)$);

Išėjimo parametrai: perėjimų tarp būsenų skaičius, pirmosios būsenos skaičius, antrosios būsenos skaičius, vidutinis perėjimų skaičius, perėjimų dispersija, statistikos reikšmė, kritinė vienpusė statistikos reikšmė, kritinė dvipusė statistikos reikšmė;

Naudojama atmintis: papildomos atminties nenaudoja;

Laiko sąnaudos: priklauso nuo duomenų sekos ilgio n;

Aprašymas:

- duomenys (akcijų kainos) transformuojamos į grąžas (X) ir būsenas ($X2$ ir $X4$). Būsena a atitinka 0 būseną, būsena aa atitinka būseną 1;
- apskaičiuojamas būsenų pasikeitimo skaičius r (funkcija $runs(.)$);
- apskaičiuojamas būsenų a ir aa skaičius (atitinkamai $n1$ ir $n2$);
- skaičiuojamas vidutinis būsenų pasikeitimų skaičius $alf = 1 + 2 \cdot n1 \cdot \frac{n2}{n1+n2}$;
- skaičiuojama būsenų pasikeitimų dispersija $sigm = \sqrt{2\, n1\, n2 \frac{2\, n1\, n2 - n1 - n2}{(n1+n2)^2 (n1+n2-1)}}$;
- skaičiuojama statistika $ZZ = \frac{r - alf}{sigm}$;
- skaičiuojamos vienpusė ir dvipusė kritinės statistikos reikšmės, kadangi $ZZ \sim N(0,1)$ tai Z_{alf} yra pasiskirsčiusi pagal atvirkštinį normalųjį dėsnį
- jei $|ZZ| < Z_{alf}$ tai laikoma, kad seka yra atsitiktinė.

Algoritmas:

duom :=

nuskaitomi duomenys

$$Y := duom^{\langle 0 \rangle}$$

$$risk(a) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow rows(a) - 2 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad s_i \leftarrow \ln\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \text{ if } a_i \neq 0 \wedge a_{i+1} \neq 0 \\ s \end{array} \right.$$

$X := risk(Y)$ duomenys transformuojami į grąžas

$a := 0$ būsena a

$aa := 1$ būsena aa

$$nuliai\_vienetai(X) := \left\| \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..rows(X) - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} Y_i \leftarrow 1 \text{ if } X_i \neq 0 \\ Y_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ Y \end{array} \right.$$

$X2 := nuliai\_vienetai(X)$ X4:=X2 grąžų seka transformuojama į būsenų seką.

$$\mathrm{runs}(x5) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 0..\mathrm{rows}(x5) - 2 \\ \quad j \leftarrow j + 1 \ \text{ if } x5_i \neq x5_{i+1} \\ j \end{array} \right.$$

$r := \mathrm{runs}(X4)$ $\quad r = 545$ — būsenų pasikeitimo skaičius

$$\mathrm{nuliuku}(x5, a) := \left\| \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..\mathrm{rows}(x5) - 1 \\ \quad j \leftarrow j + 1 \ \text{ if } x5_i = a \\ j \end{array} \right.$$

$n1 := \mathrm{nuliuku}(X4, a)$ $\quad n1 = 914$ — būsenų a skaičius

$n2 := \mathrm{nuliuku}(X4, aa)$ $\quad n2 = 808$ — būsenų aa skaičius

$n1 + n2 = 1722$ — bendras duomenų skaičius

$$alf := 1 + 2 \cdot n1 \cdot \frac{n2}{n1 + n2} \qquad alf = 858.738$$

$$sigm := \sqrt{2 \cdot n1 \cdot n2 \cdot \frac{2 \cdot n1 \cdot n2 - n1 - n2}{(n1 + n2)^2 \cdot (n1 + n2 - 1)}} \qquad sigm = 20.664$$

$Z_{alf} := \mathrm{qnorm}(1 - 0.05, 0, 1)$ $\quad Z_{alf} = 1.645$ — kritinė vienpusė statistikos reikšmė

$Z_{alf.2} := \mathrm{qnorm}\left(1 - \frac{0.05}{2}, 0, 1\right)$ $\quad Z_{alf.2} = 1.96$ — kritinė dvipusė statistikos reikšmė

$ZZ := \frac{r - alf}{sigm}$ $\quad ZZ = -15.183$ — statistikos reikšmė

Formuojam rezultatus:

$resz_0 := r \quad resz_1 := n1 \quad resz_2 := n2 \quad resz_3 := alf \quad resz_4 := sigm \quad resz_5 := ZZ \quad resz_6 := Z_{alf}$

$resz_7 := Z_{alf.2}$

$$resz = \begin{pmatrix} 545 \\ 914 \\ 808 \\ 858.738 \\ 20.664 \\ -15.183 \\ 1.645 \\ 1.96 \end{pmatrix} \mathbf{resz}^T$$

Priedas C. Portfelio tipo parinkimas

Finansinė priemonė vertybinis popierius (v.p.), kuri gali būti perkama ar parduodama, vadinama aktyvu arba kapitalu. Nagrinėkime vieno periodo investavimą į aktyvus. Laikysime, kad X_0 – aktyvo vertė pradiniu laiko momentu, o X_1 – aktyvo vertė po vieno periodo, tuomet bendrosias pajamas iš aktyvo apskaičiuosime

$$r = \frac{X_1}{X_0}.$$

Laikydamiesi tų pačių pažymėjimų pelno normą skaičiuosime pagal formulę

$$R = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$$

arba $r = 1 + R$. Tuomet aktyvo vertė periodo pabaigoje bus $X_1 = (1 + R)X_0$. Deja, kokia bus pelno norma periodo pabaigoje mes nežinome, todėl negalime apskaičiuoti ir aktyvo vertės.

Investiciniu vertybinių popierių portfeliu vadinamas toks v.p. rinkinys, į kurį investuojama tam tikra pinigų suma ir kuriame kiekvienas atskiras v.p. turi tam tikrą svorį. Paprastai yra priimta, kad visų svorių suma yra lygi 1 ir visi svoriai yra neneigiami, tačiau atskirais atvejais šių sąlygų galima atsisakyti. Jei dėl skaičiavimų paprastumo atsisakoma pirmosios sąlygos, dažniausiai atlikus skaičiavimus svoriai vis tiek yra normuojami. Jei atsisakoma antrosios – sakoma, kad yra leidžiamas nepadengtasis pardavimas [149] (angl. *short selling*), t.y. v.p. galima pasiskolinti iš to rinkos dalyvio kuris jį turi. Tačiau nepadengtasis pardavimas duoda pelną tik tuo atveju, jei pasiskolintojo v.p. kaina rinkoje krenta. Daugeliui finansinių investicijų nepadengtasis pardavimas yra draudžiamas, tačiau akcijų rinkoje jis egzistuoja.

Yra išskiriami trys atvejai kai norima parinkti modelį esant atsitiktinumui:

- Vidurkis-rizika (mean-risk) modeliai;
- Tikėtinos naudos maksimizavimas (expected utility maximisation)
- Stochastinis dominavimas (stochastic dominance).

C.1. Vidurkio–rizikos modeliai

Pažymėkime ρ – rizikos matas, t.y. funkcija atvaizduojanti atsitiktinį dydį į realių skaičių aibę.

Vidurkio-rizikos modeliuose, kai rizikos matas yra ρ, sakoma, kad R_x dominuoja prieš a.d. R_y, tada ir tik tada jei $E(R_x) \geqslant E(R_y)$ ir $\rho(Rx) \leqslant \rho(Ry)$, kai yra bent viena griežta nelygybė, tai

$$R_X >_{m/\rho} R_Y.$$

Sakoma, kad a.d. R_x yra efektyvus arba nedominuojamas, tada ir tik tada, jei nėra kito a.d. R_y tokio, kad R_y dominuotų prieš R_x. Tai reiškia, kad duotai grąžai R_x yra pati mažiausia galima rizika ρ_{R_x} ir duotai rizikai yra didžiausia grąža. Vidurkio-rizikos modelių esmė yra surasti efektyvųjį a.d – portfelį. Tokio tipo uždaviniams priskiriamas labiausiai žinomas vidurkio–dispersijos arba Markowitz uždavinys.

C.2. Tikėtinos naudos maksimizavimas

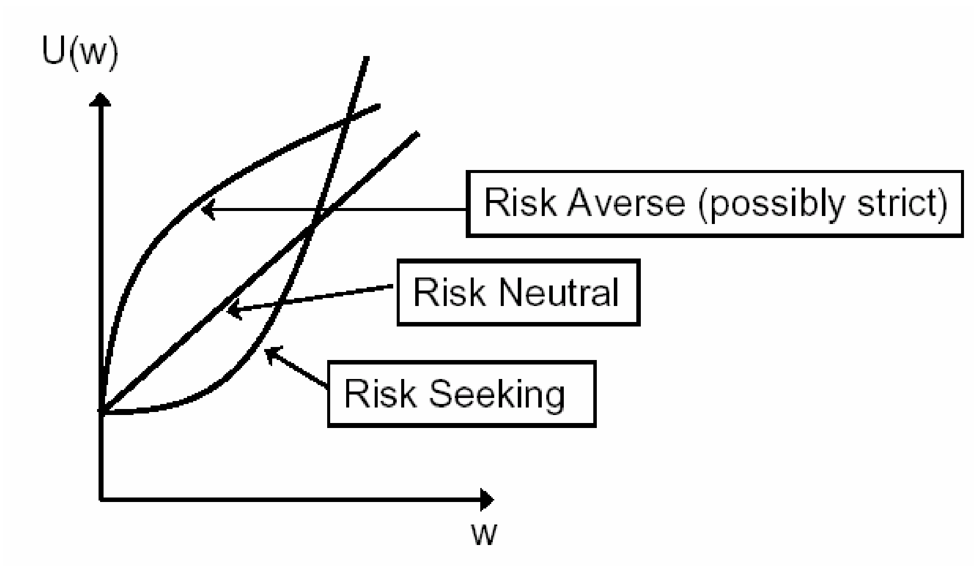
Išmatuoti a.d. pageidaujamumą, priskiriant jį realiam skaičiui, vadinsime tikėtina nauda. Naudos funkcija yra reali funkcija U apibrėžta realių skaičių erdvėje (apibūdinanti galimus vertės lygius pasibaigus investavimo periodui). Laukiamos naudos teorija praplečia naudos funkcijos apibrėžimo sritį nuo realių skaičių iki atsitiktinių dydžių erdvės. Laukiamos naudos vertė $\mathbf{E}[U(X)]$ yra priskiriama kiekvienam a.d. X tokiu būdu:

$$\mathbf{E}[U(X)] = \int U(x)\,\mathrm{d}F(x)$$

čia F yra a.d. X pasiskirstymo f-ja. Tokiu būdu du atsitiktiniai dydžiai yra palyginami lyginant jų laukiamos naudos reikšmes. Didesnioji reikšmė rodo, kad tas a.d. yra naudingesnis.

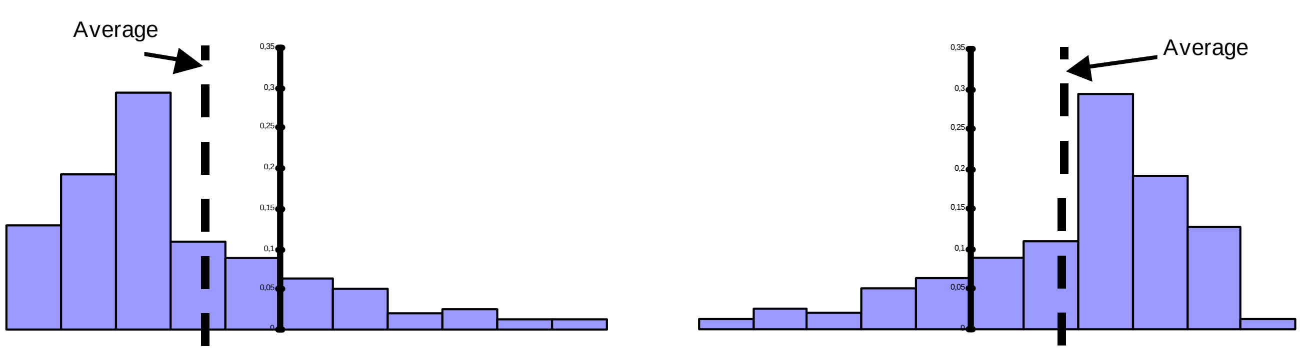
Naudos funkcijos ekonominės savybės. Ryšiai tarp rizikos ypatybių, kurios atitinka stebimą ekonominį elgesį ir naudos funkcijos formos yra keturios:

- Didėjančios naudos pasirinkimas (investuotojai renkasi daugiau vietoj mažiau) U yra didėjanti f-ja ($U'(w) \geqslant 0$ visiems w ir bent vieną kartą griežtai daugiau).
- Rizikos vengimas (angl. *risk aversion*). Jei investuotojas priverstas rinktis tarp lošimo ir garantuoto laimėjimo, su tuo pačiu laukiama verte, jis renkasi garantuotą laimėjimą. Matematiškai ši savybė reiškia, kad U yra didėjanti ir įgaubta ($U'(w) \geqslant 0, U''(w) \leqslant 0$ visiems w ir su bent vieną kartą griežta nelygybe, t.y. U turi mažėjančią ribinę naudą). Rizikos viengenčiam investuotojui laukiama rizikingos investicijos nauda visada yra mažesnė už laukiamos vertė naudą (pav. C.1):
$$E[U(X)] \leqslant U(E[X]).$$



Paveikslas C.1: Naudos funkcija ir investuotojo rizikos supratimas

- Teigiamos asimetrijos pasirinkimas (bankroto vengimas) (angl. *positive skewness preference – ruin aversion*): vengimas imti mažus beveik garantuotus išlošimus mainais į nutolusią bankroto tikimybę. Matematiškai tai reiškia, kad U yra didėjanti, įgaubta, o U' išgaubta, t.y $U'''(w) \geqslant 0$, $U'(w) \geqslant 0$, $U''(w) \leqslant 0$ (žr. pav. C.2).



a) b)

Paveikslas C.2: Asimetrija teigiama a) ir neigiama b).

- Mažėjantis absoliutinės rizikos vengimas (A.R.A.): investuoti į rizikingus aktyvus kai šių vertė kyla (prisiimti daugiau rizikos, kai finansiškai saugu). Matematiškai šią savybę charakterizuoja mažėjantis Arrow–Pratt absoliutinės rizikos koeficientas
$$a(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)}. \tag{C.1}$$
$a'(w) \leqslant 0$ reiškia, kad funkcijos U grafiko išlinkimas, darosi mažesnis didėjant vertei.

Rizikos matas ir naudos funkcija

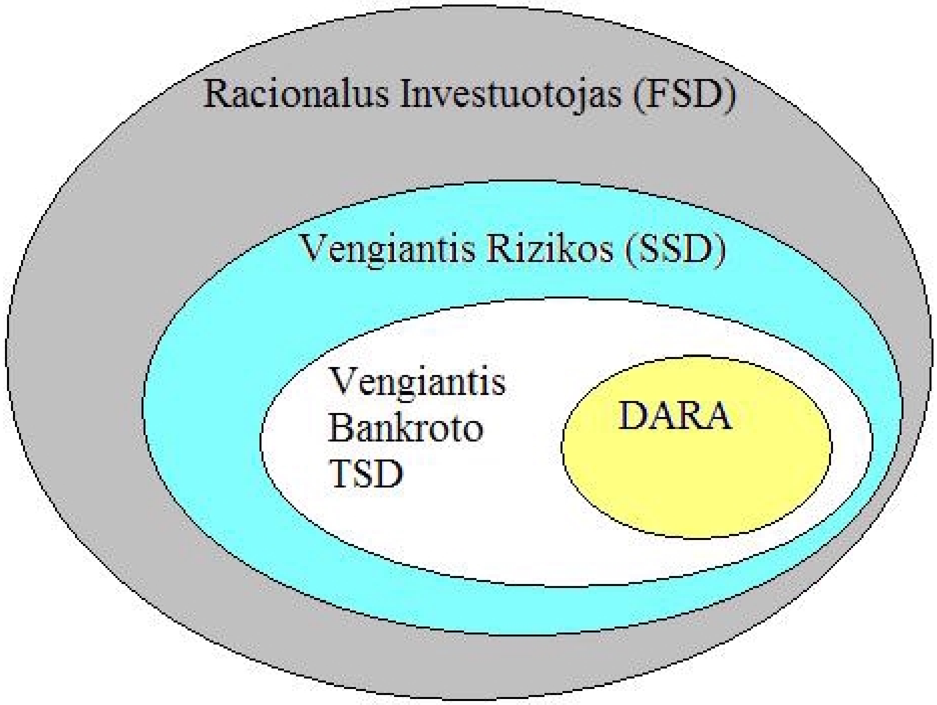
Naudos funkcija kuri yra didėjanti, įdubusi ir kurios kreivumas mažėja mažėjant vertei – linkusi į tiesiškumą prie didelių verčių – sutampa su realiu ekonominiu elgesiu.

Įveskime apibendrintą naudos funkciją, tam tereikia naudos funkciją išskleisti Teiloro eilute taško X_0 aplinkoje
$$U(X) = U(X_0) + U'(X_0)(X - X_0) + U''(X_0)(X - X_0)^2 + O(X - X_0).$$
Suvidurkinę, pertvarkę ir atlikę pakeitimą $X_1 = (1 + R)X_0$ gauname:
$$\mathbf{E}[U(X)] \sim \mathbf{E}[\tilde{U}(X)] \approx U(\mu_R) - \tfrac{1}{2}b \cdot \sigma_R^2,$$
čia $b = -X_0\frac{U''(X_0)}{U'(X_0)} > 0$, $\tilde{U}(X) = R - cR^2$ (kvadratinė naudos funkcija), esant tokiai funkcijai laukiama nauda lygi:
$$\mathbf{E}[\tilde{U}(X)] = \mu_R - c \cdot (\sigma_R^2 + \mu_R^2) \approx \mu_R - c \cdot \sigma_R^2$$
ši formulė sutampa su vidurkio-dispersijos optimalaus portfelio laukiama nauda. Pagrindinis šios formulės trūkumas yra tas, kad dažniausiai atmesti aukštesnių eilių narių negalima, ypač esant sunkių uodegų (ir asimetriškiems) pasiskirstymams. Šią problemą galima išspręsti paliekant pvz. trečios ir ketvirtos eilės narius [4], tokiu būdu išsprendžiama asimetrijos ir eksceso problema. T.y.
$$\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2] - c\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^3] = \mathrm{Var}(X) - cM_3(X)$$
Tuo tarpu naudos funkcija
$$U(x) = ax - bx^2 + cx^3.$$
Jei naudos funkciją parinksime štai tokios formos $U(x) = ax - |x|$ tai rizikos matas bus absoliutinis nuokrypis nuo vidurkio (angl. *Mean Absolute Deviation*)
$$MAD(X) = E[|X - E(X)|].$$
Gana nesudėtingai galima šią formulę apibendrinti
$$E[U(X)\} = E[|X - E(X)|^k]$$
arba
$$E[U(X)\} = E[|X - E(X)|^k]^{1/k}.$$
Dar bendresnę formulę pasiūlė [129]
$$E[U(X)\} = E[f(|X - E(X)|)^k]^{1/k}$$
funkcijai $f(.)$ yra keliami tam tikri reikalavimai.

C.3. Stochastinis dominavimas

Taikant stochastinio dominavimo (SD) modelius nereikia žinoti konkrečios naudos funkcijos išraiškos, čia svarbiausia surikiuoti pasirinkimus (a.d.) remiantis vien tik naudos funkcijos charakteristikomis [159]. Skirtingiems SD tipams atitinka skirtingas naudos funkcijų klases. SD yra paremtas aksiomatiniais rizikos vengimo modeliais:

- pirmos eilės SD (FSD): yra laikoma, kad investuotojas yra racionalus (vertina daugiau nei mažiau). A.d. X yra vertinamas labiau nei a.d. Y pagal FSD ($X >_{FSD} Y$) tada ir tik tada jei
$$\mathbf{E}[U(X)] \geqslant \mathbf{E}[U(Y)],$$
visoms didėjančioms naudos funkcijoms U. Tai reiškia, kad racionalaus investuotojo X vertinama labiau nei Y.



Paveikslas C.3: Stochastinio dominavimo hierarchija

- antros eilės SD (SSD): laikoma, kad investuotojas yra racionalus ir vengiantis rizikos. A.d. X yra vertinamas labiau nei a.d. Y pagal SSD ($X >_{SSD} Y$) tada ir tik tada jei
$$\mathbf{E}[U(X)] \geqslant \mathbf{E}[U(Y)],$$
visoms didėjančioms ir įgaubtoms naudos funkcijoms U. Tai reiškia, kad racionalaus investuotojo, vengiančio rizikos X vertinama labiau nei Y.
- trečios eilės SD (TSD): laikoma, kad investuotojas yra racionalus, vengiantis rizikos ir bankroto. A.d. X yra vertinamas labiau nei a.d. Y pagal TSD ($X >_{TSD} Y$) tada ir tik tada jei
$$\mathbf{E}[X] \geqslant \mathbf{E}[Y] \quad \text{ir} \quad \mathbf{E}[U(X)] \geqslant \mathbf{E}[U(Y)],$$
visoms didėjančioms ir įgaubtoms naudos funkcijoms U ir su išgaubta U'.
- Mažėjančio absoliutinio rizikos vengimo SD (DARA): laikoma, kad investuotojas yra racionalus, vengiantis rizikos ir turi mažėjančią A.R.A. A.d. X yra vertinamas labiau nei a.d. Y pagal DARA ($X >_{DARA} Y$) tada ir tik tada jei
$$\mathbf{E}[X] \geqslant \mathbf{E}[Y] \quad \text{ir} \quad \mathbf{E}[U(X)] \geqslant \mathbf{E}[U(Y)],$$
visoms didėjančioms ir įgaubtoms naudos funkcijoms U ir su $a'(W) \leqslant 0$.

Sąryšius tarp skirtingų rūšių SD galima pavaizduoti grafiškai C.3 ir užrašyti formaliai
$$X >_{FSD} Y \Rightarrow X >_{SSD} Y \Rightarrow X >_{TSD} Y \Rightarrow X >_{DARA} Y$$
t.y. efektyvusis DARA SD sprendinys $\Rightarrow$ efektyvusis TSD sprendinys $\Rightarrow$ efektyvusis SSD sprendinys $\Rightarrow$ efektyvusis FSD sprendinys.

Sakoma, kad vidurkio rizikos modelis su rizikos matu ρ yra suderinamas su SD sąryšiais tada ir tik tada jei iš to, kad $X >_{SD} Y$ seka, kad $X >_{m/\rho} Y$, visiems X ir Y. Tai reiškia, kad efektyvus portfelis (a.d.) vidurkio rizikos modelyje taip pat yra nedominuojamas stochastinio dominavimo prasme, todėl vidurkio-rizikos modeliai veda prie racionalių sprendimų.

Sakoma, kad vidurkio-rizikos modelis su rizikos matu ρ yra sutampantis su SD sąryšiu jei $X >_{SD} Y \Leftrightarrow X >_{m/\rho} Y$, visiems X ir Y. Tai reiškia, kad abu modeliai turi tokio pačio rango pasirinkimą. Pvz. monotoninis rizikos matas pasiūlytas Young [161] ir suderinamas su FSD ir

SSD yra MiniMax (MM) rizikos matas

$$MM(X) = -\sup\{c \in R \mid P(X \leqslant c) = 0\}.$$

C.4. Rizikos modelių apibendrinimas

Vidurkio-rizikos modeliai yra paprasti ir praktiški, skaičiuojamuoju požiūriu. Kita vertus, priklausomai nuo rizikos mato, jie nėra racionalūs pasirinkimo požiūriu. Įsivaizduokime modelį su simetriniu rizikos matu, tokiu kaip dispersija ir du atsitiktinius dydžius X ir Y. X turi garantuotą išlošimą w_0. Y turi dvi galimybes – išlošimus w_0 ir w_1 su tikimybėmis $\frac{1}{2}$. Tegul $w_1 > w_0$. Akivaizdu, kad turėtume pasirinkti Y, kadangi jo išlošimas yra nemažesnis nei X. Tačiau pagal vidurkio-rizikos modelio formulavimą, nei vienas negali būti pasirinktas, nes nors X ir turi mažesnę laukiamą vertę, jo rizika yra lygi nuliui.

Pagrindinis laukiamos naudos maksimizavimo problematiškumas slypi tinkamos naudos funkcijos parinkime. Stochastinio dominavimo sąryšiai aprašo teorinius racionalių pasirinkimų pagrindus, atsižvelgiant į stebėtą ekonominį elgesį. Deja, jie yra sunkiai pritaikomi praktikoje. Dažnai beveik neįmanoma surasti efektyvių (stochastinio dominavimo prasme) sprendinių sekos, kai atsitiktinių dydžių (portfelio sudedamųjų dalių) skaičius tolsta nuo baigtinio.

Rizikos matų klasifikavimas

1. Pirmos rūšies rizikos matai, matuoja nuokrypio nuo tam tikro taško dydį. Kai tas taškas yra a.d. vidurkis tai jie vadinami nuokrypio matais. Yra išskiriami du šių matų tipai:
   - 1.1. Dvipusiai (simetriniai) – vertinami ne tik neigiami nuokrypiai, bet ir teigiami:
     - 1.1.1. dispersijos–standartinio nuokrypis $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(R_p)}$ arba $\sigma(X) = (\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))^2])^{1/2}$];
     - 1.1.2. MAD (Vidurkio-absoliutinio nuokrypio; laukiama absoliutinio nuokrypio nuo vidurkio vertė) $MAD(X) = \mathrm{E}[|X - \mathrm{E}(X)|]$,
     - 1.1.3. Stabiliojo pasiskirstymo skalės/dispersijos parametro (plačiau apie stabiliuosius dėsnius 3.2 skyriuje) ;
     - 1.1.4. Gini vidurkio skirtumas [16], [110] ir [135] $\mathrm{E}(|W_x - Y|)$;
     - 1.1.5. Apibendrintos dvipusės rizikos matų klasės
       $$\rho(X) = \left[\int_{-\infty}^{z} |x-c|^a \cdot w[F(y)]f(y)\,\mathrm{d}y\right]^b,$$
       (aptariamos plačiau).
   - 1.2. Vienpusiai (žemyn, asimetriniai) – vertinami nuokrypiai į neigiamąją pusę:
     - 1.2.1. Mažiausių dalinių momentų metodas (angl. *Lower partial moments of order α around mean*) $LPM_\alpha(\mathrm{E}\,X, X) = [\mathrm{E}\{\max(0, X - \mathrm{E}(X))^\alpha\}]^{1/\alpha}$;
     - 1.2.2. VaR/CVaR aptariami daugelio autorių ir yra plačiausia nagrinėjami modeliai;
     - 1.2.3. Laipsninės CvaR/ETL [110] $\mathrm{E}\{|W_x|^q\,|-W_x \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha(W_x)\}$.
     - 1.2.4. Svarbiausia saugumas [110] $\Pr(W_x \leqslant \lambda)$;
     - 1.2.5. Pusiau dispersijos;
     - 1.2.6. Blogiausio atvejo.

   Abiejų tipų matai gali būti tik teigiami.
2. Antros rūšies rizikos matai, matuoja visų galimų nuostolių reikšmingumą. Priešingai nei (I) rūšies matai šie gali būti tiek teigiami tiek neigiami. Šie matai gali būti laikomi:
   - 2.1. Būtinas kapitalas (investuoti taip, kad jis būtų nerizikingas). Šiuo atvejų rizikos matas yra teigiamas;
   - 2.2. Būtina premija (kurią paėmus nebūtų pažeistas saugumas). Šiuo atveju matas yra neigiamas.

     Pvz.

* Vertė-Rizika (Value-at-Risk: VaR(γ)) viršutinis $\gamma 100\%$ nuostolių $-R_p$ pasiskirstymo taškas;
* Tikėtinų nuostolių (angl. *Expected Tail Loss:* ETL) arba geriau žinomas pavadinimas sąlyginis vertė-rizika (CVaR): visų $-R_p$ vidurkis, kai $-R_p > \text{VaR}(\gamma)$;

Sąryšiai tarp (I) ir (II) rūšies matų yra nustatomi tam tikromis aksiomatinėmis charakteristikomis ir yra aptariami daugelio autorių ([4], [110],[150], [104], [130] ir kt.).

Apibendrintos rizikos matų klasės

Stone [140] aprašė trijų parametrų rizikos matų klasę

$$\rho(X) = \left[\int_{-\infty}^{z} (|\, x - c \,|)^k f(x) dx \right]^{1/k} \tag{C.2}$$

su parametrais z, k ir c. Stone klasė apima standartinį nuokrypį, pusiau standartinį nuokrypį, pusiau absoliutinį nuokrypį, o taip pat ir (C.1). Labiau apibendrintą penkių parametrų rizikos matų klasę pasiūlė Pedersen ir Satchell [112]

$$\rho(X) = \left[\int_{-\infty}^{z} (|\, x - c \,|)^a w[F(y)] f(y) dy \right]^{b}, \tag{C.3}$$

apimančią Stone klases, taip pat dispersiją, pusiau dispersiją, mažiausių dalinių momentų, o taip pat ir kitus rizikos matus.

Mažiausių dalinių momentų modelis (LPM)

Šis metodas priskiriamas pirmojo tipo vienpusės rizikos matams (matuojamas neigiamas nuokrypis nuo pasirinkto fiksuoto taško $\tau = E[X]$). Mažiausias k lygio dalinis momentas apie vidurkį susietas su a.d. X yra

$$LPM_k(\mathbf{E}X, X) = \left[\mathbf{E}\{[\max(0, \mathbf{E}(X) - X)]^k\} \right]^{1/k} \tag{C.4}$$

(k, τ) modelis yra vidurkio-rizikos modelis, kuriame rizikos matas yra LMP su α lygmeniu apie tašką τ, k charakterizuoja investuotojo požiūrį į rizika:

- $k \in (0, 1)$, kai investuotojas yra ieškantis rizikos;
- $k = 1$, kai investuotojas yra rizikai neutralus;
- $k > 1$, kai investuotojas yra vengiantis rizikos.

Tam tikrais atvejais LPM yra suderinamas su SD modeliais:

- $k \geqslant 0$ suderinamas su FSD (efektyvusis (k, τ) modelio sprendinys yra optimalus visiems racionaliems investuotojams);
- $k \geqslant 1$ suderinamas su SSD (efektyvusis (k, τ) modelio sprendinys yra optimalus visiems racionaliems ir rizikos vengiantiems investuotojams);
- $k \geqslant 2$ suderinamas su TSD (efektyvusis (k, τ) modelio sprendinys yra optimalus visiems racionaliems, rizikos ir bankroto vengiantiems investuotojams).

Deficito rizika (angl. *shortfall risk*)

Pati bendriausia rizikos matų klasė aprašanti deficito riziką yra vadinamoji mažiausių dalinių momentų k ($k = 0, 1, 2 \ldots$) klasė

$$LPM_k(z, X) = \left[\mathbf{E}\{[\max(0, z - X)]^k\} \right].$$

Arba normalizuotoje formoje rizikos matas bus:

$$LPM_k(z, X) = \left[\mathbf{E}\{[\max(0, z - X)]^k\} \right]^{1/k}$$

Šio tipo rizikos matus nagrinėjo Fishburn [49] ir jie dažniausiai yra naudojami laikant, kad $k = 0, 1$ arba 2. Tokiu būdu gauname deficito tikimybę

$$SP_z = \mathbf{P}(X \leqslant z) = F(z),$$

laukiamas deficitas

$$SE_z(X) = \mathbf{E}[\max(0, z - X)],$$

deficito dispersija

$$SV_z(X) = \mathbf{E}[\max(0, z - X)^2],$$

o taip pat ir deficito standartinis nuokrypis

$$SSD_z(X) = \mathbf{E}[\max(0, z - X)^2]^{1/2}.$$

Svyravimai apie $z = \mathbf{E}(X)$, pavyzdžiui, mažesnysis pusiau absoliutinis nuokrypis (angl. *lower-seni-absolute deviation*) LSAD yra pasiūlyti Ogryczak ir Ruszczynski [109] ir Gotoh bei Konno [59]

$$\mathbf{E}[\max(0, \mathbf{E}(X) - X)],$$

pusiau dispersija

$$\mathbf{E}[\max(0, \mathbf{E}(X) - X)^2],$$

pusiau standartinis nuokrypis

$$\mathbf{E}[\max(0, \mathbf{E}(X) - X)^2]^{1/2}.$$

Taip pat svarbu panagrinėti sąlyginius deficito rizikos matus. Labai svarbus pavyzdys galėtų būti vidurkio nuokrypio nuostolis (angl. *mean excess loss*) arba kitaip sąlyginis laukiamas deficitas

$$MEL_z(X) = \mathbf{E}(z - X \mid X \leqslant z) = \frac{SE_z(X)}{SP_z(X)},$$

vidutinis deficitas su sąlyga, kad deficitas bus. MEL yra laikomas blogiausio įvykio rizikos matu.

Vertė esant rizikai

Šio tipo rizikos matus vieni iš pirmųjų labai plačiai nagrinėjo Rockafeller ir Uryasev [127–129]. Trumpai panagrinėkime vertė-rizika rizikos matus ir su jais susijusius modelius. Pažymėkime nuostolius susietus su investicijomis $x = (x_1, \ldots, x_n)$ atsitiktiniu dydžiu Lx ($Lx = -Rx$). VaR su pasikliovimo lygiu $\beta \in (0, 1)$ susietu su investicijomis x (arba R_x) yra maksimalus leidžiamas nuokrypis investavimo periodo pabaigoje su šiuo pasikliovimo lygiu. Paprastai $\beta = 0.9$, $\beta = 0.95$ arba $\beta = 0.99$. Tegul F yra atsitiktinio dydžio L_x pasiskirstymo funkcija

$$F(\alpha) = prob(L_x \leqslant \alpha), \tag{C.5}$$

$$VaR_\beta(X) = VaR_\beta(R_X) = VaR_\beta(L_X) = \min\{\alpha \in R \mid F(\alpha) \geqslant \beta\}. \tag{C.6}$$

VaR modelis gali būti suderinamas su SD modeliais, jei:

- $\forall\beta \in (0, 1)$ vidurkio – VaR$_\beta$ modelis yra suderinamas su FSD;
- specialioms pasiskirstymų klasėms (pvz. normaliems) ir jei a.d. turi vienodą vidurkį, VaR yra suderinamas su SSD.

Tikėtinų nuostolių arba sąlyginis vertė esant rizikai

CVaR su pasikliovimo lygiu $\beta \in (0, 1)$susietu su investicijomis x (arba R_x) yra vidutinis nuokrypis iš blogiausių $(1 - \beta)\%$ investavimo atvejų.

$$CVaR_\beta(X) = CVaR_\beta(R_X) = CVaR_\beta(L_X) = L_X$$

pasiskirstymo β-uodegos vidurkis. β-uodegos pasiskirstymas gaunamas paimant L_X pasiskirstymo viršutinę $(1 - \beta)$ dalį (atitinkančią ekstremalius nuostolius) ir sunormuojant iki [0,1]. β-uodegų pasiskirstymo f-ja

$$F_\beta(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha < VaR_\beta(x) \\ \dfrac{F(\alpha) - \beta}{1 - \beta}, & \alpha \geqslant VaR_\beta(x) \end{cases}.$$

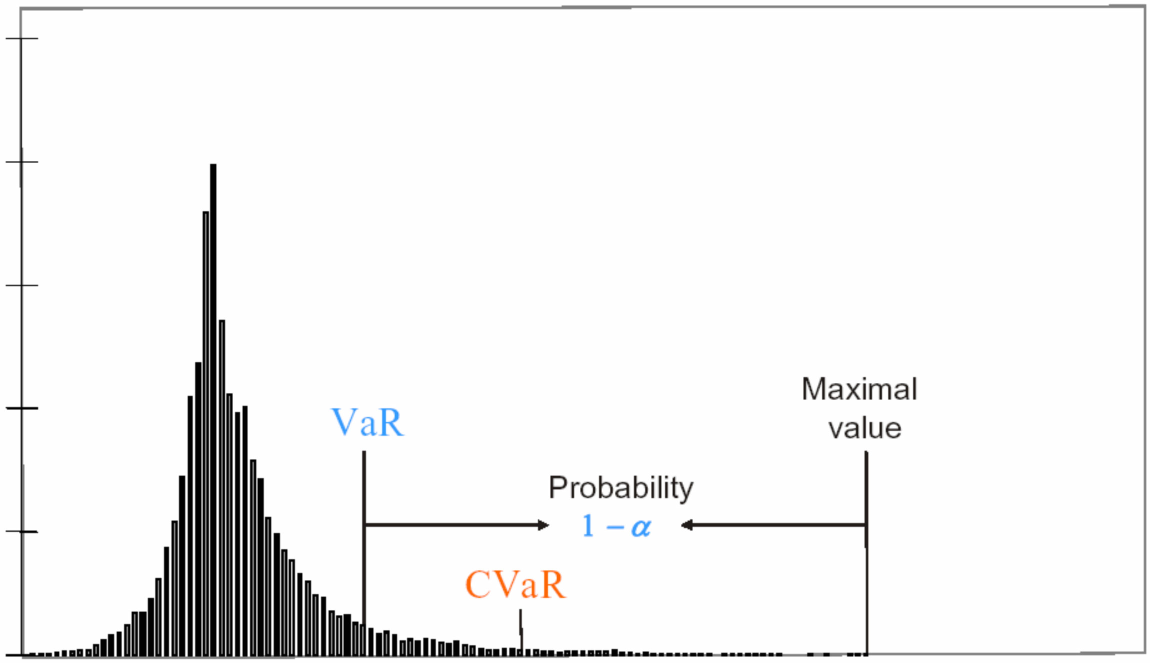
Tegul L_X yra diskretus a.d. L_X:

$$\begin{matrix} z_1, & z_2, \ldots, & z_{n-2}, & z_{n-1}, & z_n \\ p_1, & p_2, \ldots, & p_{n-2}, & p_{n-1}, & p_n, \end{matrix}$$

jei $\beta \in (p_1 + \cdots + p_{n-3}, p_1 + \cdots + p_{n-2})$, tai VaR$_\beta(x) = z_{n-2}$.

Tuomet

$$CVaR_\beta(x) = \frac{1}{1 - \beta}(z_{n-2}(p_1 + \cdots + p_{n-2} - \beta) + z_{n-1}p_{n-1} + z_n p_n).$$



Paveikslas C.4: VaR ir CVaR padėtis nuostolio pasiskirstyme.

Tuo atveju jei nuostoliu L_X pasiskirstymas yra tolydus, $CVaR_\beta(x)$ yra sąlyginis nuostolių vidurkis apie $VaR_\beta(x)$:

$$CVaR_\beta(x) = E[L_X|L_X > VaR_\beta(x)] = E[L_X|L_X \geqslant VaR_\beta(x)]. \tag{C.7}$$

Diskrečiu atveju šios lygybės negalioja. CVaR modelis gali būti suderinamas tik su SSD modeliu, jei $\forall\beta \in (0,1)$ vidurkio–$CVaR_\beta$ modelis yra suderinamas su SSD.

VaR tai prognozuotas maksimalus nuostolis su tam tikru pasikliovimo lygmeniu. Kaip jau buvo minėta, jei X – a.d. reprezentuojantis investicinio portfelio nuosmukius fiksuotame laiko tarpe, tai

$$VaR_\beta(X) = \min\{\alpha : P(X \leqslant \alpha) \geqslant \beta\}$$

Kaip paaiškėja VaR turi neigiamų savybių:

- Neįvertina rizikos peržengiančios (didesnės) VaR lygį.
- VaR nėra subadityvi (diversifikavus portfelį gali padidėti rizika) ir yra ne iškila.

Dėl šių ir kitų savybių VaR yra keičiamas CVaR kuris apibūdinamas taip: CVaR tai laukiamas nuosmukis, kuris viršija VaR

$$CVaR_\beta(X) = \mathbf{E}[X|X \geqslant VaR_\beta(X)]. \tag{C.8}$$

Pažymėkime $f(x,X)$ – išlošimo funkcija, o $-f(x,X)$ – nuosmukio f-ja tuomet optimizavimo problemos formuluojamos taip [128]:

$$\begin{array}{cc} \max\limits_x & \mathbf{E}[f(x,X)] \\ & CVaR_\beta[-f(x,X)] \leqslant \nu \\ & x \geqslant 0 \end{array} \tag{C.9}$$

arba

$$\begin{array}{cc} \min\limits_x & CVaR_\beta[-f(x,X)] \\ & \mathbf{E}[f(x,X)] \geqslant r \\ & x \geqslant 0 \end{array} \tag{C.10}$$

arba

$$\begin{array}{cc} \max\limits_{x} & \mathbf{E}[f(x,X)] \\ & CVaR_{\beta}[-f(x,X)] \leqslant \nu_1 \\ & CVaR_{\beta}[-f(x,X)] \leqslant \nu_2 \\ & x \geqslant 0 \end{array}. \tag{C.11}$$

Tegul

$$F_{\beta}(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int [f(x,\xi)-\alpha]^{+} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

čia $z^{+} = max\{z, 0\}$.

Jei [128]

$$CVaR_{\beta}[f(x,\xi)] = \min_{\alpha} F_{\beta}(x,\alpha),$$

tai

$$\min_{x} CVaR_{\beta}[f(x,\xi)] = \min_{x,\alpha} F_{\beta}(x,\alpha).$$

Diskrečiuoju atveju optimizavimo problemą galima suvesti į tiesinio programavimo uždavinį.

$$F_{\beta}(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\sum_{k=1}^{N}[f(x,\xi_k)-\alpha]^{+} p_k,$$

čia $z^{+} = max\{z, 0\}$. $[f(x,\xi_k)-\alpha]^{+}$ pakeičiame adekvačia sąlyga $z_k \geqslant f(x,\xi_k)-\alpha$, $z_k \geqslant 0$, $k = 1,\ldots,N$. Gauname tiesinio programavimo uždavinį:

$$\begin{array}{cc} \min & \alpha + \frac{1}{1-\beta}\sum_{k=1}^{n} p_k z_k \\ & z_k \geqslant f(x,\xi_k) - \alpha, \forall k \\ & z_k \geqslant 0, \forall k \\ & x \in X \end{array} \tag{C.12}$$

arba maksimizuojant tik laukiamą pelną

$$\begin{array}{cc} \max & R^{T}x \\ & CVaR_{\alpha^j}(x) \leqslant U_{\alpha^j}, j = 1,...,J \\ & x \in X \end{array}. \tag{C.13}$$

C.5. Vidurkio-rizikos tipo portfelio parinkimas arba Markowitz modelis ir uždavinys

Kaip jau buvo minėta anksčiau portfelis x yra efektyvus jei jis:

- Turi maksimalią laukiamą grąža iš visų portfelių su ta pačia rizika;
- Turi minimalia rizika iš visų portfelių su ta pačia laukiama grąža.

Nagrinėjant vidurkio–dispersijos portfelio optimizavimą, laikoma, kad rizikos matas yra standartinis nuokrypis. Tokio tipo portfelio optimizavimą nagrinėjo Markowitz [99] ir [100].

Tarkime, kad turime n vertybinių popierių. Jų pelno normos atitinkamai lygios $R_1, R_2, \ldots, R_n$, o kovariacijos tarp jų (pelno normų) yra σ_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Portfelio svorio koeficientai yra x_i, $i = 1, 2, ..., n$ su sąlyga, kad

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Kai kurie koeficientai gali įgyti neigiamas reikšmes, nes yra leidžiamas nepadengtasis pardavimas. Norėdami rasti portfelį su minimalia pelno dispersija, priskirkime vidutinei portfelio normai reikšmę Rp. Turime rasti minimaliosios dispersijos galimą portfelį su vidurkiu Rp. Matematiškai uždavinys formuluojamas taip:

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \cdot \sigma_{ij} \to \min \tag{C.14}$$

su sąlygomis

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i = R_p \tag{C.15}$$

ir

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{C.16}$$

Daugiklis 0.5 prieš dispersijos raišką parašytas tik tam, kad būtų gautas paprastesnis atsakymas. Turint suformuluotą konkretų Markowitz uždavinį, jį galima išspręsti skaitmeniškai, panaudojus atitinkamas optimizavimo procedūras. Uždaviniui spręsti naudosime Lagranžo daugiklių metodą [149]. Sudarykime Lagranžo funkciją su daugikliais λ ir μ

$$L = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \cdot \sigma_{ij} - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i - R_p \right) - \mu \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right)$$

Apskaičiuokime funkcijos L dalinę išvestinę svorio x_i, $i = l, 2, ..., n$ koeficientų ir Lagranžo daugiklių atžvilgiu ir gautą išraišką prilyginkime nuliui. Efektyviojo portfelio (kai yra leidžiamas nepadengtasis pardavimas) su vidutine pelno norma Rp svorio koeficientai x_i, $i = 1, 2, ..., n$. ir Lagranžo daugikliai λ ir μ tenkina lygtis

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \sigma_{ij} - \lambda R_i - \mu = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{C.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i R_i = R_p, \tag{C.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{C.19}$$

Turime n lygčių bei dvi apribojimų lygtis. Iš viso yra $n + 2$ lygtys ir tiek pat nežinomųjų: x_i, $i = 1, 2, ..., n$, λ ir μ. Šių tiesinių lygčių sprendinys duos efektyviojo (optimalaus) portfelio su vidutine pelno norma Rp svorio koeficientus. Deja, jei nepadengtasis pardavimas nėra leidžiamas šio uždavinio pertvarkyti į tiesinių lygčių sistemą negalima. Ir toks uždavinys vadinamas kvadratinio programavimo uždaviniu, kuris nėra analitiškai išsprendžiamas. Suformuluokime alternatyvų uždavinį tokiam portfeliui optimizuoti [101] ir [147].

$$\begin{array}{c} \min\limits_{\forall x} \quad -\lambda R^T x + \frac{1}{2} x^T Q x, \\ Ax = b, \\ e^T x = 1, \\ x \geqslant 0, \end{array} \tag{C.20}$$

čia Q – kovariacijų matrica, e – vienetų vektorius, R – laukiamų grąžų vektorius. $\lambda > 0$. Šį modelį galima praplėsti įvedant sandorių kaštus ir nagrinėjant kelių periodų investavimą. (C.20) sistemą galima pertvarkyti taip:

$$\begin{array}{c} \max\limits_{\forall x} \quad R^T x - \frac{1}{2} R_A x^T Q x, \\ e^T x = 1, \\ x \geqslant 0, \end{array} \tag{C.21}$$

čia R_A yra Arrow–Pratt absoliutinio rizikos vengimo indeksas (žr. Kallberg ir Ziemba [71])

$$R_A = -\frac{U''(w)}{U'(w)},$$

kur U Neumann–Morgenstern [150] naudos funkcija. Empiriniai Kallberg ir Ziemba [71] rezultatai paradė, kad kai $R_A \geqslant 6$ linkstama prie labai rizikos viengenčių portfelių, kai $2 \leqslant R_A \leqslant 4$ stebimas padidintas absoliutinis rizikos vengimas ir kai $R_A \leqslant 2$ krypstama prie rizikingų portfelių. $R_A = 4$ maždaug atitinka pensijų fondų valdymo portfelį (dažnai, laikant 60% akcijų ir 40% obligacijų).

Praktikoje modeliuose su rizika–grąža priimta naudoti kitą parametrą $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ir minimizuoti funkciją [130]

$$\min\ \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \cdot \sigma_{ij} - (1-\lambda)\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \mu_i \tag{C.22}$$

laikant, kad $\frac{a_R}{2} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ gaunamas ekvivalentumas tarp (C.21) ir (C.22). Keičiant λ nuo 0 iki 1 galima gauti sprendinį su maksimalia laukiama grąža ir minimalia dispersija.

Robastinis portfelio parinkimas

Tarkime, kad Markowitz V-D modelis yra aprašomas štai tokia problema:

$$\min_{x\in F} -\lambda R^T x + \frac{1}{2}x^T Q x$$

laikysime, kad sritis $F = \{x : Ax = b;\ eTx = 1;\ x \geqslant 0\}$ yra žinoma ir nėra atsitiktinė. Robastinio optimizavimo atveju grąžos ir kovariacijų matricos yra intervalinio tipo [147]:

$$\Im = \{(R,Q) : R^L \leqslant R \leqslant R^U, Q^L \leqslant Q \leqslant Q^U, Q \succeq 0\}.$$

Intervalai formuojami iš istorinių duomenų minimumų ir maksimumų. Robastinio optimizavimo problema – minimizuoti tikslo funkciją blogiausio atvejo realizacijos parametrų R ir Q atžvilgiu:

$$\min_{x\in F}\left\{\max_{(R,Q)\in\Im} -\lambda R^T x + \frac{1}{2}x^T Q x\right\}.$$

Pertvarkome taip:

$$\min_{x\in F}\left\{\lambda \min_{R\in\Im^R} R^T x + \max_{Q\in\Im^Q}\frac{1}{2}xx^T Q\right\}.$$

Šis uždavinys gali būti išreikštas kaip balno taško problema ir išspręstas per polinominį laiką Tütüncü [147].

Pavyzdžiui:

Tegul $x \geqslant 0$ ir $Q \succeq 0$. Tuomet robastinis optimizavimas susiveda į

$$\min_{x\in F} -\lambda (R^L)^T x + \frac{1}{2}x^T Q^U x.$$

C.6. Vidutinio absoliutinio nuokrypio modelis MAD

Konno [77] pasiūlė portfelio optimizavimo modelį naudojant dalimis tiesinę rizikos funkciją. MAD modelis, specialusis dalimis tiesinės rizikos modelis, yra ekvivalentus Markowitz modeliui su sąlyga, kad grąžos yra pasiskirstę pagal daugiamatį normalųjį dėsnį (Konno ir Yamazaki [78]). Tačiau taip bus tik tada jei mato L_1 (absoliutinių portfelio grąžos nuokrypių nuo vidurkio suma) minimizavimas bus ekvivalentus mato L_2 (dispersija) minimizavimui. Tegul m_t aprašo absoliutinį portfelio grąžų nuokrypį (nuo vidurkio) laiko momentu t, tada MAD modelis yra:

$$\min Z_{MAD} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m_t$$

$$\sum_{i=1}^{N}(R_{it} - \mu_i)x_i \ \leqslant\ m_t, \qquad t = 1,...,T, \tag{C.23a}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(R_{it} - \mu_i)x_i \ \geqslant\ -m_t, \qquad t = 1,...,T, \tag{C.23b}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i &= R_p, \\
\sum_{i=1}^{N} x_i &= 1, \\
m_t &\geqslant 0, \qquad t = 1, ..., T, \\
x_i &\geqslant 0, \qquad i = 1, ..., N.
\end{aligned}$$

Tikslo funkcija minimizuoja absoliutinio nuokrypio vidurkį apskaičiuotą pagal (C.23a) ir (C.23b) formules ir su sąlyga, kad m_t yra ne neigiami.

Konno ir Yamazaki [78] teigia, kad MAD modelis puikiai pakeičia V-D modelį įtraukdamas visas teigiamas jo puses. Jie pateikia tris svarius argumentus:

a) MAD modelio formulavime nėra reikalavimų grąžų kovariacijų matricai;

b) sąlyginis paprastumas sprendžiant tiesinę sistemą lyginant su kvadratine – didesnės apimties problemos gali būti išspręsto efektyviau ir greičiau,

c) MAD portfeliai paprastai turi mažiau akcijų – tai sumažina sandorių kaštus portfelio peržiūrėjimo metu.

C.7. MiniMax modelis

MiniMax modelis (MM) (Young [161]) gali būti aprašytas remiantis idėja – stebėti kaip šis portfelis būtų elgęsis praeityje per visus istorinius stebėjimus $t = 1, \ldots, T$. Minimali grąža kuri galėjo būti praeityje šiuo atveju sutampa su rizikos matu. Modelis stengiasi maksimizuoti šią reikšmę, kol pasiekia nurodytą laukiamos grąžos lygį. Kita, alternatyvi ir dažniausiai labiau naudinga, MM portfelio parinkimo sąlyga yra – didžiausio, stebėtame laike, galimo nuostolio minimizavimas. Minimax modelyje naudojama L_1 norma, kuri įtakoja stipresnį absoliutinį rizikos vengimą (neigiamų nuokrypių) [58]. Galutinį sprendinį gali labai stipriai paveikti net gi viena išsišokanti duomenų reikšmė. M_p apibūdina minimalią portfelio grąžą gautą per visą stebėjimo periodą, t.y.,

$$M_p = \min_t \sum_{i=1}^{N} x_i R_{it}. \tag{C.24}$$

Tuomet Minimax modelis (MM) yra:

$$\begin{aligned}
\max Z_{MM} &= M_p, \\
\sum_{i=1}^{N} R_{it} x_i &\geqslant M_p, \qquad t = 1, ..., T, \\
\sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i &= R_p, \\
\sum_{i=1}^{N} x_i &= 1, \\
l^{M_p} &\leqslant M_p \leqslant u^{M_p},
\end{aligned}$$

kur l^{M_p} ir u^{M_p} yra atitinkamai apatinis ir viršutinis M_p rėžiai. Young [161] tai pat siūlo alternatyvų modelio formulavimą, kuris maksimizuoja laukiamą portfelio grąžą, atsižvelgiant į duotąjį apatinį apribojimą visiems stebėtiems portfelio periodams.

C.8. Portfelio elgesio matai

Labai detaliai šie parametrai nagrinėjami [110], o taip pat ir Stoyanov, Rachev ir Fabozzi [139]

- Šarpo koeficientas (Sharpe ratio)

$$SR = \frac{\mathbf{E}(w^T R - R_f)}{STD_{w^T R - R_f}}; \tag{C.25}$$

čia rizikos matas $STD_{w^T R - R_f}$ yra portfelio $w^T R - R_f$ standartinis nuokrypis;

- STARR koeficientas

$$STARR(\gamma) = \frac{\mathbf{E}(w^T R - R_f)}{CVaR_{99\%}(w^T R - R_f)}, \tag{C.26}$$

pakeičia simetrinį standartinį nuokrypį – vienpusiu $CVaR$ rizikos matu ir yra naudingas tiek paprastam perrinkimui tiek ir sudėtingesniam optimizavimui [102];čia

$$CVaR_{99\%}(w^T R - R_f) = -\frac{1}{[0,01n]} \sum_{\left(w^T R - R_f\right)_k \leqslant -\mathrm{VaR}_{99\%}\left(w^T R - R_f\right)} \left(w^T R - R_f\right)_k,$$

o $\mathrm{VaR}_{99\%}\left(w^T R - R_f\right)$ randamas iš formulės $P\left(w^T R - R_f \leqslant -\mathrm{VaR}_{99\%}\left(w^T R - R_f\right)\right) = 0,01$.

- Sortino koeficientas

$$Sortino(t) = \frac{\mathbf{E}(w^T R - R_f)}{\theta_{R_p}(t)}, \tag{C.27}$$

čia

$$\theta_{R_p}(t) = \left(\int_{-\infty}^{t} (t - R_p)^q f(R_p)\, \mathrm{d}R_p \right)^{1/q} = \left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} (t - w^T R_k)_+^q \right)^{1/q},$$

vadinamas pusiau standartinis nuokrypis $\theta_{R_p}(\mu_p)$ savo prasme panašus į ETL(50%), bet ETL yra paprastesnis ir turi alternatyvių optimizavimo savybių [127] ir duoda geresnį optimalų portfelį [16];

- Rachev koeficientas (R-ratio)

$$R(w) = \frac{ETL_\alpha(R_f - w^T R)}{ETL_\beta(w^T R - R_f)} = \frac{CVaR_{(1-\alpha)}(R_f - w^T R)}{CVaR_{(1-\beta)}(w^T R - R_f)} \tag{C.28}$$

vadinamas apdovanojimas už nuokrypį į viršų ir bauda už nuokrypį į apačią. [16] straipsnyje pateikiamas apibendrintas R-ratio koeficientas ir palyginimai su daugeliu kitų rizikos matų;

- Laipsninis (apibendrintas) Rachev koeficientas (aptariamas [16])

$$\rho(x\acute{r}) = \frac{ETL_{(\gamma,\alpha\%)}(R_f - w^T R)}{ETL_{(\delta,\beta\%)}(w^T R - R_f)}, \tag{C.29}$$

čia $ETL_{(\gamma,\alpha\%)}(X) = \mathbf{E}((\max(L,0)^\gamma)/L > \mathrm{VaR}_\alpha)$

- Farinelli-Tibiletti [16] indeksas

$$\rho(x\acute{z}) = \frac{\sqrt[p]{\mathbf{E}(w^T R - t_1)_+^p}}{\sqrt[q]{\mathbf{E}(w^T R - t_2)_-^q}}, \tag{C.30}$$

yra Omega indekso apibendrinimas, kuris parodo viršutinio ir apatinio dalinio momento santykį. Čia

$$\sqrt[p]{\mathbf{E}(w^T R - t_1)_+^p} = \left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} \left(w^T R_k - t\right)_+^p \right)^{1/p}, \tag{C.31}$$

$$\sqrt[q]{\mathbf{E}(w^T R - t_2)_-^q} = \left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} \left(w^T R_k - t\right)_-^q \right)^{1/q} \tag{C.32}$$

kur $(X - t)_+^p = (\max(X - t, 0))^p$ ir $(X - t)_-^q = (\max(t - X, 0))^q$.

Lentelių sąrašas

Paveikslų sąrašas

Už pagalbą rengiant disertaciją dėkoju darbo vadovui Matematikos ir Informatikos Instituto prof. hab. dr. Leonidui Sakalauskui bei kolegai dr. Igoriui Belovui.