MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

Marijus Vaičiulis

Tiesinių procesų su tolima priklausomybe polinomų sumų ribinės teoremos

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2003

Darbas atliktas 1999–2003 Matematikos ir informatikos institute.

Darbo vadovas:

Prof. habil. dr. Donatas SURGAILIS (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Matematikos m. krypties taryba:

Pirmininkas:

Prof. habil. dr. Bronius GRIGELIONIS (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

1. Prof. habil. dr. Raimondas ČIEGIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
2. Prof. habil. dr. Vigirdas MACKEVIČIUS (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
3. Habil. dr. Rimas NORVAIŠA (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
4. Prof. habil. dr. Vygandas PAULAUSKAS (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Oponentai:

1. Doc. habil. dr. Remigijus LEIPUS (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
2. Prof. habil. dr. Leonas SAULIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos m. krypties gynimo tarybos posėdyje 2004 m. sausio 23 d. 12 val. Matematikos ir informatikos institute, 303 seminarų kambaryje.

Adresas: Akademijos g. 4, 2600 Vilnius, Lietuva.
Tel. +370(5)21 09 302, fax: +370(5)27 29 209.

Disertacijos santrauka išsiųsta 2003 m. gruodžio mėn. 22 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Matematikos ir informatikos instituto ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto bibliotekose.

Turinys

Įvadas ir pagrindiniai rezultatai

Klasikinė tikimybių teorija remiasi nepriklausomybės sąvoka. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių dėsniai ir sumavimo teorija buvo išvystyti praėjusio šimtmečio pradžioje A. Kolmogorovo, A. Chinčino, S. Bernšteino, P. Lévy ir kt. darbuose. Kita vertus, per pastaruosius 20 metų išsivystė nauja tikimybių teorijos ir matematinės statistikos sritis - *tolima priklausomybė* (angl. ,,long-range dependence"). Dažniausiai tolima priklausomybė ("tolima atmintis") suprantama kaip lėtas laipsniškas stacionarios atsitiktinės sekos koreliacinės funkcijos gesimas, kur laipsnio rodiklis (charakterizuojantis tolimos priklausomybės intensyvumą) gali būti bet koks skaičius iš intervalo $(0, 1)$. Tolimos priklausomybės reiškinys sutinkamas daugelyje mokslo sričių (hidrologijoje, statistinėje fizikoje, finansų teorijoje, telekomunikacijoje ir t.t.). Stipriai priklausomų atsitiktinių dydžių savybės (ribiniai dėsniai, statistinės išvados) labai skiriasi nuo nepriklausomų arba silpnai priklausomų dydžių savybių.

Tolimos priklausomybės procesai yra plačiai išdėstyti mokslinėje literatūroje. Istorinė tolimos priklausomybės apžvalga duota Berano [7] monografijoje. Šioje monografijoje taip pat aptariami realūs duomenys iš įvairių mokslo sričių, tame tarpe Nilo upės nuotėkio metiniai minimumai (622 - 1281 m.), nagrinėti žymaus anglų hidrologo H. Hursto [28], atradusio taip vadinamąjį *Hursto efektą.* Hursto darbas turejo didelės įtakos vėlesniems B. Mandelbroto ir jo bendraautorių darbams [39], [40], kuriuose buvo išvystyti matematiniai tolimos priklausomybės procesų modeliai (trupmeninis Brauno judesys, trupmeninis Gauso triukšmas ir kt.). Berano [7] monografijoje taip pat daug dėmesio skiriama tolimos priklausomybės procesų statistikai. Svarbiausias tokių procesų statistikos uždavinys yra Hursto parametro vertinimas ir kitos su šiuo parametru susijusios statistinės išvados. Tai palyginti nauja (klasikinėje statistikoje toks uždavinys iš vis neegzistuoja) ir pastaruoju metu ypač sparčiai besivystanti matematinės statistikos sritis. Naujausių tolimos priklausomybės tyrimų apžvalga duota [15] monografijoje.

Tiesinis procesas. Vienas is svarbiausių laiko eilučių modelių yra slenkančio vidurkio procesas (,,tiesinis filtras")

$$X_t := \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \xi_{t-i}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

kur ξ_i, $i \in \mathbb{Z}$ yra tarpusavyje nekoreliuoti stacionarūs atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir baigtine dispersija ("silpnas baltas triuksmas"), dar vadinami *inovaci-*

jomis. Slenkančio vidurkio (1) koeficientai $b_i,\ i \in \mathbb{Z}$ yra realūs skaičiai, tenkinantys sąlygą

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i^2 < \infty.$$

Proceso (1) autokovariacinė funkcija lygi

$$r_t = \sigma^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i b_{t+i}, \tag{2}$$

kur $\sigma^2 = E\{\xi_0^2\}$. Tiesinis filtras (1) vadinamas *priežastiniu*, arba *kauzaliu*, jei $b_i = 0$ visiems $i < 0$; tokiu atveju, procesas užrašomas vienpusiu slenkančiu vidurkiu:

$$X_t := \sum_{i=0}^{\infty} b_i \xi_{t-i}. \tag{3}$$

Tiesinį procesą (1) galima apibrėžti ir tuo atveju, kai ,,triukšmas" ξ_i turi begalinę dispersiją (žr. žemiau). Sakysime, kad tiesinis filtras (1) turi *tolimą atmintį*, jei

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} |b_i| = \infty. \tag{4}$$

Priešingu atveju (t.y. kai $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |b_i| < \infty$), sakysime, kad šis filtras turi *trumpą atmintį*. Gerai žinoma, kad vienas iš svarbiausių laiko eilučių modelių – stacionarūs autoregresiniai slenkančio vidurkio procesai (ARMA) - priklauso trumpos atminties procesų klasei, o jų filtro koeficientai gęsta labai greitai (eksponentiškai) (žr. [11]).

Pagrindinis disertacijoje nagrinėjamas tolimos atminties proceso modelis yra priežastinis tiesinis filtras (3) su hiperboliškai gestančiais koeficientais

$$b_i = \Lambda(i) i^{d-1}, \tag{5}$$

kur

$$0 < d < 1/2 \tag{6}$$

yra *ilgos atminties parametras* (,,tolimos atminties intensyvumas"), o $\Lambda(x),\ x \geqslant 1$ - lėtai kintanti begalybėje funkcija. Aišku, kad kuo d yra didesnis, tuo svoriai b_i gęsta lėčiau, ir tuo pačiu proceso X_t ,,atmintis ilgėja". Iš (3), (5) lengvai seka proceso autokovariacijos išraiška

$$r_t = \sigma^2 \Lambda_1(t) t^{2d-1}, \tag{7}$$

kur $\Lambda_1(t)$ yra lėtai kintanti begalybėje funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda_1(t)/\Lambda(t)^2 \ = \ \int_0^\infty (u(1+u))^{d-1}\, \mathrm{d}u \ = \ B(d, 1-2d),$$

kur $B(\cdot,\cdot)$ yra beta funkcija. Tuo pačiu, kai d tenkina sąlygą (6), tai r_t (7) gęsta kaip laipsninė funkcija su laipsnio rodikliu $0 < 1-2d < 1$, t.y. eilutė $\sum_{t\in\mathbb{Z}} |r_t| = \infty$ diverguoja. Labai svarbus tolimos atminties procesų (3), (5) atvejis yra *trupmeniniai integruoti autoregresiniai slenkančio vidurkio procesai* - vadinamieji FARIMA (p,d,q) - apibrėžiami kaip stacionarūs skirtuminės lygties

$$\varphi(B)(1-B)^d X_t = \psi(B)\xi_t$$

sprendiniai, kur $BX_t = X_{t-1}$ yra postūmio operatorius, $(1-B)^d$ yra trupmeninio diferencijavimo operatorius, o $\varphi(B), \psi(B)$ yra eilės p, q polinomai, žr. [11], [24]. Atskiru atveju FARIMA (0,d,0) koeficientus b_i galima užrašyti išreikštiniu pavidalu per gama–funkciją:

$$b_i \;=\; \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(d)\Gamma(i+1)} \;\sim\; \frac{1}{\Gamma(d)} i^{d-1} \qquad (i \to \infty).$$

Dalinių sumų ribinės teoremos. Ribinės teoremos tolimos priklausomybės procesams yra labai plati sritis. Tikimybių teorijoje ribinės teoremos yra labai svarbios dėl dviejų priežasčių:

(a) jos leidžia gauti statistines išvadas (testų, parametrų įverčių pasikliautinius intervalus), kai imties tūris yra pakankamai didelis;

(b) jos atskleidžia nagrinėjamo modelio priklausomybės ,,prigimtį" (ribinį priklausomybės tipą).

Tolimos priklausomybės atveju ribiniai dėsniai gali būti labai sudėtingi arba iš viso gali neegzistuoti. Lamperti [37] parodė, jei seka X_t, $t \in \mathbb{Z}$ yra stacionari ir jos normuotos dalinės sumos

$$A_N^{-1} \sum_{s=1}^{[Nt]} X_s \Longrightarrow W_t \tag{8}$$

konverguoja (baigtiniamačių skirstinių prasme) į tam tikrą atsitiktinį procesą $W_t, t \geqslant 0$, tai šis ribinis procesas (ribinis skirstinys) būtinai yra *automodelus su parametru* $H > 0$, o normuojančios konstantos A_N turi pavidalą

$$A_N = N^H \Lambda(N),$$

kur $\Lambda(\cdot)$ yra lėtai kintanti begalybėje funkcija.

Automodelumas (angl. "self-similarity") reiškia, kad kiekvienam $a > 0$, procesų W_{at} ir $a^H W_t$ baigtiniamačiai skirstiniai sutampa:

$$W_{at} \;\overset{\mathrm{d}}{=}\; a^H W_t. \tag{9}$$

Automodelumo sąvoką pirmasis įvedė A. Kolmogorovas [32]. Jis taip pat pirmasis aprašė visus automodelius Gauso procesus su stacionariais pokyčiais (,,Vynerio spirales"), t.y. parodė, kad kiekvieno tokio proceso $W_t, E\{W_1^2\} = 1$ kovariacinė funkcija turi pavidalą

$$E\{W_t W_s\} = (1/2)\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \quad t, s \geqslant 0, \tag{10}$$

kur $0 < H < 1$. Gauso procesas su kovariacine funkcija (3) vadinamas *trupmeniniu Brauno judesiu*. Pats svarbiausias ir plačiausiai žinomas automodelus procesas yra *standartinis Brauno judesys*, t.y. Gauso procesas W_t su vidurkiu $E\{W_t\} = 0$ ir kovariacine funkcija

$$E\{W_t W_s\} = \min(t, s).$$

Standartinis Brauno judesys turi *nepriklausomus pokyčius* ir jo automodelumo parametras $H = 1/2$.

Tiesinių tolimos priklausomybės filtrų (3), (5) dalinių sumų konvergavimą pirmasis nagrinejo Davydovas [13] tuo atveju, kai inovacijos ξ_t yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su baigtine dispersija. Jis parodė, kad tokiu atveju dalinės sumos $\sum_{s=1}^{[Nt]} X_t$, normuotos kvadratine šaknimi iš dispersijos $A_N^2 = E\Big(\sum_{s=1}^{N} X_s\Big)^2 = O(N^{1+2d}\Lambda_1(N))$, konverguoja Skorochodo erdvėje $\mathcal{D}([0,1])$ į trupmeninį Brauno judesį su parametru $H = d + (1/2) \in (1/2, 1)$. Analogiškas rezultatas tiesiniams filtrams su priklausomomis inovacijomis (martingaliniais skirtumais) gautas darbe Wang, Lin ir Gullati [59] bei disertacijos 2 teoremoje, kaip atskiras atvejis $m = 1$.

Gauso subordinuotų procesų sumų ribinės teoremos. Žymiai sudėtingesnis uždavinys yra aprašyti *netiesinių funkcijų* $f(X_t)$ (vadinamųjų *subordinuotų procesų*) sumų ribinius dėsnius, kai procesas X_t yra tiesinis filtras (3), (5) su tolima atmintimi. Tegul

$$S_{N,f}(t) := \sum_{s=1}^{[Nt]} f(X_s), \quad t \in [0,1], \tag{11}$$

– atitinkamas dalinių sumų procesas. Pradininku šioje srityje laikomas Rosenblatas [44], 1959 m. nagrinėjęs atvejį kvadratinės formos ($f(x) = x^2 - E\{X_0^2\}$) nuo stacionaraus Gauso proceso X_t su vidurkiu 0 ir kovariacine funkcija (7), kur $0 < d < 1/2$. Jis įrodė, kad jei $2(1-2d) < 1$, tai atitinkamai normuota kvadratinė forma nuo Gauso proceso X_t turi taip vadinamąjį Rosenblato ribinį skirstinį, kuris nėra normalusis. Vėlesniuose darbuose Taqqu [53], [54], Dobrushin ir Major [14] pilnai aprašė sumų $S_{N,f}(t)$ (11) ribinius dėsnius, kai X_t yra stacionarus Gauso procesas su koreliacine funkcija (5).

Tegul $H_m(x), m = 0, 1, \ldots$ žymi Hermito polinomus, t.y.

$$H_m(x) := \frac{(-1)^m D^m \varphi(x)}{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad D := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

Gerai žinoma, kad Hermito polinomai sudaro ortogonalią bazę Hilberto erdvėje su standartiniu Gauso matu. Tuo pačiu, kiekvieną funkciją $f \in L^2(\mathbb{R}, \varphi(x)\,\mathrm{d}x)$ galima išskleisti eilute

$$f(x) \;=\; \sum_{p=0}^{\infty} c_p H_p(x), \tag{12}$$

konverguojančia erdvėje $L^2(\mathbb{R}, \varphi(x)\,\mathrm{d}x)$, kur koeficientai

$$c_p := \frac{1}{p!} E\{f(X) H_p(X)\} = \frac{1}{p!\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) H_p(y) \varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad X \sim N(0,1).$$

Mažiausias p su $c_p \neq 0$ skleidinyje (12) vadinamas *funkcijos f Hermito rangu*; kitaip tariant, funkcijos f Hermito rangas m_f yra natūralusis skaičius

$$m_f := \min\{p \geqslant 0 : \ c_p \neq 0\}.$$

Tuo pačiu, jei $E\{f(X)\} = 0$, tai iš $E\{H_p(X)\} = 0$ $(p \geqslant 1)$ seka, kad $c_0 = 0$, arba $m_f \geqslant 1$. Aukščiau minėtuose darbuose [53], [54], [14] buvo parodyta, kad jei X_t yra stacionarus Gauso procesas su vidurkiu 0 ir kovariacine funkcija (7) ir funkcijos f Hermito rangas tenkina sąlygą

$$m_f(1-2d) < 1, \tag{13}$$

tai dispersija $A_N^2 = ES_{N,f}^2 = O(N^{2-m_f(1-2d)} \Lambda^{m_f/2}(N))$, o normuotos dalinės sumos $A_N^{-1} S_{N,f}(t)$ artėja pagal pasiskirstymą į taip vadinamąjį Hermito procesą $J_{m_f}(t)$, apibrėžiamą stochastiniu integralu

$$J_m(t) \ := \ a_m \int_{\mathbb{R}^m} \left\{ \int_0^t \prod_{i=1}^m (s-y_i)_+^{d-1}\,\mathrm{d}s \right\} W(\,\mathrm{d}y_1) \ldots W(\,\mathrm{d}y_m), \tag{14}$$

pagal standartinį Gauso baltą triukšmą $W(dy)$ su nuliniu vidurkiu ir dispersija dy (žr. [54], [55]); $s_+^{d-1} := s^{d-1} I(s > 0)$. Integralas (14) konverguoja pagal tikimybę ir turi baigtinę dispersiją, kai $m(1-2d) < 1$. Konstanta a_m yra randama išsprendus lygtį $E\{J_m^2(1)\} = 1$. Žinoma [54], kad procesas $J_m(t)$ yra automodelus su automodelumo indeksu $H = 1 - \frac{m}{2}(1-2d)$. Procesas $J_1(t)$ yra trupmeninis Brauno judesys su kovariacine funkcija (10), kur $H = (1/2) + d$, o $J_2(t)$ yra žinomas kaip Rosenblato procesas. Iš kitos pusės, yra žinoma, kad jei $m_f(1-2d) \geqslant 1$, tai galioja centrinė ribinė teorema ir dalinės sumos $A_N^{-1} S_{N,f}(t)$ konverguoja į standartinį Brauno judesį W_t; žr. [9], [17], [41].

Apelio polinomai. Tegul X yra atsitiktinis dydis su $E|X|^m < \infty$. Asocijuoti su ats. dydžio X skirstiniu Apelio polinomai $\mathcal{P}_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ apibrėžiami rekursiškai:

$$\mathcal{P}_0(x) = 1, \qquad \mathcal{P}_i'(x) = i\mathcal{P}_{i-1}(x), \qquad E\{\mathcal{P}_i(X)\} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{15}$$

Jei dydis X turi visus momentus ir jo charakteristinė funkcija analizinė tam tikroje nulio aplinkoje, Apelio polinomus galima apibrėžti per generuojančią funkciją

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \mathcal{P}_m(x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^{zx}}{E\,\mathrm{e}^{zX}}.$$

Tardami, kad $E\{X\} = 0$, užrašysime keletą pirmųjų Apelio polinomų :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(x) &= x, \\
\mathcal{P}_2(x) &= x^2 - E\{X^2\}, \\
\mathcal{P}_3(x) &= x^3 - 3xE\{X^2\} - E\{X^3\}, \\
\mathcal{P}_4(x) &= x^4 - 6x^2E\{X^2\} - 4xE\{X^3\} + 6E^2\{X^2\} - E\{X^4\}.
\end{aligned}$$

Tuo atveju, kai X yra pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį dėsnį $N(0,1)$, polinomai $\mathcal{P}_m(x)$ sutampa su Hermito polinomais $H_m(x)$. Žinoma, kad tarp visų Apelio polinomų tik Hermito polinomai yra ortogonalūs, todėl funkcijų skleidiniai Apelio polinomais nėra plačiai taikomi. Nežiūrint į tai, jei funkcija $f(x)$ pati yra m-tos eilės polinomas, tai ji yra vienareikšmiškai išreiškiama Apelio polinomų suma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathcal{P}_k(x) \tag{16}$$

(žr. [18]). Plačiau apie Apelio polinomų savybes žr. [3], [18].

Tegul X_t yra tolimos atminties tiesinis filtras (3), (5), kur inovacijos ξ_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys nenormalųjį skirstinį. Tokiu atveju, X_t skirstinys taip pat nėra normalusis, o procesas $f(X_t)$ nėra Gauso subordinuotas. Pasirodo, kad tokiu atveju Hermito polinomus dalinai pakeičia Apelio polinomai, asocijuoti su marginaliniu skirstiniu X_0. Pažymėkime

$$S_{N,m}(t) \ := \ S_{N,\mathcal{P}_m}(t) \ = \ \sum_{s=1}^{[Nt]} \mathcal{P}_m(X_s).$$

Suformuluosime teoremą, kuri buvo įrodyta Surgailio [47] bei Avram ir Taqqu [3] darbuose.

1 teorema. *Tegul X_t yra tiesinis procesas (3), (5), kurio inovacijos ξ_i yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su vidurkiu $E\{\xi_0\} = 0$ ir $E\{\xi_0^{2m}\} < \infty (\exists m \geqslant 1)$. Tegul $\mathcal{P}_m(x)$ yra m-tos eilės Apelio polinomas, asocijuotas su atsitiktinio dydžio X_0 skirstiniu, ir tegul*

$$m(1-2d) < 1. \tag{17}$$

Tada

$$B_{N,m}^2 \ := \ ES_{N,m}^2(1) \ \sim \ c_{m,d}^2 \Lambda^{2m}(N) N^{2-m(1-2d)} \tag{18}$$

ir

$$B_{N_m}^{-1} S_{N,m}(t) \Longrightarrow J_m(t), \tag{19}$$

kur $c_{m,d} > 0$ yra tam tikra konstanta, priklausanti tik nuo m ir d.

Iš 1 teoremos (18) teiginio seka, kad Apelio polinomų $\mathcal{P}_m(X_t)$ tolimos priklausomybės intensyvumas mažėja, didėjant m: didėjant m, mažėja dispersijos $B^2_{N,m}$ augimo greitis, nors visais atvejais, kai galioja sąlyga (17), sumos dispersija $B^2_{N,m}$ auga žymiai greičiau, nei N ($B^2_{N,m} \gg N$). Galima parodyti, kad ir šių polinomų kovariacinė funkcija $E\{\mathcal{P}_m(X_0)\mathcal{P}_m(X_t)\}$ gęsta kaip $t^{-m(1-2d)}$ (su tikslumu iki lėtai kintančios begalybėje funkcijos), panašiai kaip Gauso subordinuotų Hermito polinomų atveju. Kitaip tariant, Apelio polinomai $\mathcal{P}_m(X_t), 1 \leqslant m < 1/(1-2d)$ tiesinio filtro (3), (5) atveju sudaro netiesinių tolimos priklausomybės procesų su panašiomis savybėmis ir ribiniais dėsniais, kaip ir Hermito polinomai nuo Gauso proceso, modelinę klasę. Apelio polinomų ribinės teoremos buvo išsamiai nagrinėtos [16], [20], [21], [22], [23] ir kt. darbuose.

Natūralus klausimas, ar šių polinomų pagalba galima pilnai aprašyti visus galimus tiesinio filtro (3), (5) subordinuotų procesų $f(X_t)$ sumų ribinius dėsnius. Be to, statistinėms išvadoms svarbu ištirti *neglodžių* funkcionalų $f(X_t)$ sumų elgesį, tame tarpe empirinės skirstinio funkcijos $F_N(x) = N^{-1}\sum_{t=1}^N I(X_t \leqslant x)$ asimptotiką. Nors tokiems uždaviniams spręsti Apelio polinomai aplamai nepritaikomi, Ho ir Hsing [25], [26] kitais metodais įrodė, kad prie tam tikrų papildomų sąlygų sumos $S_{N,f}(t)$ ribinis dėsnis sutampa su Apelio polinomų sumų $S_{N,m_f}(t)$ ribiniu dėsniu, kur $1 \leqslant m_f < 1/(1-2d)$ yra funkcijos $f(x)$ *Apelio rangas*. Taip pat žr. [33], [34], [35], [27], [48], [50] ir kt.

Pagrindiniai rezultatai. Disertacijos pagrindiniai uždaviniai yra tokie:

1. Ištirti tiesinio filtro (3), (5) su tolima priklausomybe ir *priklausomomis* martingalinėmis inovacijomis Apelio polinomų sumų ribinius dėsnius (praplėsti 1 teoremą tiesiniam filtrui su martingalinių skirtumų inovacijomis);

2. Ištirti tiesinio filtro (3), (5) su tolima priklausomybe Apelio polinomų su *begaline dispersija* sumų ribinius dėsnius;

3. Ištirti tiesinio filtro (3), (5) su tolima atmintimi ir begaline dispersija dalinių sumų konvergavimą į trupmeninį stabilų procesą.

Suformuluosime pagrindinius disertacijos rezultatus.

1. Atsitiktinio vektoriaus $(Y_1, \dots, Y_m)$ m-os eilės kumuliantu $\mathrm{cum}(Y_1, \dots Y_m)$ yra vadinama suma

$$\mathrm{cum}(Y_1, \dots Y_m) = \sum (-1)^k (k-1)! \Big(E\Big\{ \prod_{j \in V_1} Y_j \Big\} \Big) \dots \Big(E\Big\{ \prod_{j \in V_k} Y_j \Big\} \Big),$$

kurioje sumuojama pagal visus aibės $\{1, \dots, m\}$ suskaidymus $(V_1, \dots, V_k)$, $k = 1, \dots, m$.

Sakysime, kad griežtai stacionari atsitiktinių dydžių seka $\{Y_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$ tenkina sąlygą $(C)_m$ $(m \geqslant 2)$, jei $E\{|Y_0|^m\} < \infty$ ir kiekvienam $2 \leqslant n \leqslant m$

$$\sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{Z}} |\mathrm{cum}(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_{n-1}}, Y_0)| < \infty. \tag{20}$$

Sąlyga $(C)_m$ yra sekos $\{Y_i\}$ silpnos priklausomybės sąlyga, dažnai sutinkama laiko eilučių analizėje (žr. [10]). Pastebėsime, kad ši sąlyga stiprėja didejant m, o sąlyga $(C)_2$ reiškia, kad sekos $\{Y_i\}$ kovariacinė funkcija yra absoliučiai sumuojama:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\mathrm{cov}(Y_0, Y_i)| \; < \; \infty. \tag{21}$$

2 teorema. *Tegul X_t yra tiesinis filtras (3), (5), kurio inovacijos ξ_i, $i \in \mathbb{Z}$ yra griežtai stacionari ir ergodiška martingalinių skirtumų seka, tenkinanti sąlygą $(C)_{2m}$, kur $m = 1, 2, \ldots$ tenkina sąlygą (17). Tegul $\mathcal{P}_m(x)$, $B_{N,m}$, $S_{N,m}(t)$, $c_{m,d}$ yra tie patys, kaip ir 1 teoremoje. Tada teisingi 1 teoremos teiginiai (18) ir (19).*

Nesunku įsitikinti, kad prie 2 teoremoje suformuluotų sąlygų X_t yra griežtai stacionarus ilgos atminties procesas su nuliniu vidurkiu bei autokovariacine funkcija (7). Aišku, kad nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka $\{\xi_i\}$ 1 teoremoje tenkina sąlygą $(C)_{2m}$. Tuo pačiu, 2 teorema apibendrina 1 teoremą.

Panašiai kaip ir 1 teoremą, 2 teoremą galima apibendrinti bet kokiems polinomams. Nesunku įsitikinti, kad atitinkamai normuoti dalinių sumų procesai $S_{N,f}(t)$ ir $S_{N,\mathcal{P}_{r_f}}(t)$ turi tuos pačius ribinius dėsnius. Čia $r_f = \min\{k : a_k \neq 0\}$ yra (16) polinomo Apelio rangas.

2. Pažymėkime $G(x)$ atsitiktinio dydžio ξ_0 pasiskirstymo funkciją. Tarkime, kad egzistuoja konstantos $c_+, c_- \geqslant 0$, $c_+ + c_- > 0$ ir $1 < \alpha < 2$ bei natūralusis skaičius $m \geqslant 2$, kad

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha m} G(x) \;=\; c_-, \tag{22}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha m}(1 - G(x)) \;=\; c_+. \tag{23}$$

Pažymėkime

$$\beta := \sum_{i=1}^{\infty} b_j^m. \tag{24}$$

Žemiau laikysime, kad $\beta > 0$.

Tegul $Z_\alpha(t)$ yra α-stabilus procesas su homogeniniais ir nepriklausomais pokyčiais bei charakteristine funkcija

$$Ee^{iuZ_\alpha(t)} = \exp\big\{ -t|u|^\alpha(1 - iD\,\mathrm{sgn}(u))\big\}, \quad u \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0, \tag{25}$$

kur

$$D := \Big(\frac{\tilde{c}_- - \tilde{c}_+}{\tilde{c}_+ + \tilde{c}_-}\Big)\mathrm{tg}(\alpha\pi/2),$$

o konstantos $\tilde{c}_-, \tilde{c}_+$ apibrėžtos lygybėmis

$$\tilde{c}_- = \begin{cases} c_-, & m \text{ nelyginis}, \\ 0, & m \text{ lyginis}, \end{cases} \quad \tilde{c}_+ = \begin{cases} c_+, & m \text{ nelyginis}, \\ c_+ + c_-, & m \text{ lyginis}. \end{cases} \tag{26}$$

Tegul

$$\begin{aligned} A_{N,m} &:= \nu N^{1/\alpha}, \qquad B_{N,m} := c_{m,d}^2 \Lambda^{2m}(N) N^{2-m(1-2d)}, \\ C_{N,m} &:= \max(A_{N,m}, B_{N,m}), \end{aligned}$$

kur $c_{m,d}, \Lambda(N)$ - tie patys, kaip ir 1 teoremoje, o

$$\nu := \beta \big\{ (1-\alpha)^{-1} \Gamma(2-\alpha)(\tilde{c}_+ + \tilde{c}_-) \cos(\pi\alpha/2) \big\}^{1/\alpha}.$$

3 teorema. *Tegul X_t yra tiesinis filtras (3), (5), kurio inovacijos ξ_i, $i \in \mathbb{Z}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tenkinantys sąlygas (22)-(23), o $\mathcal{P}_m$ ir $S_{N,m}(t)$ - tie patys, kaip ir 1 teoremoje. Tegul $m(1-2d) < 1, m \geqslant 2$.*

(i) *Jei $m(1-2d) > 2(1-(1/\alpha))$, tai*

$$A_{N,m}^{-1} S_{N,m}(t) \Longrightarrow Z_\alpha(t).$$

(ii) *Jei $m(1-2d) < 2(1-(1/\alpha))$, tai*

$$B_{N,m}^{-1} S_{N,m}(t) \Longrightarrow J_m(t).$$

(iii) *Jei $m(1-2d) = 2(1-(1/\alpha))$ ir $\lim_{u\to\infty} \Lambda(u) = c_0 \neq 0$, tai*

$$C_{N,m}^{-1} S_{N,m}(t) \Longrightarrow \lambda_{1m} Z_\alpha(t) + \lambda_{2m} J_m(t),$$

kur

$$\lambda_{1m} := \lim_{N\to\infty} \frac{A_{N,m}}{C_{N,m}}, \qquad \lambda_{2m} := \lim_{N\to\infty} \frac{B_{N,m}}{C_{N,m}},$$

o procesai $J_m(t)$ ir $Z_\alpha(t)$ yra tarpusavyje nepriklausomi.

Sąlygos (22)-(23) reiškia, kad atsitiktinio dydžio ξ_0^m skirstinys priklauso $\alpha-$stabilaus dėsnio normaliajai traukos sričiai (žr. [29]). Galima parodyti (žr. 2.1 lema), kad ir $|X_0|^m$ skirstinys priklauso $\alpha-$stabilaus dėsnio traukos sričiai, t.y.

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha m} P(|X_0| > x) = (c_- + c_+) \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^{\alpha m}, \tag{27}$$

iš kur seka, kad $E\{|\mathcal{P}_m(X_0)|^r\} = \infty$ visiems $r \geqslant \alpha$ ir tuo pačiu $E\{\mathcal{P}_m^2(X_0)\} = \infty$. Kitaip tariant, priešingai nuo daugelio aukščiau paminėtų darbų, 3 teoremoje nagrinėjama seka $\{\mathcal{P}_m(X_t), t \in \mathbb{Z}\}$ turi begalinę dispersiją. Ribinio dėsnio dichotomiją 3 teoremoje galima paaiškinti ta aplinkybe, kad šiuo atveju Apelio polinomo multinominiame išskaidyme (žr. 2.1 teoremą žemiau) pagrindinės įstrižainės nariai gali turėti lemiamos įtakos, priešingai nei [3] ar [19] darbuose, kuriuose dominuoja neįstrižaininiai nariai.

3. Tegul $1 < \alpha \leqslant 2$. *Tiesinis trupmeninis $\alpha-$stabilus procesas* $J_{\alpha,d}(t),\ t \geqslant 0$ apibrėžiamas stochastinio integralo pagalba

$$J_{\alpha,d}(t) \quad := \quad \int_{\mathbb{R}} \Big\{ \int_0^t (c_+(s-u)_+^{d-1} + c_-(u-s)_+^{d-1})\, \mathrm{d}s \Big\} \mathrm{d}Z_\alpha(u), \tag{28}$$

kur $Z_\alpha(t)$ yra α-stabilus procesas su nepriklausomais ir stacionariais pokyčiais bei charakteristine funkcija (25), c_+, c_- - bet kokie skaičiai, o parametras d tenkina sąlygą

$$0 < d < 1 - (1/\alpha), \tag{29}$$

žr. [56], [38]. Integralas (28) konverguoja pagal tikimybę, nes pointegralinė funkcija $\int_0^t (c_+(s-u)_+^{d-1} + c_-(u-s)_+^{d-1})\, \mathrm{d}s, u \in \mathbb{R}$ priklauso erdvei $L^\alpha(\mathbb{R})$. Procesas $J_{\alpha,d}(t)$ turi $\alpha-$stabilius baigtiniamačius skirstinius, beveik visur tolydžias trajektorijas, ir yra automodelus su parametru $H = d + (1/\alpha)$ ([38]). Kai $\alpha = 2$, procesas $J_{\alpha,d}(t)$ sutampa su trupmeniniu Brauno judesiu (su tikslumu iki konstantos, priklausančios nuo parametrų c_+, c_-, d). Pasirodo, kad kai $1 < \alpha < 2$, tai proceso $J_{\alpha,d}(t)$ skirstiniai iš esmės priklauso ir nuo parametrų c_+, c_-: kitaip tariant, lygybė (28) apibrėžia 3-parametrinę klasę $\alpha-$stabilių procesų su priklausomais pokyčiais. ,,Kauzalus" procesas $J_{\alpha,d}(t)$ atitinka atvejį $c_+ = 1, c_- = 0$ ir dar yra vadinamas trupmeniniu Lévy judesiu.

Suformuluosime prielaidas tiesinio proceso (1) inovacijoms.

(i) $\{\xi_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$ yra griežtai stacionari martingalinių skirtumų seka, t.y. $E|\xi_0| < \infty$ ir $E\{\xi_i | \mathcal{F}_{i-1}\} = 0$, kur $\mathcal{F}_i,\ i \in \mathbb{Z}$ yra nemažėjanti σ-algebrų seka, tokia, kad $\sigma\{\xi_s,\ s \leqslant i\} \subset \mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{Z}$;

(ii) Egzistuoja konstantos $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in [-1,1]$ ir lėtai kintanti begalybėje funkcija $\Lambda(x),\ x \in [1,\infty)$ tokios, kad

$$D_N^{-1} \sum_{s=1}^{[Nt]} \xi_s \Longrightarrow Z_\alpha(t),$$

kur $D_N = \Lambda(N) N^{1/\alpha}$, $Z_\alpha(t)$ – α-stabilus, homogeninis, su nepriklausomais prieaugliais bei charakteristine funkcija (25) procesas.

(iii) Egzistuoja konstanta $0 < C_1 < \infty$ ir lėtai kintanti begalybėje funkcija $\Lambda_1(x)$, tokios, kad $\Lambda_1(x)/\Lambda^\alpha(x) \to 1\ (x \to \infty)$ ir

$$P(|\xi_0| > x) \ \leqslant \ C_1 \Lambda_1(x) x^{-\alpha}, \qquad \forall x > 0.$$

4 teorema. *Tegul X_t yra tiesinis filtras (1), kurio inovacijos tenkina sąlygas (i)-(iii), o svoriai b_i turi pavidalą*

$$b_i = \begin{cases} c_+ L(i) i^{d-1}, & \text{kai } i > 0, \\ c_- L(|i|)|i|^{d-1}, & \text{kai } i < 0, \end{cases} \tag{30}$$

kur $c_+, c_-, |c_+| + |c_-| \neq 0$ yra konstantos, $L(x),\ x \geqslant 1$ yra lėtai kintanti begalybėje funkcija, o parametras d tenkina sąlygą (29). Tada

$$\frac{1}{L(N)N^d D_N} \sum_{s=1}^{[Nt]} X_s \overset{\mathcal{D}[0,1]}{\Longrightarrow} J_{\alpha,d}(t), \tag{31}$$

kur $\overset{\mathcal{D}[0,1]}{\Longrightarrow}$ reiškia silpnąjį konvergavimą Skorochodo erdvėje $\mathcal{D}[0,1]$.

Kaip jau buvo aukščiau minėta, analogiškas rezultatas baigtinės dispersijos atveju ($\alpha = 2$) gautas [59]. Atvejis, kai ξ_t yra nepriklausomi ir ξ_0 priklauso α-stabilaus dėsnio traukos sričiai, nagrinėtas [2], [38], [31], [4] darbuose. Paminėsime, kad tiesinio proceso X_t dalinių sumų konvergavimas, kai martingalinės inovacijos tenkina įvairias sumaišymo sąlygas, nagrinėtas [42] darbe.

Toliau aptarkime, kaip pasikeičia 4 teorema pakeitus parametro d sąlygą (29) sąlyga

$$d < 0. \tag{32}$$

Naudodamiesi lėtai kintančių begalybėje funkcijų savybėmis, gauname, kad

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |b_i| \leqslant C \sum_{i \in \mathbb{Z}} |i|^{-1-\varepsilon} < \infty,$$

kur $\varepsilon > 0$. Kitaip tariant, tiesinis procesas (1) su koeficientais (30), (32) turi trumpą atmintį. Šio proceso dalinių sumų elgseną nusako žemiau suformuluota teorema.

5 teorema. *Tegul X_t yra tiesinis filtras (1), kurio inovacijos tenkina tas pačias sąlygas (i)-(iii) kaip ir 4 teoremoje, o svoriai b_i turi pavidalą (30), kur $d < 0$. Tegul $A := \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \neq 0$. Tada*

$$\frac{1}{(c_+ + c_-) D_N A} \sum_{s=1}^{[Nt]} X_s \Longrightarrow Z_\alpha(t). \tag{33}$$

Pažymėsime, kad trumpos atminties tiesinio filtro X_t dalinių sumų konvergavimas buvo nagrinėtas [2], [59] ir kt. darbuose.

Baigiant pažymėsime, kad klasikiniai ribinių teoremų įrodymo metodai (momentų metodas, charakteristinių funkcijų metodas) tiesiogiai nėra taikomi įrodinėjant necentrines ribines teoremas. 2-5 teoremoms įrodyti buvo naudojama diskrečių integralų schema. Šis metodas yra išdėstytas [47] darbe, vėliau jis taikytas [1], [3] darbuose, žr. taip pat [49] apžvalgą.

Dėkoju prof. D. Surgailiui už nuoširdų bendravimą bei pagalbą. Taip pat dėkoju prof. B. Grigelioniui, prof. R. Leipui bei doc. M. Radavičiui, dr. A. Astrauskui už jų dėmesį bei rūpestį. Ačiū mano šeimai (žmonai ir sūnui) už jų pakantumą ir palaikymą ruošiant disertaciją.

I skyrius. Tolimos priklausomybės tiesinių procesų su baigtinės dispersijos martingaliniais triukšmais Apelio polinomų sumų silpnasis konvergavimas

1.1 Martingalinių skirtumų Apelio formos

Tegul atsitiktiniai dydžiai $Y_1, \ldots, Y_n$ turi $n-$tąjį absoliutųjį momentą: $E\{|Y_i|^n\} < \infty, 1 \leqslant i \leqslant n$. Atsitiktinių dydžių $Y_1, \ldots, Y_m$ Apelio sandauga yra

$$:Y_1 \cdots Y_m := (-i)^m \frac{\partial^m}{\partial z_1 \ldots \partial z_m} \Big(\frac{\exp\{i \sum_{j=1}^m z_j Y_j\}}{E \exp\{i \sum_{j=1}^m z_j Y_j\}} \Big) \Big|_{z_1 = \cdots = z_m = 0}. \tag{1.1}$$

Iš čia gauname

$$\begin{aligned} :Y_1: &= Y_1 - E\{Y_1\}, \\ :Y_1 Y_2: &= Y_1 Y_2 - Y_1 E\{Y_2\} - Y_2 E\{Y_1\} + 2E\{Y_1\}E\{Y_2\} - E\{Y_1 Y_2\}. \end{aligned}$$

Iš (1.1) išplaukia, kad Apelio sandaugos vdurkis yra lygus nuliui:

$$E\{: Y_1 \cdots Y_m :\} = 0. \tag{1.2}$$

Yra žinoma, kad Apelio sandauga (1.1) yra simetriška atsitiktinių dydžių $Y_1, \ldots, Y_m$ perstatų atžvilgiu. Jei atsitiktiniai dydžiai $Y_1, \ldots, Y_m$ yra atsitiktinių dydžių $Z_1, \ldots, Z_k$ tiesinės kombinacijos

$$Y_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} Z_j, i = 1, \ldots, m,$$

tai

$$:Y_1 \cdots Y_m: = \sum_{j_1=1}^k \cdots \sum_{j_m=1}^k a_{1,j_1} \cdots a_{m,j_m} \ :Z_{j_1} \cdots Z_{j_k}: \tag{1.3}$$

(žr. [3]). Jei $Y_1 = \cdots = Y_m$ tai $:\underbrace{Y \cdots Y}_{m}: \equiv :Y^{,m}: = \mathcal{P}_m(Y)$, kur $\mathcal{P}_m(x),\ x \in \mathbb{R}$ yra asocijuotas su atsitiktinio dydžio Y skirstiniu m-tos eilės Apelio polinomas.

Tegul I yra baigtinė indeksų aibė. Atsitiktinių dydžių $Y_i, i \in I$ Apelio sandaugą toliau žymėsime $:Y^{,I}:$, sandaugą žymėsime $Y^I := \prod_{i\in I} Y_i$, sandaugos vidurkį žymėsime $E\{Y^I\} := E\{\prod_{i\in I} Y_i\}$. Susitarkime, kad $:Y^{,\emptyset}: = Y^{\emptyset} = 1$. Toliau bus naudojama formulė, susiejanti atsitiktinių dydžių sandaugą bei jų Apelio sandaugą:

$$Y^I = \sum_{J\subseteq I} :Y^{,J}:\ E\{Y^{I\setminus J}\}; \tag{1.4}$$

čia sumuojama pagal visus aibės I poaibius J, įskaitant $J = \emptyset$ bei $J = I$. Fomulės įrodymą žr. [17], [48].

1.1 išvada. *Tarkime, kad atsitiktinių dydžių seka $\xi_i,\ i \in \mathbb{Z}$ yra martingalinis skirtumas, be to, $E\{|\xi_i|^m\} < \infty, i \in \mathbb{Z}$. Jei $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$, tai*

$$:\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}: = \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}. \tag{1.5}$$

Įrodymas. Kadangi $E\{\xi_i\} = 0,\ i \in \mathbb{Z}$, tai $E\{Y^J\} = 0$, kai J yra bet kuris netuščias aibės $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ poaibis. Lieka pasinaudoti (1.4). □

Pažymėkime $L^2(\mathbb{Z}^m)$ erdvę realių sekų $g = g_{i_1,\ldots,i_m}, (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{Z}^m$, kurioms

$$\|g\|_m\ =\ \Big(\sum g^2_{i_1,\ldots,i_m}\Big)^{1/2} < \infty.$$

Erdvės $L^2(\mathbb{Z}^m)$ poerdvį, kurį sudaro sekos $g = g_{i_1,\ldots,i_m} \in L^2(\mathbb{Z}^m)$, kurios yra lygios nuliui, išskyrus baigtinį skaičių taškų $(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{Z}^m$, pažymėkime $L^2_0(\mathbb{Z}^m)$.

Tegul $g \in L^2_0(\mathbb{Z}^m)$. Sumą

$$\mathcal{P}_m(g)\ \equiv\ :\sum g_{i_1,\ldots,i_m}\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}: =\ \sum g_{i_1,\ldots,i_m}\ :\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}:$$

vadinsime atsitiktinių dydžių $\xi_i,\ i \in \mathbb{Z}$ m-tosios eilės Apelio forma. Remdamiesi Apelio sandaugos savybe (1.2), gauname

$$E\{\mathcal{P}_m(g)\} = 0.$$

1.1 lema. *Tegul yra išpildyta (17) sąlyga ir $E\{\xi_0^{2m}\} < \infty$. Tada egzistuoja konstanta $C < \infty$, nepriklausanti nuo g ir tokia, kad kiekvienai sekai $g \in L^2_0(\mathbb{Z}^m)$*

$$E\{\mathcal{P}^2_m(g)\}\ \leqslant\ C\|g\|^2_m. \tag{1.6}$$

Įrodymas. Nesunku patikrinti, kad

$$E\{\mathcal{P}_m^2(g)\} = \sum g_{i_1,\dots,i_m} g_{i_{m+1},\dots,i_{2m}} \varrho_{i_1,\dots,i_m;i_{m+1},\dots,i_{2m}},$$

kur

$$\varrho_{i_1,\dots,i_m;i_{m+1},\dots,i_{2m}} = \mathrm{cov}(:\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_m}:,:\xi_{i_{m+1}}\cdots\xi_{2m}:).$$

Tegul V yra bet kuris aibės $\{1,\dots,2m\}$ poaibis. Pažymėkime $c(i_l : l \in V) = \mathrm{cum}(\xi_{i_l} : l \in V)$. Tegul $\tilde{V} = V\backslash\{\tilde{q}\}$, kur $\tilde{q} \in V$ yra laisvai pasirinktas aibės V elementas. Naudodami įvestus pažymėjimus, sąlygą $(C)_{2m}$ perrašome taip: bet kokiai aukščiau aprašytai aibei V ir elementui $\tilde{q} \in V$,

$$\sum_{i_l\in\mathbb{Z}:l\in\tilde{V}} |c(i_l : l \in V)| < C, \tag{1.7}$$

kur konstanta $C < \infty$ nepriklauso nuo $\tilde{q}$. Naudodamiesi Apelio sandaugų kovariacijos formule (žr. [18], [48]), gauname

$$\varrho_{i_1,\dots,i_m;i_{m+1},\dots,i_{2m}} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{(V)_r} c(i_l : l \in V_1)\cdots c(i_l : l \in V_r). \tag{1.8}$$

Čia sumoje $\sum_{(V)_r}$ yra sumuojama pagal visus aibės $\{1,2,\dots,2m\}$ suskaidymus $(V)_r \equiv (V_1,\dots,V_r)$ į netuščius poaibius $V_1,\dots,V_r$, tokius, kad $V_j \cap \{1,\dots,m\} \neq \emptyset$, $V_j \cap \{m+1,\dots,2m\} \neq \emptyset$. Naudodami Koši-Švarco nelygybę, gauname

$$\begin{aligned} E\{\mathcal{P}_m^2(q)\} \;\leqslant\; & \sum_{r=1}^{m}\sum_{(V)_r}\Big(\sum g^2_{i_1,\dots,i_m}\prod_{j=1}^{r}|c(i_l : l \in V_r)|\Big)^{1/2} \\ & \times\Big(\sum g^2_{i_{m+1},\dots,i_{2m}})\prod_{j=1}^{r}|c(i_l : l \in V_j)|\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Atsižvelgę į (1.7), (1.9) ir sumos $\sum_{(V)_r}$ apibrėžimą, gauname

$$\sum_{i_{m+1},\dots,i_{2m}}\prod_{j=1}^{r}|c(i_l : l \in V_j)| \leqslant C, \tag{1.10}$$

kur konstanta $C < \infty$ nepriklauso nuo $i_1,\dots,i_m$. Analogiškai

$$\sum_{i_1,\dots,i_m}\prod_{j=1}^{r}|c(i_l : l \in V_j)| < C, \tag{1.11}$$

kur konstanta $C < \infty$ nepriklauso nuo $i_{m+1},\dots,i_{2m}$. Iš (1.9)–(1.11) seka (1.6). □

1.2 $S_{N,m}(1)$ dispersijos asimptotika

Tegul

$$S_{N,m} = \sum_{t=1}^{N} \mathcal{P}_m(X_t) = \sum_{i_1,\ldots,i_m} \Big\{ \sum_{t=1}^{N} b_{t-i_1} \cdots b_{t-i_m} \Big\} :\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}: . \tag{1.12}$$

Šiame skyrelyje rasime dispersijos $B^2_{N,m} = E\{S^2_{N,m}\}$, asimptotinį įvertį, kai $N \to \infty$.

1.2 lema. *Jei yra išpildytos 2 teoremos sąlygos, tai*

$$B^2_{N,m} \sim c_m^2 \Lambda^{2m}(N) N^{2-m(1-2d)}. \tag{1.13}$$

Įrodymas. Išskaidykime sumą $S_{N,m}$ į ,,neįstrižaininį" ir ,,įstrižaininį" dėmenis:

$$S_{N,\mathcal{P}_m} = S'_{N,m} + S''_{N,m},$$

kur

$$S'_{N,m} = \sum_{i_1,\ldots,i_m : i_p \neq i_q (p \neq q)} \Big\{ \sum_{t=1}^{N} \prod_{p=1}^{m} b_{t-i_p} \Big\} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}.$$

Čia, remiantis 1.1 išvada, atsitiktinių dydžių $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}$ Apelio sandauga pakeista jų įprasta sandauga. Įrodžius

$$E\{(S'_{N,m})^2\} \sim c_m^2 \Lambda^{2m}(N) N^{2-m(1-2d)} \tag{1.14}$$

ir

$$E\{(S''_{N,m})^2\} = O(N^{2-m(1-2d)-\varepsilon}) \qquad (\exists \varepsilon > 0), \tag{1.15}$$

sąryšis (1.13) bus įrodytas.

Iš pradžių įrodykime (1.14). Naudodamiesi 1.1 lemos įrodyme įvestais žymėjimais atsitiktinio dydžio $S'_{N,m}$ dispersija yra

$$E\{(S'_{N,m})^2\} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{(V)_r} {\sum}' \Big\{ \sum_{t=1}^{N} \prod_{p=1}^{m} b_{t-i_p} \Big\} \Big\{ \sum_{s=1}^{N} \prod_{p=m+1}^{2m} b_{s-i_p} \Big\} \prod_{q=1}^{r} c(i_l : l \in V_q), \tag{1.16}$$

kur sumoje $\sum'$ yra sumuojama pagal visus sveikuosius skaičius

$$i_1, \ldots, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_{2m},$$

tokius, kad $i_p \neq i_q$, kai skaičiai $p \neq q$ tenkina vieną iš nelygybių

$$1 \leqslant p, q \leqslant m, \quad m+1 \leqslant p, q \leqslant 2m.$$

Dabar išskaidykime (1.16) dešinę pusę į du dėmenis, kurių pirmasis atitinka aibės $\{1, 2, \dots, 2m\}$ suskaidymus $(V)_r$, kuriems $r = m, |V_1| = \dots = |V_m| = 2$, o kitas dėmuo atitinka likusius suskaidymus, t.y.

$$E\{(S'_{N,m})^2\} = M_N + R_N,$$

kur

$$M_N = m!\sigma^{2m} \sum_{i_1,\dots,i_m : i_p \neq i_q (p \neq q)} \Big(\sum_{t=1}^{N} \prod_{p=1}^{m} b_{t-i_p}\Big)^2 \tag{1.17}$$

ir $\sigma^2 = E\{\xi_0^2\}$. Toliau tegul

$$M_N = M'_N + M''_N,$$

kur

$$M'_N = m!\sigma^{2m} \sum_{i_1,\dots,i_m} \Big(\sum_{t=1}^{N} \prod_{p=1}^{m} b_{t-i_p}\Big)^2 = m! \sum_{t,s=1}^{N} r_{t-s}^m, \tag{1.18}$$

o

$$r_{t-s} = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{t-i} b_{s-i} = \mathrm{cov}(X_t, X_s)$$

yra tiesinio proceso X_t kovariacinė funkcija. Yra gerai žinoma, kad

$$r_t \sim \Lambda^2(t) t^{-(1-2d)} \qquad (t \to \infty). \tag{1.19}$$

Iš (1.18) ir (1.19) išplaukia gerai žinoma asimptotinė formulė

$$M'_N \sim c_m^2 \Lambda^{2m}(N) N^{2-m(1-2d)}. \tag{1.20}$$

[19] darbe yra įrodyta, kad

$$M''_N = O(N). \tag{1.21}$$

Taigi M_N turi tą patį asimptotinį įvertį kaip ir M'_N.

Dabar įrodysime, kad

$$R_N = O(N^{2-m(1-2d)-\varepsilon}) \qquad (\exists \varepsilon > 0). \tag{1.22}$$

Iš (1.16) ir R_N apibrėžimo išplaukia, kad pakanka įrodyti žemiau suformuluotą lemą.

1.3 lema. *Tegul $0 < 1 - 2d < 1/m$, $m = 1, 2 \dots$. Tegul $(V)_r = (V_1, \dots, V_r)$ yra aibės of $\{1, \dots, 2m\}$ suskaidymas, toks kad $V_p \cap \{1, \dots, m\} \neq \emptyset, V_p \cap \{m+1, \dots, 2m\} \neq \emptyset, m = 1, \dots, r$ ir $|V_i| \geqslant 3$ kažkuriam $i = 1, \dots, r$. Tada*

$$h_N \equiv \sum_{i_1,\dots,i_{2m}} \Big\{\sum_{t=1}^{N} \prod_{p=1}^{m} |b_{t-i_p}|\Big\}\Big\{\sum_{s=1}^{N} \prod_{p=m+1}^{2m} |b_{s-i_p}|\Big\} \prod_{q=1}^{r} |c(i_l : l \in V_q)| \leqslant C N^{2-m(1-2d)-\varepsilon}, \tag{1.23}$$

kur konstantos $C < \infty$ ir $\varepsilon > 0$ nepriklauso nuo N.

Įrodymas. Kiekvienam $q = 1, \ldots, r$, pažymėkime

$$V_q' := V_q \cap \{1, \ldots, m\}, \quad V_q'' := V_q \cap \{m+1, \ldots, 2m\}.$$

Tada $V_q = V_q' \cup V_q''$, be to, kiekviena iš aibių $V_1', \ldots, V_r', V_1'', \ldots, V_q''$ yra netuščia ir bent viena iš jų turi daugiau nei vieną elementą. Fiksuokime laisvai pasirinktą indeksą $\tilde{q} \in V_q, q = 1, \ldots, r$. Pažymėkime

$$\tilde{V}_q := V_q \backslash \{\tilde{q}\},\ \tilde{\mathcal{K}} := \cup_{q=1}^r \tilde{V}_q,\ \tilde{V}_q' := V_q' \backslash \{\tilde{q}\}, \tilde{V}_q'' := V_q'' \backslash \{\tilde{q}\},$$

$$\tilde{c}(i_l - i_{\tilde{q}} : l \in \tilde{V}_q) := c(i_l : l \in V_q).$$

Tada

$$h_N = \sum_{v_l : l \in \tilde{\mathcal{K}}} \prod_{q=1}^r |\tilde{c}(v_l : l \in \tilde{V}_q)| \sum_{t,s=1}^N \prod_{q=1}^r w_{t-s}^{(q)}, \tag{1.24}$$

kur

$$w_{t-s}^{(q)} = \sum_u |b_u| \prod_{l \in \tilde{V}_q'} |b_{u-v_l}| \prod_{l \in \tilde{V}_q''} |b_{s-t+u-v_l}|.$$

Susitarkime žymėti $|V|$ aibės V elementų skaičių. Nagrinėsime atvejus:
(i) $|V_q'| \geqslant 2, |V_q''| \geqslant 2$ kažkuriam $q = 1, \ldots, r$;
(ii) likusieji atvejai.

Pradėkime nuo (i). Vardan paprastumo, tarkime, kad $q = 1, V_1' = \{1, 2\}, \tilde{V}_1' = \{1\}, V_1'' = \{m+1, m+2\}$. Tada

$$\begin{aligned} w_{t-s}^{(1)} &= \sum_u |b_u b_{u-v_1} b_{s-t+u-v_{m+1}} b_{s-t+u-v_{m+2}}| \\ &\leqslant \Big(\sum_u b_u^2 b_{s-t+u-v_{m+1}}^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_u b_{u-v_1}^2 b_{s-t+u-v_{m+2}}^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Atsižvelgus į(5), taip pat į (1.26), nesunku įsitikinti, kad

$$w_{t-s}^{(1)} \leqslant C|s - t - v_{m+1}|_+^{-\alpha/2} |s - t + v_1 - v_{m+2}|_+^{-\alpha/2}, \tag{1.25}$$

kur $1 < \alpha < 2(1-d)$ gali būti parinktas kaip norima arti $2(1-d)$. Kadangi $w_{t-s}^{(q)} \leqslant C, q = 1, \ldots, r$, iš (1.24)–(1.25) išplaukia

$$h_N \leqslant C \sum_{v_l : l \in \tilde{\mathcal{K}}} \prod_{q=1}^r |\tilde{c}(v_l : l \in \tilde{V}_q)| \sum_{t,s=1}^N |s - t - v_{m+1}|_+^{-\alpha/2} |s - t + v_1 - v_{m+2}|_+^{-\alpha/2}.$$

Paskutinioji suma yra aprėžta skaičiumi CN tolygiai pagal v_1, v_{m+1}, v_{m+2}. Tai nesunku patikrinti: jei $\alpha > 1$, tai

$$\begin{aligned} \sum_{t,s=1}^N |s - t - v_1|_+^{-\alpha} |s - t - v_2|_+^{-\alpha} &\leqslant CN \sum_s |s - v_1|_+^{-\alpha} |s - v_2|_+^{-\alpha} \\ &\leqslant CN |v_1 - v_2|_+^{-\alpha} \leqslant CN \end{aligned} \tag{1.26}$$

tolygiai pagal v_1, v_2.

Iš sąlygos $(C)_{2m}$ išplaukia nelygybė

$$\sum_{v_l : l \in \tilde{\mathcal{K}}} \prod_{q=1}^{r} |\tilde{c}(v_l : l \in \tilde{V}_q)| \leqslant C. \tag{1.27}$$

Taigi atveju (i) lemą įrodėme, nes $N = O(N^{2-m(1-2d)-\varepsilon})$ $(\exists \varepsilon > 0)$.

Pereikime prie atvejo (ii). Neprarasdami bendrumo galime tarti, kad

$$|V_1| > 2, \ldots, |V_{r^*}| > 2, |V_{r^*+1}| = \cdots = |V_r| = 2,$$

kur $1 \leqslant r^* \leqslant r$. Tada

$$w_{t-s}^{(q)} \leqslant C|t-s+v_q|_+^{2d-1)}, \qquad r^*+1 \leqslant q \leqslant r. \tag{1.28}$$

Kaip yra apibrėžta, kiekvienam $1 \leqslant q \leqslant r^*$, $|V_q'| = 1$ arba $|V_q''| = 1$. Kitaip tariant, kiekviena iš aibių $V_q, 1 \leqslant q \leqslant r^*$ turi tik vieną elementą iš $\{1, \ldots, m\}$, arba iš $\{m+1, \ldots, 2m\}$. Tarkime, kad šis elementas sutampa aukščiau pasirinktu elementu $\tilde{q}$. Be to, tarkime, kad $\tilde{q} \in V_q'$, kai $\tilde{V}_q' = \emptyset, \tilde{V}_q'' = V_q''$ ir

$$w_{t-s}^{(q)} \leqslant \prod_{l \in V_q''} \Big(\sum_u |b_u||b_{s-t+u-v_l}|^{m_q}\Big)^{1/m_q},$$

kur $m_q = |V_q''| = |V_q| - 1 = |\tilde{V}_q| \geqslant 2$. Analogiškai, jei $\tilde{q} \in V_q''$ tai

$$w_{t-s}^{(q)} \leqslant \prod_{l \in V_q'} \Big(\sum_u |b_u||b_{t-s+u-v_l}|^{m_q}\Big)^{1/m_q},$$

kur $m_q = |V_q'| = |V_q| - 1 = |\tilde{V}_q| \geqslant 2$. Abiem atvejais

$$w_{t-s}^{(q)} \leqslant C \prod_{l \in \tilde{V}_q} |t-s-v_l|_+^{(d-1)/m_q}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant r^*. \tag{1.29}$$

Įrodinėjama lema atveju (ii) išplaukia iš (1.28)–(1.29) ir žemiau įrodytos 1.4 lemos, jei

$$(r-r^*)(1-2d) + (1-d)r^* > m(1-2d). \tag{1.30}$$

Pastebėkime, kad $r^* \geqslant 2$ išplaukia iš atvejo (ii) apibrėžimo. Tada kairė (1.30) nelygybės pusė yra ne mažesnė kaip $2(1-d) > 1$, tuo tarpu dešinė tos pačios nelygybės pusė yra mažesnė nei 1. Tuo baigiamas (1.30) nelygybės, o tuo pačiu ir 1.3 lemos įrodymas. $\Box$

1.2 lemos įrodymo tęsinys. Iš 1.3 lemos bei (1.20)–(1.22) sąryšių išplaukia $S'_{N,m}$ dispersijos asimptotinė formulė (1.14).

Dabar ieškosime ,,įstrižaininės" dalies

$$S''_{N,m} = \sum_{i_1,\ldots,i_m : i_p = i_q (\exists p \neq q)} \Big\{ \sum_{t=1}^{N} \prod_{p=1}^{m} b_{t-i_p} \Big\} : \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m} :$$

dispersijos. Analogiškai, kaip ir (1.16), turime

$$E\{(S''_{N,m})^2\} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{(V)_r} \sum\nolimits'' \Big\{ \prod_{p=1}^{m} b_{t-i_p} \Big\} \Big\{ \prod_{p=m+1}^{2m} b_{s-i_p} \Big\} \prod_{q=1}^{r} c(i_l : l \in V_q), \tag{1.31}$$

kur sumoje $\sum''$ yra sumuojama pagal visus sveikuosius skaičius

$$i_1, \ldots, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_{2m},$$

tokius, kad $i_{p'} = i_{q'}, i_{p''} = i_{q''}$ kai kuriems $p' \neq q', p'' \neq q''$ atitinkamai tenkinantiems nelygybes

$$1 \leqslant p', q' \leqslant m, \quad m+1 \leqslant p'', q'' \leqslant 2m.$$

Kad įrodytume (1.15), naudosime analogiškus 1.3 lemos įrodymui argumentus. Pakanka įrodyti, kad kiekvienam suskaidymui $(V)_r = (V_1, \ldots, V_r)$ yra teisinga nelygybė

$$h''_N \equiv \sum\nolimits'' \sum_{t,s=1}^{N} \prod_{p=1}^{m} |b_{t-i_p}| \prod_{p=m+1}^{2m} |b_{s-i_p}| \prod_{q=1}^{r} |c(i_l : l \in V_q)| \leqslant CN^{2-m(1-2d)-\varepsilon} \tag{1.32}$$

Atvejis $|V_q| \geqslant 3 (\exists 1 \leqslant q \leqslant r)$ išplaukia iš 1.3 lemos, todėl pakanka įrodyti (1.32) nelygybę atveju $|V_1| = \cdots = |V_r| = 2\, (r = m)$. Vardan paprastumo tarkime, kad $i_1 = i_2 \equiv i', i_{m+1} = i_{m+2} \equiv i''$. Tada

$$h''_N \leqslant C \sum_{t,s=1}^{N} \sum_{i',i''} b^2_{t-i'} b^2_{s-i''} \Big(\sum_i |b_{t-i} b_{s-i}| \Big)^{m-1} \leqslant CN.$$

Tuo baigiamas (1.32) ir (1.15) įrodymas. 1.2 lema įrodyta. □

1.4 lema. *Tegul* $\alpha_i > 0, i = 1, \ldots, k, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i < 1$. *Tada*

$$\sup_{v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{Z}} \sum_{t,s=1}^{N} \prod_{i=1}^{k} |t - s - v_i|_+^{-\alpha_i} \leqslant CN^{2-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}.$$

Įrodymas. Lemos tvirtinimas išplaukia iš

$$\sup_{v_1,\ldots,v_k} \sum_{t=1}^{N} \prod_{i=1}^{k} |t - v_i|_+^{-\alpha_i} \leqslant CN^{1-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}. \tag{1.33}$$

Pažymėkime $p_i = p/\alpha_i, i = 1, \ldots, k$, kur $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i < 1$, $\sum_{i=1}^k 1/p_i = 1$. Tada $\sum_{i=1}^k 1/p_i = 1$ ir , remiantis Hiolderio nelygybe, gauname

$$\sum_{t=1}^{N} \prod_{i=1}^{k} |t - v_i|_+^{-\alpha_i} \leqslant \prod_{i=1}^{k} \Big(\sum_{t=1}^{N} |t - v_i|_+^{-p} \Big)^{1/p_i}. \tag{1.34}$$

Taigi (1.33), o tuo pačiu ir lemos tvirtinimas išplaukia iš (1.34) ir įverčio

$$\sup_{v \in \mathbb{Z}} \sum_{t=1}^{N} |t - v|_+^{-p} \leqslant C N^{1-p},$$

nes $\sum_{i=1}^k (1-p)/p_i = 1 - p = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i$.
$\square$

1.3 2 teoremos įrodymas

Pakanka (19) įrodyti vienmačiams pasiskirstymams kai $t = 1$. Atsižvelgiant į (1.14)–(1.15), teorema bus įrodyta, jei įrodysime, kad

$$B_{N,m}^{-1} S'_{N,m} \Longrightarrow J_m, \tag{1.35}$$

kur $J_m = J_m(1)$ ir

$$S'_{N,m} = \sum{}' \Big\{ \prod_{p=1}^{m} \sum_{t=1}^{N} b_{t-i_p} \Big\} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}. \tag{1.36}$$

Sumoje $\sum'$ yra sumuojama pagal $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{Z}, i_p \neq i_q (p \neq q)$. Apibrėžkime baigtinių intervalų $(x', x'']$, $x' < x''$ stochastinį matą W_N:

$$W_N((x', x'']) = \sigma^{-1} N^{-1/2} \sum_{x' < j/N \leqslant x''} \xi_j. \tag{1.37}$$

Kad įrodytume (1.35), užrašysime (1.36) kaip diskretų stochastinį integralą stochastinio, su ortogonaliais prieaugliais mato W_N atžvilgiu:

$$B_{N,m}^{-1} S'_{N,m} = \int_{\mathbb{R}^m} f_N(x_1, \ldots, x_m) W_N(\,\mathrm{d}x_1) \ldots W_N(\,\mathrm{d}x_m), \tag{1.38}$$

kur funkcija $f_N = f_N(x_1, \ldots, x_m), x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^m$ yra

$$f_N(x_1, \ldots, x_m) = \sigma^m c_m^{-1} \Lambda^{-m}(N) N^{-1+(1-d)m} \sum_{t=1}^{N} \prod_{p=1}^{m} b_{t-i_p}, \tag{1.39}$$

kai

$$(x_1, \ldots, x_m) \in (i_1/N, (i_1+1)/N] \times \cdots \times (i_m/N, (i_m+1)/N] \tag{1.40}$$

kur $i_p \neq i_q (p \neq q), i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{Z}$, ir $f_N(x_1, \ldots, x_m) = 0$ tiems (1.40) rinkiniams $(x_1, \ldots, x_m)$, kurie priklauso ,,įstrižainėms" : $i_p = i_q (\exists p \neq q)$.

Funkcijoms $g(x_1, \ldots, x_m)$, kurios įgyja baigtinį skaičių skirtingų reikšmių, yra lygios $g^{\Delta_1, \ldots, \Delta_m}$, kai $(x_1, \ldots, x_m)$ priklauso ,,kubui" $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m \subset \mathbb{R}^m$, kur

$$\Delta_p = \left(\frac{i_p}{N}, \frac{i_p+1}{N} \right],$$

$i_p \in \mathbb{Z}, p = 1, \ldots, m$, ir yra lygios nuliui, kai $(x_1, \ldots, x_m)$ priklauso ,,įstrižainėms" : $g^{\Delta_1, \ldots, \Delta_m} = 0$, jei $\Delta_p = \Delta_q (\exists p \neq q)$, diskretus stochastinis integralas

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x_1, \ldots, x_m) W_N(\mathrm{d}x_1) \ldots W_N(\mathrm{d}x_k) \equiv \int_{\mathbb{R}^m} g \, \mathrm{d}^m W_N$$

yra apibrėžiamas kaip suma:

$$\int_{\mathbb{R}^m} g \, \mathrm{d}^m W_N = \sum_{\Delta_1, \ldots, \Delta_m} g^{\Delta_1, \ldots, \Delta_m} W_N(\Delta_1) \ldots W_N(\Delta_m).$$

Kadangi kiekvienas toks integralas yra Apelio forma, tai, remiantis 1.1 lema, gauname

$$E\Big\{ \Big(\int_{\mathbb{R}^m} g \, \mathrm{d}^m W_N \Big)^2 \Big\} \leqslant C \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \tag{1.41}$$

kur konstanta $C < \infty$ nepriklauso nuo g ir N. Normos $\| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$ apibrėžimas pateiktas 2.3 skyrelyje.

Naudodamiesi klasikine martingaline teorema (žr. pvz. [8]), gauname, kad bet kokiam $k < \infty$ ir bet kokiems nesikertantiems intervalams $(x'_i, x''_i], i = 1, \ldots, k$,

$$(W_N((x'_1, x''_1]), \ldots, W_N((x'_k, x''_k])) \Rightarrow (W((x'_1, x'']), \ldots, W((x'_k, x''_k]), \tag{1.42}$$

kur W yra standartinis Gauso triukšmas. [47] darbe yra įrodyta, kad

$$\|f_N - f\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \to 0 \quad (N \to \infty), \tag{1.43}$$

kur

$$f(x_1, \ldots, x_m) = a_m \int_0^1 \prod_{p=1}^m (s - x_p)_+^{d-1} \, \mathrm{d}s \tag{1.44}$$

yra $m-$lypio Ito-Vynerio stochastinio integralo $J_m = J_m(1)$,

$$J_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \ldots, x_m) W(\mathrm{d}x_1) \ldots W(\mathrm{d}x_m),$$

pointegralinė funkcija. Kaip ir [47] darbe (žr. taip pat 2.3 lemos įrodymą), galima įsitikinti, kad iš (1.41)–(1.43) sąryšių išplaukia (1.35). Teorema įrodyta.

II Skyrius. Tolimos priklausomybės tiesinių procesų su begalinės dispersijos nepriklausomais, vienodai pasiskirsčiusiais triukšmais Apelio polinomų sumų silpnasis konvergavimas

2.1 Pagalbiniai teiginiai

2.1 lema. *Tegul $q(x)$ yra $m-1$ laipsnio polinomas. Jei tenkinamos sąlygos (22), (23), tai*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha P(\xi^m + q(\xi) < x) &= \tilde{c}_-, & (2.1)\\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha P(\xi^m + q(\xi) > x) &= \tilde{c}_+, & (2.2) \end{aligned}$$

ir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(|X_0| > x)}{P(|\xi_0| > x)} = \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^{\alpha m}. \qquad (2.3)$$

Konstantos $\tilde{c}_-$, $\tilde{c}_+$ nusakytos (26).

Įrodymas. Pradėkime nuo (2.2). Iš (22), (23) išplaukia sąryšiai

$$\begin{aligned} P\{\xi^m > x\} &\sim \tilde{c}_+ x^{-\alpha}, \quad x > 0, & (2.4)\\ P\{\xi^m < -x\} &\sim \tilde{c}_- |x|^{-\alpha}, \quad x < 0, & (2.5) \end{aligned}$$

kai $x \to \infty$. Tegul U, V yra atsitiktiniai dydžiai ir $u > v$. Tada

$$P\{U > u + v,\ |V| < v\} \leqslant P\{U + V > u,\ |V| < v\} \leqslant P\{U > u - v\}. \qquad (2.6)$$

Tegul $q(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$. Nesiaurindami bendrumo galime apsiriboti atveju $a_i \neq 0$. Naudojantis (2.4), (2.5) pakankamai dideliems $x > 0$ yra teisingos nelygybės

$$P\{|q(\xi)| > x\} \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} P\{|a_i \xi^i| > x\} \leqslant C \sum_{i=1}^{m-1} (|a_i|/x)^{\alpha m/i} \leqslant C x^{-\alpha'},$$

kur $\alpha' = \alpha m/(m-1) > \alpha$. Taigi galima parinkti konstantas $0 < \beta < 1$, $\gamma > \alpha$, kad būtų teisinga nelygybė

$$P\{|q(\xi)| > x^\beta\} \leqslant C x^{-\gamma}. \tag{2.7}$$

Akivaizdu, kad

$$\begin{aligned} P\{\xi^m + q(\xi) > x\} &= \\ P\{\xi^m + q(\xi) > x,\ |q(\xi)| \leqslant x^\beta\} &+ P\{\xi^m + q(\xi) > x,\ |q(\xi)| > x^\beta\}. \end{aligned}$$

Antroji tikimybė neviršija $P\{|q(\xi)| > x^\beta\} = o(x^{-\alpha})$. Naudodamiesi (2.6) su $U = \xi^m$, $V = R(\xi)$, $u = x$, $v = x^\beta$, gauname

$$P\{\xi^m + q(\xi) > x,\ |q(\xi)| \leqslant x^\beta\} \leqslant P\{\xi^m > x - x^\beta\} \sim \tilde{c}_+ x^{-\alpha}.$$

Iš kitos pusės

$$\begin{gathered} P\{\xi^m + q(\xi) > x,\ |q(\xi)| \leqslant x^\beta\} \geqslant P\{\xi^m > x + x^\beta,\ |q(\xi)| \leqslant x^\beta\} = \\ P\{\xi^m > x + x^\beta\} - P\{\xi^m > x + x^\beta,\ |q(\xi)| > x^\beta\}. \end{gathered}$$

Nesunku įsitikinti, kad $P\{\xi^m > x + x^\beta\} \sim c_+ x^{-\alpha}$. Naudodamiesi (2.7), gauname

$$P\{\xi^m > x + x^\beta,\ |q(\xi)| > x^\beta\} \leqslant P\{|q(\xi)| > x^\beta\} = O(x^{-\gamma}) = o(x^{-\alpha}).$$

Analogiškai galima įrodyti (2.1).

Toliau įrodysime (2.3). Yra žinoma, kad

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{P(|X_0| > x)}{P(|\xi_0| > x)} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^{\alpha m}$$

(žr. [12]). Taigi pakanka įrodyti, kad

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(|X_0| > x)}{P(|\xi_0| > x)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^{\alpha m}. \tag{2.8}$$

Parinkime $\varepsilon > 0$ tokį, kad $\alpha m - \varepsilon \geqslant 2$. Naudojantis (22), (23) nesunku įrodyti, kad (žr. [2], 1 lema)

$$E\big|\xi_i I(|\xi_i| > x)\big|^{\alpha m - \varepsilon} \leqslant C x^{-\varepsilon}, \qquad E\big|\xi_i I(|\xi_i| \leqslant x)\big|^{\alpha m + \varepsilon} \leqslant C x^{\varepsilon}, \quad x \to \infty. \tag{2.9}$$

Pasinaudoję Rosentalio nelygybe (žr. [36])

$$E\left|\sum_{i=1}^{\infty} b_i\xi_i\right|^p \leqslant C\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p E|\xi_i|^p + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 E\xi_i^2\right)^{p/2}\right\} \tag{2.10}$$

bet kuriam $p \geqslant 2$. Pažymėkime

$$D_{n,-} := \sum_{i=n}^{\infty}|b_i|^{\alpha m-\varepsilon} + \left(\sum_{i=n}^{\infty} b_i^2\right)^{(\alpha m-\varepsilon)/2}.$$

Naudodamiesi (2.9) ir (2.10), gauname, kad su bet kuriais $n, x \geqslant 1$

$$\begin{aligned}P\left(\left|\sum_{i=n}^{\infty} b_i\xi_i I(|\xi_i|>x)\right|>x\right) &\leqslant x^{-\alpha m+\varepsilon}E\left|\sum_{i=n}^{\infty} b_i\xi_i I(|\xi_i|>x)\right|^{\alpha m-\varepsilon}\\ &\leqslant Cx^{-\alpha m+\varepsilon}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^{\alpha m-\varepsilon}x^{-\varepsilon} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 x^{2-\alpha m}\right)^{(\alpha m-\varepsilon)/2}\right\} \leqslant Cx^{-\alpha m}D_{n,-}.\end{aligned}$$

Naudodamiesi nelygybėmis

$$E\xi_i^2 I\big(|\xi_i| \leqslant C\big) \leqslant E\xi_i^2 \leqslant C,$$

gauname

$$\begin{aligned}P\left(\left|\sum_{i=n}^{\infty} b_i\xi_i I(|\xi_i|\leqslant x)\right|>x\right) &\leqslant x^{-\alpha m-\varepsilon}E\left|\sum_{i=n}^{\infty} b_i\xi_i I(|\xi_i|\leqslant x)\right|^{\alpha m+\varepsilon}\\ &\leqslant Cx^{-\alpha m-\varepsilon}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^{\alpha m+\varepsilon}x^{\varepsilon} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\right)^{(\alpha m+\varepsilon)/2}\right\}\\ &\leqslant Cx^{-\alpha m}D_{n,+},\end{aligned}$$

kur

$$D_{n,+} := \sum_{i=n}^{\infty}|b_i|^{\alpha m+\varepsilon} + \left(\sum_{i=n}^{\infty} b_i^2\right)^{(\alpha m+\varepsilon)/2}.$$

Atsižvelgę į aukščiau įrodytas nelygybes bei į (22), (23), gauname

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P\big(\big|\sum_{i=n}^{\infty} b_i\xi_i\big|>x\big)}{P(|\xi_0|>x)} \leqslant CD_n, \tag{2.11}$$

kur $D_n := D_{n,+} + D_{n,-} \to 0$, $n\to\infty$.

Kai $n<\infty$, tai

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\big(\big|\sum_{i=1}^{n-1} b_i\xi_i\big|>x\big)}{P(|\xi_0|>x)} = \sum_{i=1}^{n-1}|b_i|^{\alpha m} \tag{2.12}$$

(žr. [12]). Tegul $0 < \delta < 1$. Pažymėkime

$$U_n := \sum_{i=1}^{n-1} b_i \xi_i \quad \text{ir} \quad V_n := \sum_{i=n}^{\infty} b_i \xi_i.$$

Naudosimės nelygybe

$$P\big(|X_0| > x\big) \leqslant P\big(|U_n| > (1-\delta)x\big) + P\big(|V_n| > \delta x\big).$$

Naudodamiesi (2.11) ir (2.12), gauname

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{P(|X_0| > x)}{P(|\xi_0| > x)} \leqslant (1-\delta)^{-\alpha m} \sum_{i=1}^{n-1} |b_i|^{\alpha m} + C\delta^{-\alpha m} D_n.$$

Paskutinėje nelygybėje perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, o po to, kai $\delta \to 0$, gauname (2.8). □

6 teorema ([3], [18]). *Tegul $E|X|^m < \infty$. Jei $\mathcal{P}_m(x)$, $m = 0, 1, \ldots$ yra Apelio polinomai, susiję su atsitiktinio dydžio X skirstiniu, tai*

$$\mathcal{P}_m(x) = \sum_{n=0}^{m} C_n^m x^{m-n} \sum_{(V_1, \cdots, V_l)} (-1)^l \kappa_{|V_1|} \cdots \kappa_{|V_l|}, \tag{2.13}$$

kur sumoje $\sum_{(V_1,\ldots,V_l)}$ yra sumuojama pagal visus aibės $\{1, \ldots, n\}$ suskaidymus $(V_1, \ldots, V_l)$, $l = 1, 2, \ldots$ į netuščius poaibius $V_1, \ldots, V_l$. Aibės V elementų skaičių pažymėjome$|V|$, atsitiktinio dydžio X p-tos eilės kumuliantą pažymėjome κ_p.

Iš paskutinės teoremos išplaukia, kad $\mathcal{P}_m(x)$ yra m-tos eilės polinomas, kurio vyriausiasis koeficientas lygus 1, o kiti koeficientai išreiškiami per momentus $EX^k, k = 1, 2, \ldots, m$.

Toliau $\mathcal{Q}_p(x)$, $p = 0, \ldots, m$ zymėsime p-tos eilės Apelio polinomus susijusius su atsitiktinio dydžio ξ_0 skirstiniu.

Iš 2.1 lemos ir (2.13) išplaukia tokia išvada.

2.2 išvada.

(i) $E|\mathcal{P}_m(X_0)|^r < \infty, \quad 0 < r < \alpha;$

(ii) $E|\mathcal{Q}_p(\xi_0)|^r < \infty, \quad 0 < r < \alpha m/p,\ p = 1, \ldots, m;$

(iii) $E|\mathcal{Q}_p(\xi_0)|^2 < \infty, \quad p < \alpha m/2.$

Žemiau pateikta multinominė formulė yra labai naudinga tyrinėjant tiesinių procesų Apelio polinomų sumas.

7 teorema (multinominė formulė)**.** *Tegul $m \geqslant 2$ yra natūralusis skaičius, $\{\lambda_i,\ i = 1, 2 \ldots\}$ yra realiųjų skaičių seka, tokia kad*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty.$$

Tegul

$$X := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i,$$

kur $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra nepriklausomi, vienodai pasikirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkius $E\xi_i = 0$ ir mr-tos eilės momentus $E|\xi_i|^{mr} < \infty$ kažkuriam skaičiui $1 < r < 2$. Tada

$$\mathcal{P}_m(X) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{(\pi)_{m,l}} {\sum_{(i)_l}}' \prod_{j=1}^{l} \lambda_{i_j}^{p_j} \mathcal{Q}_{p_j}(\xi_{i_j}), \tag{2.14}$$

kur sumoje $\sum_{(\pi)_{m,l}}$ yra sumuojama pagal visus aibės $\{1, \ldots, m\}$ suskaidymus π į nesikertančius poaibius, kurių kardinaliniai skaičiai yra $p_1, \ldots, p_l$,

$$\sum_{i=1}^{l} p_i = m,$$

o sumoje $\sum'_{(i)_l}$ yra sumuojama pagal sveikųjų skaičių $i_1, \ldots, i_l$, tokių kad $i_j \neq i_k$ kai $j \neq k$, rinkinius $(i_1, \ldots, i_l)$. Dešinėje (2.14) pusėje užrašyta eilutė konverguoja beveik visur ir $L^r(\Omega)$ prasme.

Formulė įvesta [3] darbe. Autoriai ją įrodė atvejui, kai atsitiktinio dydžio $\mathcal{P}_m(X)$ dispersija yra baigtinė, t.y. kai tenkinama sąlyga $E|\xi_i|^{2m} < \infty$.

Įrodymas. Yra žinoma, kad (2.14) formulė yra teisinga baigtinėms sumoms

$$X_N := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \xi_i, \quad 1 \leqslant N < \infty$$

(žr. [3]), t.y.

$$\mathcal{P}_{m,N}(X_N) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{(\pi)_{m,l}} {\sum_{(i)_l, N}}' \prod_{j=1}^{l} \lambda_{i_j}^{p_j} \mathcal{Q}_{p_j}(\xi_{i_j}), \tag{2.15}$$

kur $\mathcal{P}_{m,N}$ yra m-tos eilės Apelio polinomas, susijęs su atsitiktinio dydžio X_N skirstiniu, o sumoje $\sum'_{(i)_l,N}$ yra sumuojama pagal visus rinkinius $(i_1, \ldots, i_l)$, $i_j \neq i_k (j \neq k), i_1, \ldots, i_l \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Teorema bus įrodyta parodžius, kad atitinkamos (2.15) pusės konverguoja į atitinkamas (2.14) puses.

Pirmiau įrodysime, kad $\mathcal{P}_{m,N}(X_N)$ konverguoja su tikimybe 1 į atsitiktinį dydį $\mathcal{P}_m(X)$. Yra gerai žinoma, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X_N\}$ konverguoja su tikimybe 1 į atsitiktinį dydį X. Taigi su kiekvienu $k \geqslant 1$ atsitiktinių dydžių seka $\{X_N^k\}$ konverguoja su tikimybe 1 į atsitiktinį dydį X^k. Naudodamiesi Rozentalio nelygybe, gauname, kad $X_N^k \to X^k$ $L^r(\Omega)$ prasme ir kad su kiekvienu $k = 1, \dots, m$ yra teisingos nelygybės $E|X|^{kr} < \infty$. Lieka pasinaudoti (2.13).

Pastebėkime, kad dešinė lygybės (2.15) pusė yra atsitiktinių procesų

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_l \leqslant N} \prod_{j=1}^{l} \lambda_{i_j}^{p_j} \mathcal{Q}_{p_j}(\xi_{i_j}), \quad N = 1, 2, \dots, \tag{2.16}$$

baigtinė suma pagal visus $l = 1, \dots, m$ ir pagal visus suskaidymus $\pi_{m,l}$. Kiekvienas iš (2.16) procesų yra martingalas pagal N (žr. [3]).

Naudodamiesi dekouplingo nelygybe martingaliniams skirtumams bei Bahro ir Esyno nelygybe (žr. 2.2 lemos įrodymą), galime įrodyti, kad martingalai (2.16) yra $L^r(\Omega)$ aprėžti ir dėl to konverguoja $L^r(\Omega)$ bei beveik visur prasmėmis. $\square$

2.2 Išskaidymas

Nagrinėkime atsitiktinius procesus

$$\begin{aligned}
Y_t' &:= \sum_{(i)_m}{}' b_{t-i_1} \cdots b_{t-i_m} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m} = m! \sum_{i_m < \dots < i_1 < t} b_{t-i_1} \cdots b_{t-i_m} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}, \\
Y_t'' &:= \sum_{i<t} b_{t-i}^m \mathcal{Q}_m(\xi_i), \\
R_t &:= \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{\pi_{m,l}} \sum_{(i)_l}{}' b_{t-i_1}^{p_1} \cdots b_{t-i_l}^{p_l} \mathcal{Q}_{p_1}(\xi_{i_1}) \cdots \mathcal{Q}_{p_l}(\xi_{i_l}).
\end{aligned}$$

Remdamiesi multinomine formule (2.14),

$$\mathcal{P}_m(X_t) = Y_t' + Y_t'' + R_t.$$

Pažymėkime

$$S_{N,m}'(t) := \sum_{j=1}^{[Nt]} Y_j', \qquad S_{N,m}''(t) := \sum_{j=1}^{[Nt]} Y_j'', \qquad R_{N,m}(t) := \sum_{j=1}^{[Nt]} R_j,$$

$$S_{N,m}' := S_{N,m}'(1), \qquad S_{N,m}'' := S_{N,m}''(1), \qquad R_{N,m} := R_{N,m}(1).$$

Tada

$$S_{N,m}(t) = S_{N,m}'(t) + S_{N,m}''(t) + R_{N,m}(t). \tag{2.17}$$

2.2 lema. *Egzistuoja skaičius $r > \alpha$ toks, kad*

$$E|R_{N,m}|^r = \mathrm{o}(A_{N,m}^r). \tag{2.18}$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad $R_{N,2} = 0$, todėl lemą pakanka įrodyti kai $m \geqslant 3$. Įrodysime, kad (2.18) nelygybė yra teisinga su bet kokiu $m \geqslant 4$. Atveju $m = 3$ minėtoji nelygybė įrodoma atlikus neesminius pakeitimus.

Iš R_t apibrėžimo išplaukia, kad (2.18) nelygybė yra teisinga su kiekvienu

$$R^{\pi}_{N,m} := \sum_{t=1}^{N} R^{\pi}_t,$$

kur

$$R^{\pi}_t := \sum_{i_l<\cdots<i_1<t} b^{p_1}_{t-i_1} \cdots b^{p_l}_{t-i_l} \mathcal{Q}_{p_1}(\xi_{i_1}) \cdots \mathcal{Q}_{p_l}(\xi_{i_l}), \tag{2.19}$$

o $\pi = \pi_{m,l}$ yra aibės $\{1, \ldots, m\}$ suskaidymas į l nesikertančių poaibių, kur $2 \leqslant l \leqslant m-1$. Kitaip tariant, suskaidymo π poaibių kardinaliniai skaičiai p_u tenkina nelygybes $1 \leqslant p_u \leqslant m-1, u = 1, \ldots, l$, ir bent vienas iš kardinalinių skaičių yra didesnis už vienetą. Pastebėkime, kad

$$R^{\pi}_{N,m} = \sum_{i_l<\cdots<i_1} \left\{ \sum_{t=1\vee(i_1+1)}^{N} b^{p_1}_{t-i_1} \cdots b^{p_l}_{t-i_l} \right\} \mathcal{Q}_{p_1}(\xi_{i_1}) \cdots \mathcal{Q}_{p_l}(\xi_{i_l}) \tag{2.20}$$

yra martingalinių skirtumų

$$\mathcal{Q}_{p_1}(\xi_{i_1}), \ldots, \mathcal{Q}_{p_l}(\xi_{i_l})$$

polinominė forma. Remiantis 2.2 išvada, atsitiktinio dydžio $R^{\pi}_{N,m}$ dispersija gali būti baigtinė arba begalinė, todėl būtina į tai atsižvelgti.

Pažymėję

$$p^* := \max_{1\leqslant u\leqslant l} p_u,$$

nagrinėkime atvejį $p^* < \alpha m/2$. Naudodamiesi 2.2 išvados (iii) teiginiu, gauname

$$E\{\mathcal{Q}^2_{p_i}(\xi)\} < \infty, \quad i = 1, \ldots, l,$$

ir

$$E\big|R^{\pi}_{N,m}\big|^2 \leqslant C \sum_{i_l<\cdots<i_1} \left| \sum_{t=1\vee(i_1+1)}^{N} b^{p_1}_{t-i_1} \cdots b^{p_l}_{t-i_l} \right|^2 \leqslant CN. \tag{2.21}$$

Paskutinės nelygybės įrodymą žr. [19].

Atvejis $p^* \geqslant \alpha m/2$ yra sudėtingesnis, nes suskaidymo $\pi = \pi_{m,l}$ tik vieno poaibio kardinalinis skaičius yra p^*,o kitų poaibių kardinaliniai skaičiai yra mažesni nei $\alpha m/2$. Tuo nesunku įsitikinti – jei $p_u \geqslant \alpha m/2$ ir $p_v \geqslant \alpha m/2$ kažkuriems $u \neq v, u, v = 1, \ldots, l$, tai $p_u + p_v \geqslant \alpha m > m$, kas prieštarauja nelygybei $p_u + p_v \leqslant m$. Taigi egzistuoja vienintelis skaičius $1 \leqslant u^* \leqslant l$, toks, kad

$$p_{u*} = p^* \geqslant \alpha m/2, \qquad p_u < \alpha m/2, \quad u \neq u^*,\ u = 1, \ldots, l. \tag{2.22}$$

Toliau naudosimės Bahro-Esyno nelygybe (įrodymą žr. [5]): jei atsitiktinių dydžių seka η_i yra martingalinis skirtumas, r – realus skaičius, $1 \leqslant r \leqslant 2$, tai

$$E\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right|^r \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}E|\eta_i|^r. \tag{2.23}$$

Tegul $r = (\alpha m/p^*) - \delta$, kur $\delta > 0$. Tada $\alpha < r < 2$, čia pirmoji nelygybė seka iš nelygybės $p^* < m$ pasirinkus δ pakankamai mažą. Iš (2.22) ir 2.2 išvados išplaukia

$$E\{|\mathcal{Q}_{p^*}(\xi)|^r\} < \infty, \qquad E\{\mathcal{Q}^2_{p_u}(\xi)\} < \infty, \quad u \neq u^*,\ u = 1, \dots, l. \tag{2.24}$$

Jei $u^* = 1$ (t.y. $p_1 = p^*$), tai naudodamiesi (2.23) ir (2.24), gauname

$$\begin{aligned}
&E\big|R^{\pi}_{N,m}\big|^r \\
&= E\left|\sum_{i_1}\mathcal{Q}_{p^*}(\xi_{i_1})\left(\sum_{i_l<\dots<i_2<i_1}\left\{\sum_{t=1\vee(i_1+1)}^{N} b^{p_1}_{t-i_1}\cdots b^{p_l}_{t-i_l}\right\}\mathcal{Q}_{p_1}(\xi_{i_2})\cdots\mathcal{Q}_{p_l}(\xi_{i_l})\right)\right|^r \\
&\leqslant 2\sum_{i_1}E\left|\mathcal{Q}_{p^*}(\xi_{i_1})\left(\sum_{i_l<\dots<i_2<i_1}\left\{\sum_{t=1\vee(i_1+1)}^{N} b^{p_1}_{t-i_1}\cdots b^{p_l}_{t-i_l}\right\}\mathcal{Q}_{p_1}(\xi_{i_2})\cdots\mathcal{Q}_{p_l}(\xi_{i_l})\right)\right|^r \\
&\leqslant C\sum_{i_1}E\left|\sum_{i_l<\dots<i_2<i_1}\left\{\sum_{t=1\vee(i_1+1)}^{N} b^{p_1}_{t-i_1}\cdots b^{p_l}_{t-i_l}\right\}\mathcal{Q}_{p_1}(\xi_{i_2})\cdots\mathcal{Q}_{p_l}(\xi_{i_l}))\right|^r.
\end{aligned}$$

Čia mes pasinaudojome tuo, kad atsitiktinis dydis ξ_{i_1} yra nepriklausomas nuo atsitiktinių dydžių $\xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_l}$. Pasinaudoję Hiolderio nelygybe bei (2.24) nelygybėmis, panašiai kaip (2.21) gauname

$$\begin{aligned}
E\big|R^{\pi}_{N,m}\big|^r &\leqslant C\sum_{i_1}E^{r/2}\left|\sum_{i_l<\dots<i_2<i_1}\left\{\sum_{t=1\vee(i_1+1)}^{N} b^{p_1}_{t-i_1}\cdots b^{p_l}_{t-i_l}\right\}\mathcal{Q}_{p_1}(\xi_{i_2})\cdots\mathcal{Q}_{p_l}(\xi_{i_l}))\right|^2 \\
&\leqslant C\sum_{i_1}\left(\sum_{i_l<\dots<i_2<i_1}\left\{\sum_{t=1\vee(i_1+1)}^{N} b^{p_1}_{t-i_1}\cdots b^{p_l}_{t-i_l}\right\}^2\right)^{r/2}.
\end{aligned}$$

Atliekame skaičiavimus

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_l,\dots,i_2}\left\{\sum_{t=1\vee(i_1+1)}^{N} b^{p_1}_{t-i_1}\cdots b^{p_l}_{t-i_l}\right\}^2 \\
&\quad = \sum_{t,t'=1\vee(i_1+1)}^{N} b^{p^*}_{t-i_1}b^{p^*}_{t'-i_1}\sum_{i_2}b^{p_2}_{t-i_2}b^{p_2}_{t'-i_2}\cdots\sum_{i_l}b^{p_l}_{t-p_l}b^{p_l}_{t'-p_l} \\
&\quad \leqslant C\sum_{t,t'=1\vee(i_1+1)}^{N}|b_{t-i_1}|^{p^*}|b_{t'-i_1}|^{p^*}.
\end{aligned}$$

Kadangi $r/2 < 1$, tai, naudodamiesi nelygybe

$$\Big|\sum_i a_i\Big|^\gamma \leqslant \sum_i |a_i|^\gamma, \quad 0 < \gamma \leqslant 1,$$

gauname

$$\begin{aligned} E\big|R^\pi_{N,m}\big|^r &\leqslant C\sum_i \Bigg(\sum_{t,t'=1\vee(i+1)}^N |b_{t-i}|^{p^*}|b_{t'-i}|^{p^*}\Bigg)^{r/2} \\ &\leqslant C\sum_{t,t'=1}^N \sum_i |b_{t-i}|^{rp^*/2}|b_{t'-i}|^{rp^*/2}. \end{aligned}$$

Kadangi $rp^* > \alpha m - \delta p^*$, tai skaičius rp^* kaip norima artimas skaičiui αm, kuris tenkina nelygybes $\alpha m > m \geqslant 4$. Taigi

$$\sum_i |b_i|^{rp^*/2} < \infty,$$

kai $\delta > 0$ yra pakankamai mažas. Įrodėme, kad egzistuoja skaičius $r > \alpha$, su kuriuo yra teisinga nelygybė

$$E\big|R^\pi_{N,m}\big|^r \leqslant CN, \tag{2.25}$$

iš kurios seka sąryšiai

$$E\big|R^\pi_{N,m}\big|^r = \mathrm{o}\big(N^{r/\alpha}\big) = \mathrm{o}\big(A^r_{N,m}\big).$$

Deja, aukščiau pateiktas įrodymas nėra pritaikomas atvejui $u^* \neq 1$, todėl (2.25) nelygybei įrodyti naudosime polinominių formų $R^\pi_{N,m}$ dekouplingą (žr. [36], [52]). Tegul atsitiktinių dydžių sekos $\{\tilde\xi_{1,i}\}, \ldots, \{\tilde\xi_{l,i}\}$ yra atsitiktinių dydžių sekos $\{\xi_i\}$ nepriklausomos kopijos $\{\xi_i\}$. Pažymėkime

$$\widetilde{R}^\pi_{N,m} := \sum_{i_l<\cdots<i_1}\Bigg\{\sum_{t=1\vee(i_1+1)}^N b^{p_1}_{t-i_1}\cdots b^{p_l}_{t-i_l}\Bigg\}\mathcal{Q}_{p_1}\big(\tilde\xi_{1,i_1}\big)\cdots\mathcal{Q}_{p_l}\big(\tilde\xi_{l,i_l}\big). \tag{2.26}$$

Nesunku pastebėti, kad (2.26) polinominei formai (kuriai pritaikytas dekauplingas) nebėra būtina reikalauti $u^* = 1$, todėl (2.25) nelygybė gali būti taikoma bet kuriam $u^* = 1, \ldots, l$. Norėdami įrodyti, kad (2.25) nelygybė yra teisinga bet kokiam suskaidymui $\pi = \pi_{m,l}$, pasinaudojame kita dekauplingo nelygybe: jei r – realus skaičius $1 \leqslant r \leqslant 2$, tai

$$E|R(f)|^r \leqslant CE|\widetilde{R}(f)|^r, \tag{2.27}$$

kur

$$\begin{aligned} R(f) &:= \sum_{i_l<\cdots<i_1} f_{i_1,\ldots,i_l}\mathcal{Q}_{p_1}(\xi_{i_1})\cdots\mathcal{Q}_{p_l}(\xi_{i_l}), \\ \widetilde{R}(f) &:= \sum_{i_l<\cdots<i_1} f_{i_1,\ldots,i_l}\mathcal{Q}_{p_1}\big(\tilde\xi_{1,i_1}\big)\cdots\mathcal{Q}_{p_l}\big(\tilde\xi_{l,i_l}\big) \end{aligned}$$

yra bet kokios baigtinės tetraedrinės Apelio polinomų formos, ir konstanta C nepriklauso nuo f. Plačiau ir apie bendresnes dekouplingo nelygybes žr. [43]. Taigi (2.25) nelygybė, o tuo pačiu ir lema irodytos. $\square$

2.3 3 teoremos įrodymas

(i) Nagrinėkime (2.17) išskaidymą . Remdamiesi 2.2 lema, turime $R_{N,m}(t) = \mathrm{o}_P(A_{N,m})$. Be to,

$$S'_{N,m}(t) = \mathrm{O}_P\big(N^{1/2}\big) = \mathrm{o}(A_{N,m})$$

(žr. [3], [18]). Taigi pakanka įrodyti, kad

$$A^{-1}_{N,m} S''_{N,m}(t) \Longrightarrow Z_\alpha(t). \tag{2.28}$$

Pastebėkime, kad

$$Y''_t = \sum_{i<t} b^m_{t-i} \mathcal{Q}_m(\xi_i)$$

yra tiesinis procesas, kurio inovacijos $\mathcal{Q}_m(\xi_i)$, $i \in \mathbb{Z}$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, o svoriai yra sumuojami:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^m < \infty.$$

Iš 2.1 lemos išplaukia, kad atsitiktinio dydžio $\mathcal{Q}_m(\xi_0)$ skirstinys priklauso α-stabilaus dėsnio traukos sričiai.

Vadinasi, (2.28) konvergavimas išplaukia iš [2], [4] ar [31] darbų.

(ii) Šiuo atveju turime $A_{N,m} = \mathrm{o}(B_{N,m})$, todėl teoremos tvirtinimas išplaukia iš 2.2 lemos ir

$$B^{-1}_{N,m} S'_{N,m}(t) \Longrightarrow J_m(t). \tag{2.29}$$

Paskutinis sąryšis yra įrodytas [3], [19] darbuose.

(iii) Teoremos tvirtinimas seka iš

$$\big(B^{-1}_{N,m} S'_{N,m}(t), A^{-1}_{N,m} S''_{N,m}(t)\big) \Longrightarrow \big(J_m(t), Z_\alpha(t)\big). \tag{2.30}$$

Iš paskutinio sąryšio taip pat seka (2.28) ir (2.29).

Įveskime keletą pažymėjimų. Tegul $1 < p \leqslant 2$. Pažymėkime $L^p(\mathbb{R}^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, erdvę visų realių simetrinių funkcijų $f\colon\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, kurioms

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^k)} := \left\{ \int_{\mathbb{R}^k} |f(x_1, \ldots, x_k)|^p \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_k \right\}^{1/p} < \infty,$$

kur $\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k$ yra k-matis Lebego matas. Fiksuokime skaičių $\delta > 0$, tokį, kad $1 < \alpha - \delta < \alpha + \delta < 2$. Pažymėkime $L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})$ Banacho ervę visų išmatuojamų funkcijų $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurių

$$\|g\|_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})} := \max\left\{\|g\|_{L^{\alpha-\delta}(\mathbb{R})}, \|g\|_{L^{\alpha+\delta}(\mathbb{R})}\right\} < \infty.$$

Sakysime, kad funkcija $f(x_1,\dots,x_k)$ on $\mathbb{R}^k$ yra paprastoji, jei ji įgyja pastovią reikšmę $f^{\Delta_1,\dots,\Delta_k}$ aibėje $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_k \subset \mathbb{R}^k$, kur

$$\Delta_j = \Big(\frac{i_j}{N}, \frac{i_j+1}{N}\Big], \quad i_j \in \mathbb{Z},\ j = 1,\dots,k,$$

ir lygi nuliui įstrižainėse: $f^{\Delta_1,\dots,\Delta_k} = 0$ if $\Delta_j = \Delta_{j'}$ $(\exists j \neq j')$. Paprastųjų funkcijų, apibrėžtų aibėje $\mathbb{R}^k$,klasę susitarkime žymėti $L_N(\mathbb{R}^k)$. Tegul

$$L^p_N\big(\mathbb{R}^k\big) := L^p\big(\mathbb{R}^k\big) \cap L_N\big(\mathbb{R}^k\big), \qquad L^{\alpha,\delta}_N(\mathbb{R}) := L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R}) \cap L_N(\mathbb{R}).$$

Naudosime stochastinius matus

$$Z_N(B) := \beta\nu^{-1}N^{-1/\alpha}\sum_{i/N\in B}\mathcal{Q}_m(\xi_i), \tag{2.31}$$

$$W_N(B) := \sigma^{-1}N^{-1/2}\sum_{i/N\in B}\xi_i, \qquad \sigma^2 := E\xi_0^2, \tag{2.32}$$

apibrėžtus baigtiniuose intervaluose $B = (x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$. Diskretūs stochastiniai integralai $I_1(g, Z_N)$ ir $I_k(f, W_N)$ yra apibrėžiami paprastosioms funkcijoms $g \in L^{\alpha,\delta}_N(\mathbb{R})$ ir $f \in L^2_N(\mathbb{R}^k)$ lygybėmis

$$I_1(g, Z_N) := \sum_{\Delta} g^{\Delta} Z_N(\Delta) \tag{2.33}$$

ir

$$I_k(f, W_N) := \sum_{\Delta_1,\dots,\Delta_k} f^{\Delta_1,\dots,\Delta_k} W_N(\Delta_1)\cdots W_N(\Delta_k). \tag{2.34}$$

Eilutės konverguoja atitinkamai $L^2(\Omega)$ ir $L^{\alpha-\delta}(\Omega)$ prasmėmis.

Naudodamiesi 2.1 lema, panašiai kaip [1] darbe, nesunkiai gautame nelygybes

$$E|I_1(g, Z_N)|^{\alpha-\delta} \leqslant C\|g\|^{\alpha-\delta}_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})}, \qquad E|I_k(f, W_N)|^2 = k!\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^k)}, \tag{2.35}$$

kur konstanta C nepriklauso nuo N ir g. Stochastiniai integralai

$$I_1(g, Z_\alpha) = \int g(x) Z_\alpha(\mathrm{d}x), \tag{2.36}$$

$$I_k(f, W) = \int f(x_1,\dots,x_k) W(\mathrm{d}x_1)\cdots W(\mathrm{d}x_k), \tag{2.37}$$

α-stabilaus atsitiktinio mato $Z_\alpha(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}Z_\alpha(x)$ ir Gauso atsitiktinio mato $W(\mathrm{d}x)$ atžvilgiu yra apibrėžti atitinkamai funkcijoms $g \in L^\alpha(\mathbb{R})$ ir $f \in L^2(\mathbb{R}^k)$. Yra teisingi, panašūs į (2.35) rezultatai

$$E|I_1(g, Z)|^{\alpha-\delta} \leqslant C\|g\|^{\alpha-\delta}_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})}, \qquad E|I_k(f, W)|^2 = k!\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^k)}. \tag{2.38}$$

2.3 lema. *Tarkime, kad*

$$\|f_N - f\|_{L^2(\mathbb{R}^k)} \to 0, \qquad \|g_N - g\|_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})} \to 0, \tag{2.39}$$

kur $f_N \in L^2_N(\mathbb{R}^k)$, $g_N \in L^{\alpha,\delta}_N(\mathbb{R}), N \geqslant 1$, *ir* $f \in L^2(\mathbb{R}^k)$, $g \in L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})$. *Tada*

$$\big(I_k(f_N, W_N),\ I_1(g_N, Z_N)\big) \Longrightarrow \big(I_k(f, W),\ I_1(g, Z_\alpha)\big), \tag{2.40}$$

kur stochastiniai matai W *ir* Z_α *yra nepriklausomi.*

Įrodymas. Nagrinėkime atvejį, kai N įgyjamos reikšmės yra $N = 2^K$, $K = 1, 2, \dots$, t.y. erdvės $\mathbb{R}^k$ suskaidymai $\{\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_k\}$ yra monotoniški. Tada $L^2_M(\mathbb{R}^k) \subset L^2_N(\mathbb{R}^k)$ ir $L^{\alpha,\delta}_M(\mathbb{R}) \subset L^{\alpha,\delta}_N(\mathbb{R})$ $(M < N)$. Nemonotoninių suskaidymų atveju įrodymą reikia kiek modifikuoti.

Naudodamiesi 2.1 lema bei 2.35 teorema [30], galima įrodyti, kad

$$\big\{(W_N(\Delta_j), Z_N(\Delta_j)),\ j = 1, \dots, L\big\} \Longrightarrow \big\{(W(\Delta_j), Z_\alpha(\Delta_j)),\ j = 1, \dots, L\big\},$$

kur $\Delta_j, j = 1, \dots, L$, yra nesikertantys baigtiniai intervalai. Iš čia, naudojantis (2.33), (2.34), (2.36) ir (2.38) apibrėžimais, gauname, kad visiems $M \geqslant 1$ ir paprastosioms, su kompaktiniu nešėju funkcijoms $f_M \in L_M(\mathbb{R}^k)$, $g_M \in L_M(\mathbb{R})$ išplaukia konvergavimas

$$\big(I_k(f_M, W_N),\ I_1(g_M, Z_N)\big) \Longrightarrow \big(I_k(f_M, W),\ I_1(g_M, Z_\alpha)\big), \tag{2.41}$$

kai $N \to \infty$ (žr. [1], [47], [49]). Kad įrodytume (2.40), pakanka įrodyti, kad bet kokiems $u, v \in \mathbb{R}$,

$$E \exp\big\{iuI_k(f_N, W_N) + ivI_1(g_N, Z_N)\big\} \to E \exp\big\{iuI_k(f, W) + ivI_1(g, Z)\big\}. \tag{2.42}$$

Apsiribokime atveju $u = v = 1$. Iš (2.39) išplaukia, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ galima rasti tokį natūralų skaičių M ir paprastąsias su kompaktiniu nešėju funkcijas $f_M \in L_M(\mathbb{R}^k)$, $g_M \in L_M(\mathbb{R})$, kad

$$\begin{aligned} &\|f_N - f_M\|_{L^2(\mathbb{R}^k)} + \|f_M - f||_{L^2(\mathbb{R}^k)} \\ &+\|g_N - g_M\|_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})} + \|g_M - g_N\|_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})} < \varepsilon \end{aligned} \tag{2.43}$$

visiems $N > M$. Turime

$$\begin{aligned} &\big|E\, \mathrm{e}^{iI_k(f_N,W_N)+iI_1(g_N,Z_N)} - E\, \mathrm{e}^{iI_k(f,W)+iI_1(g,Z)}\big| \\ &\quad\leqslant \big|E\, \mathrm{e}^{iI_k(f_N,W_N)+iI_1(g_N,Z_N)} - E\, \mathrm{e}^{iI_k(f_M,W_N)+iI_1(g_M,Z_N)}\big| \\ &\qquad+\big|E\, \mathrm{e}^{iI_k(f_M,W_N)+iI_1(g_M,Z_N)} - E\, \mathrm{e}^{iI_k(f_M,W)+iI_1(g_M,Z)}\big| \\ &\qquad+\big|E\, \mathrm{e}^{iI_k(f_M,W)+iI_1(g_M,Z)} - E\, \mathrm{e}^{iI_k(f,W)+iI_1(g,Z)}\big| \\ &\quad=: V_1 + V_2 + V_3. \end{aligned}$$

Naudodamiesi (2.35) ir (2.43) gauname

$$\begin{aligned} V_1 &\leqslant \left|E\,\mathrm{e}^{iI_k(f_N-f_M,W_N)}-1\right|+\left|E\,\mathrm{e}^{iI_1(g_N-g_M,Z_N)}-1\right| \\ &\leqslant E^{1/2}|I_k(f_N-f_M,W_N)|^2+E^{1/(\alpha-\delta)}|I_1(g_N-g_M,Z_N)|^{\alpha-\delta} \\ &\leqslant C(\|f_N-f_M\|_{L^2(\mathbb{R}^k)}+\|g_N-g_M\|_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})})<C\varepsilon \end{aligned}$$

su kiekvienu $N \geqslant M$. Analogiška nelygybė yra teisinga dėmeniui V_3. Taigi dėl laisvo M ir ε parinkimo suma V_1+V_3 gali būti kaip norima maža, kai $N \geqslant N_0(M,\varepsilon)$ yra pakankamai dideli. Tada (2.42) išplaukia iš to, kad kiekvienam fiksuotam $1 \leqslant M < \infty$ riba $\lim_{N\to\infty} V_2$ yra lygi nuliui, kas savo ruožtu išplaukia iš (2.41). □

3 teoremos įrodymo tęsinys. Apsiribosime įrodydami (2.30) vienmačiams pasiskirstymams, kai $t=1$. Bendras atvejis yra įrodomas analogiškai. Naudodami 1.3 skyrelyje apibrėžtą paprastąją funkciją $f_N(x_1,\ldots,x_m) \in L^2_N(\mathbb{R}^m)$ užrašykime $B^{-1}_{N,m}S'_{N,m}$ kaip m-lypį diskretų stochastinį integralą:

$$B^{-1}_{N,m}S'_{N,m}=I_m(f_N,W_N). \tag{2.44}$$

Analogiškai

$$A^{-1}_{N,m}S''_{N,m}=I_1(g_N,Z_N), \tag{2.45}$$

kur paprastoji funkcija $g_N \in L^{\alpha,\delta}_N(\mathbb{R})$ yra apibrėžta lygybe

$$g_N(x)=\beta^{-1}\sum_{t=1\vee(i+1)}^{N} b^m_{t-i},$$

kai $x \in ((i-1)/N, i/N]$, $i \leqslant N$, ir $g_N(x)=0$ kitur. Tegul $g(x):=\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Tada

$$Z_\alpha(1)=I_1(g,Z_\alpha). \tag{2.46}$$

Lieka įrodyti, kad

$$\|g_N-g\|_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})}\to 0, \quad N\to\infty. \tag{2.47}$$

Norint tai padaryti, pakanka įrodyti, kad kiekvienam $1 \leqslant p \leqslant 2$,

$$\int_0^1 |g_N(x)-\beta|^p\,\mathrm{d}x \to 0, \qquad \int_{-\infty}^0 |g_N(x)|^p\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Pirmasis integralas konverguoja nulin, nes

$$\sum_{i=1}^{\infty} b^m_i=\beta.$$

Norint įrodyti, kad antrasis integralas taip pat konverguoja nulin, reikia pastebėti, kad $|b_i^m| \leqslant Ci^{-r}$, kur $r > 1$. Tada

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{0} |g_N(x)|^p \,\mathrm{d}x &\leqslant CN^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{N+j} i^{-r}\right)^p \leqslant CN^{-1}\int\limits_{1}^{\infty}\mathrm{d}y\left(\int\limits_{y}^{1+y} x^{-r}\,\mathrm{d}x\right)^p \\
&\leqslant CN^{-(r-1)p}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{d}y\left(\int\limits_{y}^{1+y} x^{-r}\,\mathrm{d}x\right)^p \\
&=: CN^{-(r-1)p} I \to 0,
\end{aligned}$$

nes $I < \infty$, kai $r > 1$ yra parinktas toks, kad tenkintų nelygybę $(r-1)p < 1$. Tuo nesunku įsitikinti pasinaudojus nelygybe

$$I \leqslant \int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}y\left(\int\limits_{y}^{1} x^{-r}\,\mathrm{d}x\right)^p + \int\limits_{1}^{\infty} y^{-rp}\,\mathrm{d}y,$$

kurios dešinėje pusėje esantis integralas konverguoja kai $(r-1)p < 1$, tuo tarpu antrasis konverguoja kai $rp > 1$. Taigi (2.47) sąryšis įrodytas.

Sąryšis (2.30) išplaukia iš 2.3 lemos bei (1.43)–(1.44), (2.44)–(2.47) sąryšių.

III Skyrius. Tiesinių procesų su begalinės dispersijos martingaliniais triukšmais sumų silpnasis konvergavimas

3.1 Diskrečių integralų schema

Fiksuokime realų skaičių $\delta > 0$ tokį, kad $1 < \alpha - \delta < \alpha + \delta < 2$. Pažymėkime

$$\xi^-_{i,N} \;:=\; \xi_i I(|\xi_i| < D_N), \qquad \xi^+_{i,N} \;:=\; \xi_i I(|\xi_i| \geqslant D_N). \tag{3.1}$$

Nelygybės

$$E|\xi^-_{i,N}|^{\alpha+\delta} \leqslant C\Lambda_1(D_N)D_N^{\delta}, \qquad E|\xi^+_{i,N}|^{\alpha-\delta} \leqslant C\Lambda_1(D_N)D_N^{-\delta} \tag{3.2}$$

nesunkiai yra įrodomos naudojantis (iii) sąlyga bei lėtai kintančių begalybėje funkcijų savybėmis. Analogiškos nelygybės yra teisingos centruotiems atsitiktiniams dydžiams $\eta^{\pm}_{i,N} := \xi^{\pm}_{i,N} - E[\xi^{\pm}_{i,N}|\mathcal{F}_{i-1}]$:

$$E|\eta^-_{i,N}|^{\alpha+\delta} \leqslant C\Lambda_1(D_N)D_N^{\delta}, \qquad E|\eta^+_{i,N}|^{\alpha-\delta} \leqslant C\Lambda_1(D_N)D_N^{-\delta}. \tag{3.3}$$

Pastebėkime, kad atsitiktinių dydžių sekos $(\eta^+_{i,N}, \mathcal{F}_i)$, $(\eta^-_{i,N}, \mathcal{F}_i)$ yra martingaliniai skirtumai, todėl galime taikyti Bahro-Esyno nelygybę: bet kuriam $1 \leqslant r \leqslant 2$

$$E\Big|\sum_{i=1}^n g_i\eta^+_{i,N}\Big|^r \leqslant 2\sum_{i=1}^n |g_i|^r E|\eta^+_{i,N}|^r, \quad E\Big|\sum_{i=1}^n g_i\eta^-_{i,N}\Big|^r \leqslant 2\sum_{i=1}^n |g_i|^r E|\eta^-_{i,N}|^r, \tag{3.4}$$

kur $g_i, i \in \mathbb{Z}$ yra realūs skaičiai.

Toliau naudosime 2.3 skyrelyje įvestus pažymėjimus. Baigtinio intervalo $B = (x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$ stochastinį matą $Z_N(B)$ apibrėžkime lygybe

$$Z_N(B) \;:=\; D_N^{-1} \sum_{i/N \in B} \xi_i,$$

kur atsitiktiniai dydžiai $\xi_i, i \in \mathbb{Z}$ tenkina (i) – (iii) sąlygas. Sumą

$$I(g, Z_N) \ := D_N^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} g(i/N)\xi_i, \tag{3.5}$$

vadinsime funkcijos $g \in L_N^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})$ diskrečiu stochastiniu integralu stochastinio mato Z_N atžvilgiu.

Naudodamiesi (3.3) ir (3.4) nelygybėmis, gauname

$$\begin{aligned}
E|I(g, Z_N)|^{\alpha-\delta} &\leqslant E\Big|\sum g(i/N)D_N^{-1}\eta_{i,N}^{+}\Big|^{\alpha-\delta} + \Big(E\Big|\sum g(i/N)D_N^{-1}\eta_{i,N}^{-}\Big|^{\alpha+\delta}\Big)^{\frac{\alpha-\delta}{\alpha+\delta}} \\
&\leqslant C\Lambda_1(N)D_N^{-\alpha}\sum |g(i/N)|^{\alpha-\delta} + C\Big(\Lambda_1(N)D_N^{-\alpha}\sum |g(i/N)|^{\alpha+\delta}\Big)^{\frac{\alpha-\delta}{\alpha+\delta}} \\
&\leqslant CN^{-1}\sum |g(i/N)|^{\alpha-\delta} + C\Big(N^{-1}\sum |g(i/N)|^{\alpha+\delta}\Big)^{\frac{\alpha-\delta}{\alpha+\delta}} \\
&= C(\|g\|^{\alpha-\delta}_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})} + \|g\|^{\alpha-\delta}_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})}).
\end{aligned}$$

Lieka pasinaudoti normos $||\cdot||_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})}$ apibrėžimu norint gauti nelygybę

$$E|I(g, Z_N)|^{\alpha-\delta} \leqslant C||g||^{\alpha-\delta}_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})}, \tag{3.6}$$

kur konstanta C nepriklauso nuo N ir funkcijos $g \in L_N^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})$.

Žemiau užrašytos lemos įrodymas yra gautas pritaikius 7 lemos [47] įrodymą mūsų tikslams. Dėl to, kad ši lema yra labai svarbi diskrečių integralų schemoje, pateiksime jos įrodymą.

3.1 lema. *Jei funkcijų seka $g_N \in L_N^{\alpha,\delta}$ konverguoja į funkciją $g \in L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})$ normos $||\cdot||_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})}$ prasme, tai atsitiktinio dydžio $I(g_N, Z_N)$ pasiskirstymo funkcija konverguoja į atsitiktinio dydžio $I(g, Z_\alpha)$ (žr. (2.33)) pasiskirstymo funkciją, kai $N \to \infty$.*

Įrodymas. Iš lemos sąlygos išplaukia, kad kiekvienam laisvai parinktam $\varepsilon > 0$ egzistuoja natūralus skaičius $M \geqslant 1$ ir paprastoji funkcija $g_M \in L_M^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})$, kad būtų teisingos nelygybės

$$||g_N - g_M||_{\alpha,\delta} < \varepsilon, \quad ||g_M - g||_{\alpha,\delta} < \varepsilon, \tag{3.7}$$

kai $N \geqslant M$. Akivaizdu, kad

$$\begin{aligned}
&\Big|E\exp\{itI(g_N, Z_N)\} - E\exp\{itI(g, N)\}\Big| \leqslant \\
&\qquad \Big|E\exp\{itI(g_N, Z_N)\} - E\exp\{itI(g_M, Z_N)\}\Big| + \\
&\qquad \Big|E\exp\{itI(g_M, Z_N)\} - E\exp\{itI(g_M, Z_\alpha)\}\Big| + \\
&\qquad \Big|E\exp\{itI(g_M, Z_\alpha)\} - E\exp\{itI(g, Z_\alpha)\}\Big| =: V_1 + V_2 + V_3, \ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Lieka įsitikinti, kad, kaip ir 2.3 lemoje, V_i, $i = 1, 2, 3$ yra kaip norima maži, kai $N > M$ yra pakankamai dideli. Pradėkime nuo V_1. Pastebėkime, kad

$$V_1 \leqslant |t| \left\{ E|I(g_N - g_M, Z_N)|^{\alpha-\delta} \right\}^{1/(\alpha-\delta)}.$$

Pasinaudoję (3.6) ir pirmąja (3.7) nelygybėmis gauname, kad

$$V_1 < C|t|\varepsilon,$$

kai $N > M$. Nesunku patikrinti, kad analogiška nelygybė yra teisinga dėmeniui V_3.

Apsiribokime atveju $N = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada erdvės $L_N^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})$ monotoniškai didėja, kai $N \to \infty$.

Naudodamiesi $I(g, N)$ ir $I(g_M, Z_\alpha)$ apibrėžimais gauname

$$\begin{aligned} I(g_M, Z_N) &= \sum_i g(i/M) Z_N[i/M, (i+1)/M), \\ I(g_M, Z_\alpha) &= \sum_i g(i/M) Z_\alpha[i/M, (i+1)/M), \end{aligned}$$

t.y. $I(g_M, Z_N)$ yra baigtinio skaičiaus kintamųjų $Z_N[i/M, (i+1)/M)$, $i \in \mathbb{Z}$ pirmos eilės polinomas, o $I(g_M, Z_\alpha)$ – tas pats, $Z_\alpha[i/M, (i+1)/M)$, $i \in \mathbb{Z}$ kintamųjų, polinomas. Iš 4 teoremos (ii) sąlygos išplaukia, kad $I(g_M, Z_N) \Longrightarrow I(g_M, Z_\alpha)$, o iš čia seka, kad kiekvienam fiksuotam $M < \infty$ riba $\lim_{N\to\infty} V_2$ yra lygi nuliui.

Bendru atveju lema įrodoma su neesminiais pakeitimais. □

3.2 4 teoremos įrodymas

Pažymėkime

$$\begin{aligned} J_N(t) &:= \frac{1}{L(N) N^d D_N} \sum_{s=1}^{[Nt]} X_s, \\ J_N &:= J_N(1), \quad J_{\alpha,d} := J_{\alpha,d}(1). \end{aligned}$$

3.2 lema. $J_N(t) \Longrightarrow J_{\alpha,d}(t)$.

Įrodymas. Pakanka įrodyti, kad atsitiktinio dydžio J_N pasiskirstymo funkcija konverguoja į $J_{\alpha,d}$ pasiskirstymo funkciją, nes bendras atvejis yra įrodomas analogiškai. Užrašykime $J_N = I(g_N, Z_N)$, kur

$$g_N(i/N) := \frac{1}{L(N) N^d} \sum_{s=1}^{N} \left(c_+ L(s-i)(s-i)_+^{d-1} + c_- L(i-s)(i-s)_+^{d-1} \right), \quad i \in \mathbb{Z}$$

yra erdvės $L_N^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})$ paprastoji funkcija. Analogiškai, $J_{\alpha,d} = I(g, Z_\alpha)$, kur

$$g(u) := \int_0^1 (c_+(s-u)_+^{d-1} + c_-(u-s)_+^{d-1})ds, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Tada $I(g_N, Z_N) \Longrightarrow I(g, Z_\alpha)$ išplaukia iš 3.1 lemos, įsitikinus, kad

$$||g_N - g||_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{3.8}$$

Kadangi labai panašių į (3.8) sąryšių įrodymus galima rasti [1], [4] darbuose, tai pastarojo įrodymo nepateiksime. □

Teoremos įrodymas bus baigtas, jei įrodysime sekos $J_N(t)$, $N \in \mathbb{N}$ kompaktiškumą Skorochodo erdvėje $\mathcal{D}[0,1]$. Tai padarysime naudodamiesi gerai žinomu kompaktiškumo kriterijumi (žr. 15.6 teorema [8]) ir 3.3 lema.

3.3 lema. *Egzistuoja konstantos $C > 0$, $\varepsilon > 0$ tokios, kad*

$$E|J_N(t_2) - J_N(t_1)|^{\alpha-\delta} \leqslant C|t_2 - t_1|^{1+\varepsilon} \tag{3.9}$$

su visais $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$.

Įrodymas. Pakanka įsitikinti, kad (3.9) nelygybė yra teisinga taškuose $t_k = j_k/N$, $j_k = 1, 2, \ldots, N$, $k = 1, 2$. Dar daugiau, iš proceso X_t, $t \in \mathbb{Z}$ stacionarumo išplaukia, kad galima apsiriboti atveju $j_1 = 0, j_2 = j > 1$. Taigi turime įrodyti nelygybę

$$E|J_N(j/N)|^{\alpha-\delta} \leqslant C(j/N)^{1+\varepsilon}. \tag{3.10}$$

Panašiai kaip 3.2 lemos įrodyme $J_N(j/N) = I_N(g_{N,j}, Z_N)$, kur

$$g_{N,j}(i/N) := A_N^{-1} \sum_{s=1}^{j} b_{s-i}, \qquad A_N := L(N)N^d.$$

Kadangi iš nelygybės $\|g_{N,j}\|_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})}^{\alpha-\delta} \leqslant C(j/N)^{1+\varepsilon}$ išplaukia (3.10) nelygybė, tai įrodysime, kad

$$N^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{s=1}^{j} b_{s-i} \right|^{\alpha-\delta} \leqslant C A_N^{\alpha-\delta} (j/N)^{1+\varepsilon}. \tag{3.11}$$

Paskutinę nelygybę pakanka įrodyti svorių formulėje (30) paėmus konstantas $c_+ = 1, c_- = 0$. Atsižvelgę į tai, turime įrodyti, kad

$$N^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{s=1}^{j} L(s-i)(s-i)_+^{d-1} \right|^{\alpha-\delta} \leqslant C L(N)^{\alpha-\delta} N^{(\alpha-\delta)d} (j/N)^{1+\varepsilon},$$

kur konstanta C nepriklauso nuo N, j. Paskutinioji nelygybė nesunkiai įrodoma naudojantis lėtai kintančių begalybėje funkcijų savybėmis bei nelygybėmis

$$\begin{aligned} N^{-d(\alpha-\delta)} \sum_{i \leqslant 0} \left| \sum_{s=1}^{j} (s-i)^{d-1} \right|^{\alpha-\delta} &\leqslant C j^{\alpha-\delta}, \\ N^{-d(\alpha-\delta)} \sum_{i=0}^{j-1} \left| \sum_{s=i+1}^{j} (s-i)^{d-1} \right|^{\alpha-\delta} &\leqslant C j^{\alpha-\delta}, \end{aligned}$$

kuriose konstanta C nepriklauso nuo N ir j. $\square$

Pažymėkime $\kappa = (\alpha - \delta)/2$. Naudodamiesi Hiolderio nelygybe, gauname

$$E\{|J_N(t_2) - J_N(t_1)|^\kappa |J_N(t_3) - J_N(t_2)|^\kappa\} \leqslant \\ \left\{ E|J_N(t_2) - J_N(t_1)|^{2\kappa} \right\}^{1/2} \left\{ E|J_N(t_3) - J_N(t_2)|^{2\kappa} \right\}^{1/2}$$

bet kokiems $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant 1$.

Pasinaudoję (3.9) nelygybe gauname

$$E\{|J_N(t_2) - J_N(t_1)|^\kappa |J_N(t_3) - J_N(t_2)|^\kappa\} \leqslant C|t_3 - t_1|^{1+\varepsilon},$$

kur konstantos $C > 0$, $\varepsilon > 0$, tuo užbaigdami teoremos įrodymą.

3.3 5 teoremos įrodymas

Tegul

$$\begin{aligned} g_N(i/N) &:= \sum_{s=1}^{N} \left(c_+ L(s-i)(s-i)_+^{d-1} + c_- L(i-s)(i-s)_+^{d-1} \right), \quad i \in \mathbb{Z} \\ g(u) &:= (c_+ + c_-) A \mathbf{1}_{[0,1]}(u), \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sąryšio

$$||g_N - g||_{L^{\alpha,\delta}(\mathbb{R})} \to 0, \quad N \to \infty$$

įrodymas yra analogiškas (2.47). Tolesni samprotavimai sutampa su 3.2 lemos įrodymu.

Išvados

Disertacijoje nagrinėtas tolimos priklausomybės tiesinių procesų Apelio polinomų dalinių sumų silpnasis konvergavimas. Pagrindiniai disertacijoje gauti rezultatai yra tokie.

1. Ištirti tiesinio filtro su tolima priklausomybe ir martingalinėmis inovacijomis Apelio polinomų su baigtine dispersija sumų ribiniai desniai. Gauti rezultatai praplečia ankstesnius Surgailio [47] bei Avram ir Taqqu [3] rezultatus tiesiniams filtrams su priklausomomis inovacijomis.

2. Ištirti tiesinio filtro su tolima priklausomybe Apelio polinomų su *begaline dispersija* sumų ribiniai dėsniai. Įrodytas ribinio dėsnio dichotomijos egzistavimas: priklausomai nuo parametrų α, d, m reikšmių, ribinis procesas yra $\alpha-$stabilus arba kartotinis stochastinis integralas. Šis rezultatas yra naujas ta prasme, kad tokiems dydžiams stabilus ribinis dėsnis gautas pirmą kartą. Pažymėtinas darbe gautas Apelio polinomų multinominės formulės apibendrinimas begalinės dispersijos atveju.

3. Įrodytas tiesinio filtro su martingalinėmis inovacijomis ir begaline dispersija dalinių sumų konvergavimas į trupmeninį stabilų procesą (tolimos atminties filtro atveju) ir nepriklausomų pokycių stabilų procesą (trumpos atminties filtro atveju). Gauti rezultatai praplečia ankstesnius Astrausko [2], Maejima [38], Kasahara ir Maejima [31], Avram ir Taqqu [4] rezultatus, liečiančius nepriklausomų inovacijų atvejį.

Bibliography

[1] A. Astrauskas. Limit theorems for quadratic forms of linear processes, *Lithuanian Math. J.*, **23**(4), 4–11 (1983).

[2] A. Astrauskas. Limit theorems for sums of linearly generated random variables, *Lithuanian Math. J.*, **23**(2), 4–12 (1983).

[3] F. Avram and M.S. Taqqu. Noncentral limit theorems and Appell polynomials, *Ann. Probab.*, **15**, 767–755 (1987).

[4] F. Avram and M.S. Taqqu. Weak convergence of sums of moving averages in the α-stable domain of attraction, *Ann. Probab.*, **20**, 483–503 (1992).

[5] B. von Bahr and C.G. Esséen. Inequalities for r-th absolute moment of sums of random variables, $1 < r \leqslant 2$, *Ann. Math. Statist.*, **36**, 299–303 (1965).

[6] R.T. Baillie. Long memory processes and fractional integration in econometrics. *J. Econometrics*, **73**, 5–59 (1996).

[7] J. Beran. *Statistics for Long-Memory Proceses*. Chapman and Hall, New York 1959.

[8] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York 1968.

[9] P. Breuer and P. Major. Central limit theorem for nonlinear functionals of Gaussian fields, J. Multivar. Anal. **13**, 425–441 (1983).

[10] D.R. Brillinger. *Time Series. Data Analysis and Theory*. Holt, Rinehart and Wilson, New York 1975.

[11] P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York 1987.

[12] D. Cline. Infinite series of random variables with regularly varying tails. Tech. Report 83–24, Institute of Applied Mathematics and Statistics, University of British Columbia (1983).

[13] Y. A. Davydov. The invariance principle for stationary processes, *Theor. Probab. Appl.*, **15**, 487–489 (1970).

[14] R. L. Dobrushin and P. Major. Non-central limit theorems for non-linear functionals of gaussian fields, *Z. Wahr. verw. Geb.*, **50**, 27–52 (1979).

[15] P. Doukhan, G. Oppenheim and M.S. Taqqu (eds.) *Long-Range Dependence.* Birkhäuser, Boston 2003.

[16] L. Giraitis, Central limit theorem for functionals of linear process, *Lithuanian Math. J.*, **25**, 25–35 (1985).

[17] L. Giraitis and D. Surgailis. CLT and other limit theorems for functionals of Gaussian sequences, *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, **70**, 191–212 (1985).

[18] L. Giraitis and D. Surgailis. Multivariate Appell polynomials and the central limit theorem. In: *Dependence in Probability and Statistics*, E. Eberlein and M. S. Taqqu (Eds), pp. 21–71. Birkhäuser, Boston 1986.

[19] L. Giraitis and D. Surgailis. A limit theorem for polynomials of linear process with long range dependence, *Lithuanian Math. J.*, **29**, 290–311, 1989.

[20] L. Giraitis and M.S. Taqqu. Limit theorems for bivariate Appell polynomials. Part I: Central limit theorems. *Probab. Th. Rel. Fields*, **107**, 359–381 (1997).

[21] L. Giraitis, M.S. Taqqu and N. Terrin. Limit theorems for bivariate Appell polynomials. Part II: Non-central limit theorems. *Probab. Th. Rel. Fields*, **110**, 333-367 (1998).

[22] L. Giraitis and M.S. Taqqu. Central limit theorem for quadratic forms with time domain conditions. *Ann. Probab.* **26**, 377-398 (1998).

[23] L. Giraitis and M.S. Taqqu. Functional non-central and central limit theorems for bivariate Appell polynomials. *J. Theor. Probab.*, **14**, 293–326 (2001).

[24] C. W. J. Granger and R. Joyeux. An introduction to long-range time series models and fractional differencing, *J. Time Ser. Anal.* **1**, 15–30 (1980).

[25] H.-C. Ho and T. Hsing. On the asymptotic expansion of the empirical process of long memory moving averages, *Ann. Statist.*, **24**, 992–1024 (1996).

[26] H.-C. Ho and T. Hsing. Limit theorems for functionals of moving averages, *Ann. Probab.*, **25**, 1636–1669 (1997).

[27] T. Hsing. On the asimptotic distributions of partial sums of functionals of infinite variance moving averages. *Ann. Probab.*, **27**, 1579–1599 (1999).

[28] H. E. Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs, *Trans. Am. Soc. Civil Engineers*, **116**, 770-799 (1951).

[29] I.A. Ibragimov and Yu. V. Linnik. *Independent and Stationary Sequences of Random Variables.* Wolters-Noordhoff, Groningen 1971.

[30] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Random Proceses.* Springer-Verlag, New York 1996.

[31] Y. Kasahara and M. Maejima. Weighted sums of i.i.d. random variables attracted to integrals of stable processes, *Probab. Th. Rel. Fields*, **78**, 75–96 (1988).

[32] A.N. Kolmogorov. Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum. *Doklady Acad. Sci. USSR* **26**, 115–118 (1940).

[33] H. L. Koul and D. Surgailis. Asymptotic expansion of M-estimators with long memory errors, *Ann. Statist.*, **25**, 818–850 (1997).

[34] H.L. Koul and D. Surgailis. Asymptotics of empirical processes of long memory moving averages with infinite variance, *Stoch. Proc. Appl.*, **91**, 309–336 (2001).

[35] H.L. Koul and D. Surgailis. Asymptotic expansion of the empirical process of long memory moving averages. In: H. Dehling, T. Mikosch and M. Sorensen (eds.), *Empirical Process Techniques for Dependent Data*, pp. 213–239. Birkhäuser: Boston 2002.

[36] S. Kwapień and W.A. Woyczynski. *Random Series and Stochastic Integrals : Single and Multiple.* Birkhäuser, Boston 1992.

[37] J.W. Lamperti. Semi-stable stochastic processes, *Trans. Am. Math. Soc.*, **104**, 62–78 (1962).

[38] M. Maejima. On a class of self-similar processes, *Z. Wahr. verw. Geb.*, **62**, 235–245 (1983).

[39] B.B. Mandelbrot and J.W. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *Siam Review* , **10**, 422–437 (1968).

[40] B.B. Mandelbrot and J.R. Wallis. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence. *Water Resources Research*, **5**, 967–988 (1969).

[41] G. Maruyama. Nonlinear functionals of gaussian stationary processes and their applications, *Lecture Notes in Math.*, **550**, 375–378. Springer-Verlag, New York 1976.

[42] M. Peligrad and M. Utev. Central limit theorem for linear processes, *Ann. Probab.*, **25**,443–456 (1997).

[43] V.H. de la Peña, S. Montgomery-Smith, and J Szulga. Decoupling inequalities for finite degree random chaos, *Ann. Probab.*, **22**, 1745-1765 (1994).

[44] M. Rosenblatt. Independence and dependence. In: *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.*, 411–443 University of California Press, Berkeley, 1961.

[45] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Processes: Stochasic Models with Infinite Variance.* Chapman and Hall, New York 1994.

[46] D. Surgailis. On L^2 and non-L^2 multiple stochastic integration, *Lecture Notes Control and Inform. Sci.*, **36**, 211–226. Springer-Verlag, New York 1981.

[47] D. Surgailis. Zones of attraction of self-similar multiple integrals, *Lithuanian Math. J.*, **22**,327-340 (1982).

[48] D. Surgailis. Long range dependence and Appell rank, *Ann. Probab.*, **28**, 478–497 (2000).

[49] D. Surgailis. Non-CLTs: U-statistics, multinomial formula and approximations of multiple Ito-Wiener integrals. In: P. Doukhan, G. Oppenheim and M.S. Taqqu (eds.), *Long Range Dependence: Theory and Applications*, pp. 129–142. Birkhäuser, Boston 2003.

[50] D. Surgailis. Stable limits of empirical processes of long memory moving averages with infinite variance, *Stoch. Proc. Appl.* **100**, 255–274 (2002).

[51] D. Surgailis and M. Vaičiulis. Convergence of Appell polynomials of long range dependent moving averages in martingale differences, *Acta Appl. Math.*, **58**, 343–357 (1999).

[52] J. Szulga. The state of decoupling : a survey. In: C. Houdré and V. Pérez-Abreu (eds), *Chaos Expansions, Multiple Wiener-Itô Integrals and Their Applications*, pp. 87–123. CRC Press, Boca Raton 1994.

[53] M.S. Taqqu. Weak convergence to fractional Browniain to the Rosenblatt process, *Z. Wahr. verw. Geb.*, **31**, 287–302 (1975).

[54] M.S. Taqqu. A representation for self-similar processes, *Stoch. Proc. Appl.*, **7**, 55–64 (1978).

[55] M.S. Taqqu. Convergence of iterated processes of arbitrary Hermite rank, *Z. Wahr. verw. Geb.*,**50**, 53–83 (1979).

[56] M.S. Taqqu and R. Wolpert. Infinite variance self-similar processes subordinate to a Poisson measure, *Z. Wahr. verw. Geb.*, **62**, 53–72 (1983).

[57] M. Vaičiulis. Tiesinių procesų su martingaliniais triukšmais ir begaline dispersija konvergavimas, *Liet. matem. rink.,* **43**, specialusis numeris, 115–120 (2003) (rusiškai).

[58] M. Vaičiulis. Convergence of sums of Appell polynomials with infinite variance, *Lithuanian Math. J.*, **43**(1), 80–98 (2003).

[59] Q. Wang, Y.-X. Lin and C. M. Gullati. Asymptotics for moving average processes with dependent innovations, *Statistics* & *Probability Letters*, **54**, 374–356 (2001).

Žymėjimai

$\mathbb{R}$	– realių skaičių aibė
$\mathbb{N}$	– natūralių skaičių aibė
$\mathbb{Z}$	– sveikų skaičių aibė
$\mathcal{D}[0,1]$	– funkcijų, apibrėžtų aibėje $[0,1]$ Skorochodo erdvė
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	– tikimybinė erdvė
$E\{\xi\}$	– atsitiktinio dydžio ξ vidurkis
$L^2(\Omega)$	– aibė realių atsitiktinių dydžių, apibrėžtų aibėje Ω ir turinčių antrą momentą
ζ, η, ξ	– realūs atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti aibėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
$J_{\alpha,d}(t)$	– tiesinis trupmeninis stabilus judesys
$J_k(t)$	– k-os eilės Hermito procesas
$Z_\alpha(t)$	– α-stabilus Lévy judesys
$A_k(g)$	– k-tos eilės Apelio forma
$\mathcal{P}_k(x)$	– k-os eilės Apelio polinomas, susijęs su atsitiktinio dydžio X_0 skirstiniu
$\mathcal{Q}_k(x)$	– k-os eilės Apelio polinomas, susijęs su atsitiktinio dydžio ξ_0 skirstiniu

$B(x,y)$	– beta funkcija, $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, x>0, y>0$
$\mathrm{cum}(\xi_1, \ldots \xi_k)$	– atsitiktinių dydžių $\xi_1, \ldots, \xi_k$ kumuliantas
$I_A(x)$	– aibės A indikatorius
$\Lambda(i)$	– lėtai kintanti begalybėje funkcija, t.y. $\lim_{i\to\infty} \frac{\Lambda(iu)}{\Lambda(i)} = 1$ su kiekvienu $u > 0$
$sgn(x)$	$= 1$ jei $x > 0$, 0 jei $x = 0$, -1, jei $x < 0$
$a_n \sim b_n (n \to \infty)$	– reiškia, kad $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$
$a_n = O(b_n)(n \to \infty)$	– reiškia, kad egzistuoja konstantos $C > 0$ ir $N \in \mathbb{N}$ tokios, kad $\lvert a_n\rvert \leqslant C\lvert b_n\rvert$ for all $n \geqslant N$
$a_n = o(b_n)(n \to \infty)$	– reiškia, kad $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
$\xi_n = O_P(a_n)$	– reiškia, kad atsitiktinių dydžių $\{\xi_i\}$ seka yra aprėžta pagal tikimybę, t.y. $\lim_{N\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\{\lvert\xi_n\rvert > N/a_n\} = 0$
C	– įvairios teigiamos konstantos
$[\cdot]$	– skaičiaus sveikoji dalis
$\lvert x\rvert_+$	$= x$ jei $x > 0$, 0 jei $x \leqslant 0$
$\Longrightarrow$	– konvergavimas pagal pasiskirstymą
$\Longrightarrow$	– silpnasis baigtiniamačių pasiskirstymų konvergavimas
$\overset{\mathcal{D}[0,1]}{\Longrightarrow}$	– silpnasis tikimybinių matų konvergavimas Skorochodo erdvėje $\mathcal{D}[0,1]$